МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Бојан Башић, Душан Ђукић, Марко Радовановић

Београд, 8. 2. 2020

На међународним математичким такмичењима средњошколци из Србије редовно постижу резултате на које сви можемо бити поносни. У последње четири године Република Србија на Балканској математичкој олимпијади увек је освајала једно од прва три места (од тога 2016. и 2019. године прво место). Резултати на Међународној математичкој олимпијади су још импресивнији: 2017. год. у Рио де Жанеиру (Бразил), наша екипа је освојила врло високо 18. место у конкуренцији од 111 земаља из свих крајева света (поређења ради, на последњим спортским Олимпијским играма, такође у Рио де Жанеиру, 2016. године, Република Србија је по броју освојених медаља заузела 31. место), 2018. године је овај пласман додатно поправила, завршивши такмичење на чак 13. месту на планети, са освојене освојивши две златне, две сребрне и две бронзане медаље, што је у том моменту био најбољи биланс медаља у историји учешћа наше земље (у свим њеним инкарнацијама) на ММО (једини претходни пут су две златне медаље освојене још далеке 1974. године, када су освојене још и две сребрне али и само једна бронзана медаља; и то, како су предвиђала тадашња правила, у тиму од 8 ученика, селектованих широм тадашње Југославије, наспрам садашњих 6 ученика, селектованих из Србије), а 2019. године постигнут је незамислив успех, када је наша екипа освојила екипно **9. место** на планети (у конкуренцији 112 земаља), са освојене **три златне, једном сребрном и две бронзане медаље**!!

Екипа која представља земљу на међународним математичким такмичењима бира се кроз низ такмичења, почев од општинског нивоа па закључно са Српском математичком олимпијадом и додатним изборним такмичењем за одабир олимпијске екипе. Наравно, сврха такмичења није само да се одабере шест најбољих ученика, већ и да код свих који учествују подстакне интересовање за математику и побуди такмичарски дух. Стога Државна комисија с пажњом припрема задатке за све нивое такмичења, трудећи се (некада с више, а понекад ипак, признајемо, с нешто мање успеха) да нађе прави баланс у погледу тежине задатака за сваки ниво, разноврсности математичких области из којих се задаци постављају итд.

Предавање ће се састојати из три целине. У првој целини биће презентован систем такмичења у земљи, разматране неке његове позитивне и негативне стране и разматран простор за побољшања. Нарочито ће бити посвећена пажња изменама у Правилнику које ступају на снагу у предстојећој сезони такмичења, с највећим утицајем на „такмичарску динамику“ ученика тзв. Б категорије, будући да су ти ученици заправо најрелевантнија циљна група када је реч о аспекту популаризације математике кроз такмичења.

У другој целини биће презентовани одабрани задаци са свих нивоа такмичења. Биће указано на то с чим се наши ученици углавном добро сналазе а шта им често задаје проблема, биће наглашене неке лепе идеје као и неке типичне грешке итд.

Најзад, последња целина је предвиђена за дискусију. Предавачи су дугогодишњи чланови Комисије и имају вишегодишње искуство с руковођењем екипе Србије на међународним такмичењима, па верујемо да се у овој целини могу јавити занимљиве теме за дискусију.

О Српској математичкој олимпијади

У Математичкој гимназији у Београду је 5. и 6. априла 2019. године одржана 13. по реду Српска математичка олимпијада. На такмичењу су учествовала 34 ученика средњих школа. Како је један од основних циљева овог такмичења избор екипе Републике Србије за међународна такмичења, пре свега за Међународну математичку олимпијаду, такмичење је осмишљено по угледу на ММО. Према томе, такмичење траје два дана, током сваког дана раде се по три задатка, при чему сваки задатак вреди по 7 бодова. Сличност са ММО не завршава се на техничким детаљима, већ се комисија труди да задаци за СМО по концепцији а и по тежини осликавају задатке са ММО, желећи да се на тај начин постигну што вернији услови, те да као последица тога буде изабрана екипа која ће заиста најбоље представљати Србију на ММО.

Након прегледа задатака као најуспешнији су се показали

1. ***Јелена Иванчић,*** ученица трећег разреда,
2. ***Павле Мартиновић,*** ученик четвртог разреда,
3. ***Алекса Милојевић,*** ученик четвртог разреда,
4. ***Милош Милићев,*** ученик другог разреда,
5. ***Јован Тороމановић,*** ученик трећег разреда,
6. ***Владимир Виктор Мирјанић,*** ученик четвртог разреда,

сви из Математичке гимназије у Београду, са оствареним скором од 26, 25, 24, 23, 18 и 18 бодова. Како налажу пропозиције, ових шест ученика су се квалификовали у екипу Републике Србије за Балканску међународну олимпијаду.

Поменимо још само податак да је Комисија на СМО, по правилима ММО, одлучила да додели 4 златне, 5 сребрних и 7 бронзаних медаља, као и 2 похвале.

О Балканској математичкој олимпијади

У Кишињеву, престоници Молдавије, од 30. априла до 5. маја 2019. одржана је 36. по реду Балканска математичка олимпијада. Малочас је наведен састав екипе која је представљала Србију, а руководство су чинили ***Душан Ђукић,*** Машински факултет у Београду, и ***Бојан Башић,*** Природно-математички факултет у Новом Саду.

Следећа табела приказује успех ученика на овом такмичењу.

Ученик/Задатак	1	2	3	4	Укупно	
СРБИЈА						
Јелена Иванчић	10	1	10	4	25	бронзана медаља
Павле Мартиновић	10	10	10	0	30	сребрна медаља
Алекса Милојевић	10	10	10	10	40	златна медаља
Милош Милићев	10	10	10	2	32	златна медаља
Јован Тороманович	10	10	10	10	40	златна медаља
Владимир Виктор Мирјанић	9	1	5	0	15	бронзана медаља

У незваничном пласману земаља, Србија је завршила такмичење на **првом месту** са 182 бода, испред екипе Румуније са 180 бодова и екипе Турске са 164 бода. Посебно треба истаћи резултате Алексе и Јована, који су апсолутни победници такмичења **са максималних 40 поена** (трећепласирани ученици имају по 32 поена, међу којима је и Милош; додајмо још, Алекси је ово четврти пут да на Балканијади осваја максималан број поена!!). Владимиров слабији резултат, као и резултати Јелене и Павла, који су (можда мало нескромно говорећи) нешто испод њиховог реномеа (при чему је Павлов резултат последица погрешног разумевања 4. задатка) нису бацили озбиљнију сенку на изузетан успех екипе на овом такмичењу.

Додељено је 7 златних медаља (све у званичној конкуренцији), 23 сребрне медаље (14 у званичној и 9 у незваничној конкуренцији) и 46 бронзаних медаља (22 у званичној и 24 у незваничној конкуренцији), као и 9 похвала (6 у званичној и 3 у незваничној конкуренцији).

О изборном такмичењу и Међународној математичкој олимпијади

„Завршна рунда“, у којој је одређена екипа Србије за Међународну математичку олимпијаду, одржана је 26. и 27. маја у Математичкој гимназији у Београду. Подсетимо се, пре три године је реформисан систем избора екипе Србије за ММО. Према садашњем систему, након СМО се одржава још једно такмичење (конципирано на исти начин као СМО, тј. као ММО), на које се позивају првих 12 ученика са СМО. По завршетку овог такмичења за сваког ученика се рачуна збир бодова освојених на СМО и на изборном такмичењу, и притом се ученицима који су у текућој школској години освојили златну медаљу на Балканијади на овај збир додаје још 7 бодова, а ученицима који су освојили сребрну се додају још 3 бода. Првих шест ученика по укупној суми чине екипу Србије на ММО.

Након узимања свега у обзир, састав екипе Србије се није променио (што је и први пут откад је уведено изборно такмичење да иста екипа одлази на БМО и ММО!), мада јесу настале неке измене у међусобном поретку ученика; нови поредак је гласио: ***Павле Мартиновић*** (25 + 36 + 3 = 64 бода), ***Алекса Милојевић*** (24 + 28 + 7 = 59 бодова), ***Јелена Иванчић*** (26 + 31 = 57 бодова), ***Милош Милићев*** (23 + 22 + 7 = 52 бодова), ***Јован Тороманович*** (18 + 21 + 7 = 46 бодова) и ***Владимир Виктор Мирјанић*** (18 + 21 = 39 бодова). Конкуренција је била збиља тесна, будући да су наредна три ученика била изједначена са 37 бодова, тј. свега два бода мање у односу на последњепласираног члана екипе. Овим је утврђена екипа која, уз вође ***Марка Радовановића,*** Математички факултет у Београду, и ***Бојана Башића,*** Природно-математички факултет у Новом Саду, креће пут Велике Британије, где се на Универзитету у Бату од 11. до 22. јула одржавала јубиларна 60. Међународна математичка олимпијада.

Било каква реформа обично има и своје подржаваоце а и своје критичаре, па тако стоје ствари и с овим уведеним додатним кругом такмичења. Будимо реални, заиста има и позитивних и негативних страна новог система избора екипе. Од негативних страна може се истаћи, пре свега, чињеница да се неизвесност и ишчекивање код ученика хоће ли баш он успети да се избори за то да поносно представља своју земљу на ММО продужава за безмало два месеца. (А, с друге стране, ипак и то има своју позитивну страну, будући да се ученици на овај начин спречавају да се превише „опусте", јер су свесни да место у екипи није извесно и поред доброг учинка на СМО. Но, било како било, свакако није пријатан осећај накнадног „испадања" из прве шесторке, а што се, нажалост, десило прва два пута откако је уведен нови систем.) Позитивних пак страна, верујемо, има више, чиме смо се и руководили када смо одлучили да уведемо овај систем. Само време може дати коначан суд, али ипак приметимо следеће. Претпрошле године, први пут откако је уведен нови систем, екипа Србије на ММО у Рио де Жанеиру је освојила врло високо 18. место (поређења ради, на спортским олимпијским играма одржаним годину дана пре тога, игром случаја такође у Рио де Жанеиру, Србија се по освојеним медаљама нашла на 31. позицији, што је медијски окарактерисано као одличан успех). Прошле године на ММО Србија је освојила, тада смо рекли, „невероватно" 13. место, освојивши две златне, две сребрне и две бронзане медаље, што је најбољи биланс медаља у историји учешћа наше земље (у свим њеним инкарнацијама) на ММО (једини претходни пут су две златне медаље освојене још далеке 1974. године, када су освојене још и две сребрне али и само једна бронзана медаља; и то, како су предвиђала тадашња правила, у тиму од 8 ученика, селектованих широм тадашње Југославије, наспрам садашњих 6 ученика, селектованих из Србије). Ако смо то називали невероватним успехом (што и јесте), шта онда тек рећи за ову годину, када је наша екипа освојила екипно **9. место** на планети (у конкуренцији 112 земаља), са освојене **три златне** (Јелена, Павле и Алекса), **једном сребрном** (Милош) **и две бронзане медаље** (Јован и Владимир)!! Честитке свим ученицима, пре свега освајачима златних медаља, а нарочито Јелени, која је, с освојеним 41 бодом (свега бод мање од максимума), поред златне медаље понела кући и посебну награду за најбољу такмичарку на ММО.

У наставку прилажемо задатке са ових такмичења, као и са Међународне математичке олимпијаде.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

13. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

5. април 2019.

Први дан

1. Одредити све природне бројеве n, $n > 1$, који имају следеће својство: ако су $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ сви природни бројеви мањи од n и узајамно прости са n, и важи поредак $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_k$, онда ниједан од збирова $a_i + a_{i+1}$ за $i = 1, 2, \ldots, k-1$ није дељив са 3.

2. За низ ненегативних реалних бројева $a_1, a_2, \ldots, a_k$ кажемо да је *уложив* у интервал $[b, c]$ ако постоје бројеви $x_0, x_1, \ldots, x_k$ из интервала $[b, c]$ такви да важи $|x_i - x_{i-1}| = a_i$ за $i = 1, 2, \ldots, k$. Низ је *нормиран* ако су сви његови чланови не већи од 1. За задат природан број n, доказати:

a) сваки нормиран низ дужине $2n+1$ је уложив у интервал $[0, 2-\frac{1}{2^n}]$.

b) постоји нормиран низ дужине $4n+3$ који није уложив у $[0, 2-\frac{1}{2^n}]$.

3. Конвексан четвороугао $ABCD$ је описан око кружнице k. Праве AD и BC се секу у тачки P, а кружнице описане око $\triangle PAB$ и $\triangle PCD$ се секу у тачки X. Доказати да тангенте из тачке X на кружницу k граде једнаке углове са правима AX и CX.

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

13. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

6. април 2019.

Други дан

4. Дат је $\triangle ABC$. Нека је A_1 централносиметрична слика пресечне тачке симетрале $\measuredangle BAC$ и странице BC, где је центар симетрије средина странице BC. Аналогно дефинишемо тачке B_1 (на страници CA) и C_1 (на страници AB). Пресек кружнице описане око $\triangle A_1B_1C_1$ с правом AB је скуп $\{Z, C_1\}$, с правом BC је скуп $\{X, A_1\}$, а с правом CA је скуп $\{Y, B_1\}$. Ако се нормале из тачака X, Y и Z на BC, CA и AB, респективно, секу у једној тачки, доказати да је $\triangle ABC$ једнакокрак.

5. На планети X облика лопте се налази $2n$ бензинских пумпи. Притом је свака пумпа упарена с по једном другом пумпом, и сваке две упарене пумпе се налазе на дијаметрално супротним тачкама планете. На свакој пумпи се налази одређена количина бензина. Познато је следеће: уколико аутомобил с претходно празним (довољно великим) резервоаром крене с ма које пумпе, увек може стићи до пумпе с њом упарене (уз могуће допуњавање бензина на другим пумпама током пута). Одредити све природне бројеве n такве да, за ма какав распоред $2n$ пумпи који испуњава наведени услов, увек постоји пумпа од које аутомобил може кренути с претходно празним резервоаром и обићи све остале пумпе на планети. (Сматрати да аутомобил троши константну количину бензина по јединици дужине.)

6. Низови $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ и $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ дефинисани су рекурентним релацијама

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{2018}{n} a_n + a_{n-1} \text{ за } n \geqslant 1,$$

и

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 1, \quad b_{n+1} = \frac{2020}{n} b_n + b_{n-1} \text{ за } n \geqslant 1.$$

Доказати:

$$\frac{a_{1010}}{1010} = \frac{b_{1009}}{1009}.$$

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

2. maj 2019.
Language: Serbian

1. задатак.

Означимо са $\mathbb{P}$ скуп свих простих бројева. Наћи све функције $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ такве да важи

$$f(p)^{f(q)} + q^p = f(q)^{f(p)} + p^q$$

за све $p, q \in \mathbb{P}$.

2. задатак.

Реални бројеви a, b и c су такви да важи $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c$ и $a+b+c = ab+bc+ca > 0$. Доказати неједнакост

$$(a+1)\sqrt{bc} \geqslant 2.$$

Одредити све тројке (a, b, c) за које се достиже једнакост.

3. задатак.

Дат је оштроугли разностраничан троугао ABC. Нека су X и Y различите тачке унутар дужи BC такве да је $\sphericalangle CAX = \sphericalangle YAB$. Означимо са:

(1°) K и S - редом подножја нормала из темена B на праве AX и AY;

(2°) T и L - редом подножја нормала из темена C на праве AX и AY.

Доказати да се праве KL и ST секу на правој BC.

4. задатак.

Решетка је скуп свих тачака облика (m, n), где су m и n цели бројеви за које је $|m| \leqslant 2019$, $|n| \leqslant 2019$ и $|m|+|n| < 4038$. Тачке (m, n) на решетки са $|m| = 2019$ или $|n| = 2019$ зовемо *ивичним*. Четири праве $x = \pm 2019$ и $y = \pm 2019$ зовемо *ивицама*. Две тачке на решетки су *суседне* ако је растојање између њих 1.

Зека и Меда играју игру на решетки. Они играју наизменично, при чему Зека почиње игру постављањем жетона на тачку $(0, 0)$, а Меда повлачи први потез.

(1°) У сваком свом потезу Меда уклања највише две ивичне тачке са сваке од ивица.

(2°) У сваком свом потезу Зека прави тачно три *корака*. Корак се састоји од померања жетона на једну од суседних тачака које нису уклоњене.

Игра се завршава Зекином победом чим Зека постави жетон на неку ивичну тачку која још није уклоњена. Да ли Зека има победничку стратегију?

Време за рад: 4 сата и 30 минута.
Сваки задатак вреди 10 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА УЧЕШЋЕ НА МЕЂУНАРОДНОЈ МАТЕМАТИЧКОЈ ОЛИМПИЈАДИ

26. мај 2019.

Први дан

1. a) Дато је 2019 различитих целих бројева који немају непарне просте делиоце мање од 37. Доказати да постоје два од датих бројева чији збир нема непаран прост делилац мањи од 37.

b) Да ли тврђење остаје тачно ако се 37 (на оба места) замени са 38?

2. Дат је $\triangle ABC$, $AC \neq BC$, и тачка D унутар њега таква да је испуњено $\measuredangle ADB = 90^\circ + \frac{1}{2}\measuredangle ACB$. Тангенте у тачки C на кружнице описане око $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$ секу праве AB и AD, редом, у тачкама P и Q. Доказати да права PQ полови $\measuredangle BPC$.

3. Дат је природан број n и кружница обима n. На кружници су, у смеру казаљке на сату, записани бројеви $0, 1, \dots, n-1$, у овом редоследу и на једнаком одстојању. Сваки број је обојен црвеном или плавом бојом, и постоји бар један ненула број од сваке боје. Познато је да постоји скуп $S \subsetneq \{0, 1, \dots, n-1\}$, $|S| \geqslant 2$, за који важи: ако је (x, y) кружни лук чији су крајеви различите боје и чија дужина је у S (где лук посматрамо од x до y у смеру казаљке на сату), тада $y \in S$. Доказати да постоји делилац d броја n, различит од 1 и n, за који важи: ако је (x, y) кружни лук чији су крајеви различите боје и чија је дужина дељива са d, тада су и x и y дељиви са d.

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА УЧЕШЋЕ НА МЕЂУНАРОДНОЈ МАТЕМАТИЧКОЈ ОЛИМПИЈАДИ

27. мај 2019.

Други дан

4. Богати трговац има три расе коња у својим шталама, и то тачно b_j коња расе j (за $j = 1, 2, 3$). Он жели да подели наследство својим трима синовима. Зна се да би син i за коња расе j $(i, j = 1, 2, 3)$ платио тачно a_{ij} златника, при чему за свака два различита i и j важи $a_{ii} > a_{ij}$ и $a_{jj} > a_{ij}$. Доказати да постоји природан број n такав да, кад год важи $\min\{b_1, b_2, b_3\} > n$, трговац може расподелити своје коње својим синовима на такав начин да сваки син, вреднујући и своје и туђе коње по сопственим критеријумима, сматра да управо његови коњи највише вреде.

5. У скупу ненегативних целих бројева решити једначину

$$2^x = 5^y + 3.$$

6. Назовимо *фигурицом* полиедар са $26^{5^{2019}}$ страна. На свакој страни фигурице је уписан по један број. Приликом бацања две фигурице у ваздух (са не нужно истим скупом уписаних бројева) побеђује она која падне на страну на којој је већи број; уколико се добију исти бројеви, бацање се понавља све док се не добију различити бројеви. Кажемо да једна фигурица *надвладава* другу уколико има већу вероватноћу победе приликом бацања (могуће је и да ниједна од две фигурице не надвладава другу). Сматрати да свака фигурица има исту вероватноћу падања на сваку своју страну.

Милисав и Милојка имају по једну фигурицу без уписаних бројева. Прво Милисав уписује $26^{5^{2019}}$ (не нужно различитих) природних бројева на своју фигурицу (на сваку страну по један), при чему збир уписаних бројева износи $27^{5^{2019}}$. Видевши његову фигурицу, Милојка потом на своју фигурицу уписује (могуће неке друге) природне бројеве чији је збир такође $27^{5^{2019}}$. Може ли она то увек учинити на такав начин да добије фигурицу која надвладава Милисављеву?

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

Уторак, 16. јул 2019.

1. задатак. Нека је $\mathbb{Z}$ скуп целих бројева. Одредити све функције $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ такве да за све целе бројеве a и b важи

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).$$

2. задатак. Тачка A_1 изабрана је на страници BC, а тачка B_1 на страници AC троугла ABC. Тачке P и Q изабране су на дужима AA_1 и BB_1, редом, тако да је права PQ паралелна са правом AB. Нека је P_1 тачка на правој PB_1 таква да је B_1 између тачака P и P_1 и да важи $\sphericalangle PP_1C = \sphericalangle BAC$. Слично, нека је Q_1 тачка на правој QA_1 таква да је A_1 између тачака Q и Q_1 и да важи $\sphericalangle CQ_1Q = \sphericalangle CBA$.

Доказати да су тачке P, Q, P_1 и Q_1 концикличне.

3. задатак. Једна друштвена мрежа има 2019 корисника од којих су неки парови пријатељи. При томе, ако је A пријатељ корисника B, тада је и B пријатељ корисника A. Једна по једна, промене следећег типа се могу догодити:

> три корисника A, B и C, таква да је A пријатељ и са B и са C, али B и C нису пријатељи, мењају статусе њихових пријатељстава тако да су B и C сада пријатељи, али A више није пријатељ ни са B ни са C; статуси свих осталих пријатељстава се не мењају.

На почетку 1010 корисника има по 1009 пријатеља, а 1009 корисника по 1010 пријатеља. Доказати да постоји низ описаних промена након којих сваки корисник има највише једног пријатеља међу преосталима.

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.

Среда, 17. јул 2019.

4. задатак. Нађи све парове (k, n) природних бројева такве да важи

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4)\cdots(2^n - 2^{n-1}).$$

5. задатак. Банка града Бата издаје новчиће који са једне стране имају ознаку H, а са друге ознаку T. Хари је поређао n оваквих новчића у низ слева на десно. Са овим новчићима он понавља следећу операцију: ако је у низу тачно $k > 0$ новчића који показују H, тада окреће k-ти новчић слева; иначе, сви новчићи показују T и процес се завршава. На пример, ако је $n = 3$ и почетни распоред је THT, Хари врши следећи низ операција $THT \to HHT \to HTT \to TTT$, и процес се завршава након ове три операције.

(а) Доказати да за сваки почетни распоред новчића Хари завршава описани процес након коначно много операција.

(б) За почетни распоред C нека је са $L(C)$ означен број операција које Хари изврши пре него што се процес заврши. На пример, $L(THT) = 3$ и $L(TTT) = 0$. Одредити аритметичку средину бројева $L(C)$ по свих 2^n могућих почетних распореда C.

6. задатак. Нека је I центар уписане кружнице оштроуглог $\triangle ABC$, где је $AB \neq AC$. Уписана кружница ω троугла ABC додирује странице BC, CA и AB у тачкама D, E и F, редом. Права која садржи D и нормална је на EF сече кружницу ω поново у тачки R. Права AR сече кружницу ω поново у тачки P. Кружнице описане око троуглова PCE и PBF секу се поново у тачки Q.

Доказати да се праве DI и PQ секу на правој која садржи A и нормална је на AI.