ДРУШТВО МАТЕМАТИЧА СРБИЈЕ

АКРЕДИТОВАНИ СЕМИНАР:

345

ДРЖАВНИ СЕМИНАР О НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ И РАЧУНАРСТВА ДРУШТВА МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Компетенција: К1

Приоритети: 3

ТЕМА:

ГРАФИЦИ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦИЈА И ЊИХОВЕ ПРИМЕНЕ

РЕАЛИЗАТОРИ СЕМИНАРА:

др МИЛАН ЖИВАНОВИЋ

ДРАГОЉУБ ЂОРЂЕВИЋ

МИЛОСАВ МИЛЕНКОВИЋ

БЕОГРАД,

08–09. 02. 2020.

ГРАФИЦИ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦИЈА

И ЊИХОВЕ ПРИМЕНЕ

УВОД

У средњој школи се, од реалних функција реалне промењиве, углавном обрађују оне које обично зовемо елементарним. Подсетимо се њихове дефиниције.

Дефиниција 1^0 Константе, степене, експоненцијалне, логаритамске, тригонометријске и инверзне тригонометријске функције су елементарне функције (наведене функције још зовемо основним елементарним функцијама).

2^0 Збир, разлика, производ, количник и композиција двеју елементарних функција (у случајевима када су дефинисани) јесу елементарне функције.

3^0 Све елементарне функције се добијају коначном применом претходних правила.

Дакле, елементарне функције су, на пример, полиноми и рационалне функције, али и функције дате много сложенијим изразима, као што је, на пример,

$$f(x) = e^{\arcsin\sqrt{\frac{\log(x^2+x+1)}{\cos x}}}.$$

Графици основних елементарних функција су стандардни део градива редовне наставе у средњим школама. Међутим, утисак је да се они недовољно користе и да се не инсистира на томе да их ученици добро знају. Уместо тога се непотребно памте разна правила за решавање једначина и неједначина, која се углавном могу „прочитати“ са поменутих графика. На пример, захтева се да се зна да приликом решавања неједначине $\log_{1/2} x < 1$ треба „обрнути“ знак неједнакости јер је основа логаритма мања од 1, уместо да се то закључи „визуелно“, позивајући се на график такве логаритамске функције.

Још мање се користе графици елементарних функција које нису основне. Наравно, графике највећег броја таквих функција није могуће елементарно нацртати, али чак и у случајевима када је то могуће, не показује се ученицима како до њих могу доћи и какве све информације тако могу добити. Скицирање таквих графика се оставља за четврти разред када се до њих долази коришћењем диференцијалног рачуна, што је свакако сувише касно и захтева сувише много нееелементарне технике.

Циљ овог предавања је да се илуструје на који начин се до графика неких елементарних функција може једноставно доћи без коришћења диференцијалног рачуна и како се, затим, такав график може искористити приликом решавања разних проблема. Међу таквим проблемима је и решавање неких типова једначина и неједначина, или бар процењивање броја решења одређених једначина и њихово лоцирање (одређивање интервала у којима се она налазе). Посебно, у случајевима једначина и неједначина у којима се појављују апсолутне вредности и/или параметри, овакав метод може знатно поједноставити извођење коначних закључака.

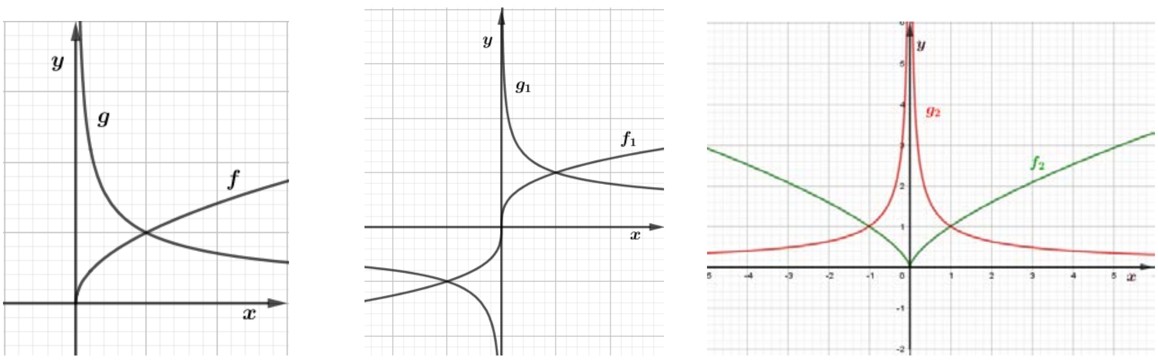
Мада се поменути графици могу скицирати и „ручно“, коришћење савремених софтверских алата, међу којима је свакако најпознатија и најједноставнија GeoGebra, у многоме упрошћава цртање таквих графика и, самим тим, још више истиче значај описаног метода испитивања једначина и неједначина. Наравно, не треба ствари апсолутизовати, па очекивати да се превелики број једначина и неједначина могу графички решити, поготово се најчешће не могу наћи тачне вредности решења, али већ одређивање њиховог броја и интервала у којима се налазе може бити значајна информација. Често је она довољна да се затим, опет обично коришћењем неког једноставног компјутерског програма, та решења приближно одреде са жељеном тачношћу.

ГРАФИЦИ ОСНОВНИХ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦИЈА

Особине **линеарне** $f(x) = ax + b$ и **степене** функције $f(x) = x^{\alpha}$ целобројног изложиоца опште су познате. Ученицима су углавном мање познате особине степене функције рационалног изложиоца $\frac{m}{n}$ $(m \in Z, n \in N)$ па су стога у табели 1 представљена својства те функције у зависности од вредности изложиоца а графици на слици 1.

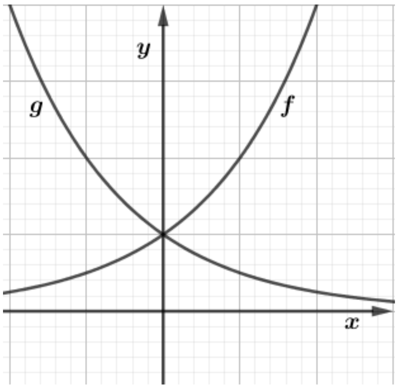
Табела 1

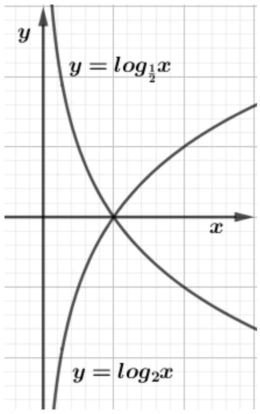
Изложилац	**Домен и кодомен**	**Нуле**	**Знак**	**Монотоност**	**Екстремне вредности**
$m > 0$ $m \in 2N$ $n \in 2N + 1$	$f: R \to [0, +\infty)$	$x = 0$	$f > 0, x \in R\backslash\{0\}$	$f \uparrow, x \in (0, +\infty)$ $f \downarrow, x \in (-\infty, 0)$	$x = 0$
$m < 0$ $m \in 2N$ $n \in 2N + 1$	$f: R\backslash\{0\}$ $\to (0, +\infty)$	нема	$f > 0, x \in R\backslash\{0\}$	$f \downarrow, x \in (0, +\infty)$ $f \uparrow, x \in (-\infty, 0)$	нема
$m > 0$ $m \in 2N + 1$ $n \in 2N$	$f: [0, +\infty)$ $\to [0, +\infty)$	$x = 0$	$f > 0,$ $x \in (0, +\infty)$	$f \uparrow, x \in (0, +\infty)$	$x = 0$
$m < 0$ $m \in 2N + 1$ $n \in 2N$	$f: (0, +\infty)$ $\to (0, +\infty)$	нема	$f > 0,$ $x \in (0, +\infty)$	$f \downarrow, x \in (0, +\infty)$	нема
$m > 0$ $m \in 2N + 1$ $n \in 2N + 1$	$f: R \to R$	$x = 0$	$f > 0, x \in (0, +\infty)$ $f < 0, x \in (-\infty, 0)$	$f \uparrow, x \in R$	нема
$m < 0$ $m \in 2N + 1$ $n \in 2N + 1$	$f: R\backslash\{0\}$ $\to R\backslash\{0\}$	нема	$f > 0, x \in (0, +\infty)$ $f < 0, x \in (-\infty, 0)$	$f \downarrow,$ $x \in (0, +\infty)$ $f \downarrow,$ $x \in (-\infty, 0)$	нема



Слика 1. Графици степене функције рационалног изложиоца $f(x) = x^{1/2}$, $g(x) = x^{-1/2}$, $f_1(x) = x^{1/3}$, $g_1(x) = x^{-1/3}$, $f_2(x) = x^{2/3}$ и $g_2(x) = x^{-2/3}$

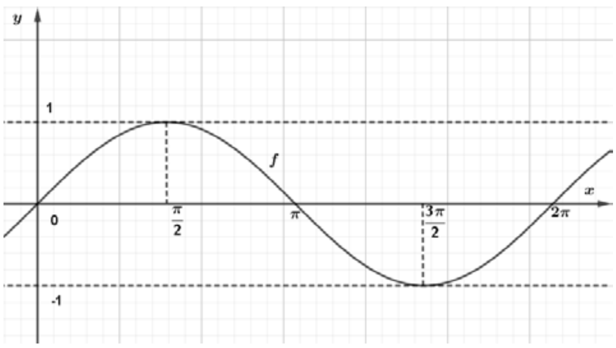
Експоненцијална функција је функција у којој се независно промењива јавља у изложиоцу (експоненту) степена. Аналитички је задајемо формулом $y = a^x$ при чему је $a > 0$ и $a \neq 1$. Њој је инверзна логаритамска функција $y = \log_a x$ ($a > 0$ и $a \neq 1$). Особине ових функција се могу „прочитати“ са графика који су представљени на слици 2.



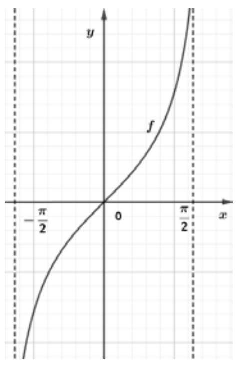


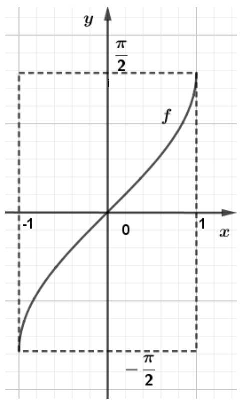
Слика 2. Примери графика експоненцијалних функција $f(x) = 2^x$ и $g(x) = (1/2)^x$ и одговарајућих инверзних логаритамских

На сликама 3–6 представљени су графици неких основних **тригонометријских** и њихових **инверзних** функција које се најчешће користе. Читаоцу се препушта да са графика „прочита“ својства тих функција.

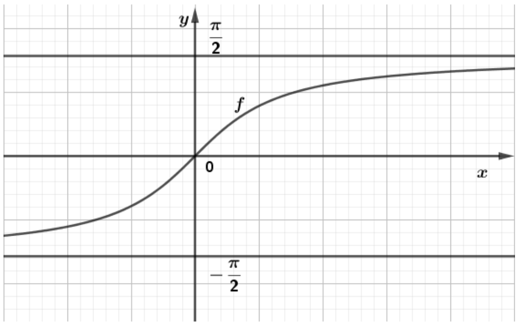


Слика 3. График функције $f(x) = \sin x$





Слика 4. Функција $f(x) = tg\ x$ Слика 5. Функција $f(x) = arcsin\, x$



Слика 6. График функције $f(x) = arctg\ x$

ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ГРАФИКА ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦИЈА

Показаћемо сада како се скицира график и одређују својства функције $y = Cf(ax+b)+D$, $(a, b, C, D$ реални параметри и a, C различити од 0) у зависности од својстава основне елементарне функције $y = f(x)$ и датих коефицијената, без коришћења диференијалног рачуна. Биће размотрени и неки случајеви оваквих функција у којима учествују и апсолутне вредности. У том поступку користићемо трансформације померања, рефлексије, сажимања или истезања графика, или делова графика, полазне функције и функција које се у том поступку појављују. У табели 2 дат је списак тих трансформација.

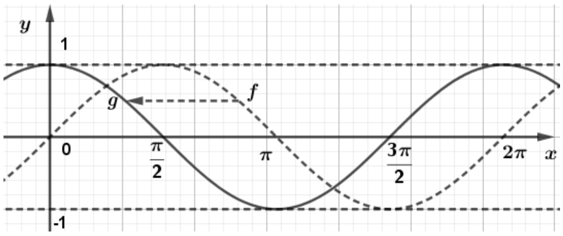
Табела 2. Списак трансформација графика функције $y = f(x)$

Функција	**Трансформација коју треба извршити на графику функције $y = f(x)$**
$f(x) + a, a \neq 0$	Вертикално померање графика функције $y = f(x)$ за вредност $\lvert a\rvert$, навише ако је $a > 0$, односно наниже ако је $a < 0$.
$f(x - a), a \neq 0$	Хоризонтално померање графика $y = f(x)$ за вредност $\lvert a\rvert$, удесно ако је $a > 0$, односно улево ако је $a < 0$.
$kf(x)$, $k > 0 \wedge k \neq 1$	Истезање графика функције $y = f(x)$ дуж y-осе k пута, ако је $k > 1$, односно сажимање ако је $k < 1$
$f(kx)$, $k > 0 \wedge k \neq 1$	Сажимање графика функције $y = f(x)$ дуж x-осе k пута, ако је $k > 1$, односно истезање ако је $k < 1$
$-f(x)$	Осна рефлексија графика у односу на x-осу
$f(-x)$	Осна рефлексија графика у односу на y-осу
$\lvert f(x)\rvert$	Осна рефлексија у односу на x-осу делова графика који се налазе у полуравни $y < 0$ (испод x-осе)задржавајући делове графика који су у полуравни $y \geq 0$.
$f(\lvert x\rvert)$	Замена дела графика који се налази у отвореној полуравни $x < 0$ (лево од y-осе) симетричном сликом у односу на y-осу дела графика из полуравни $x \geq 0$, задржавајући и тај део графика.

До графика задате функције $y = Cf(ax+b)+D$ долазимо преко низа графика функција полазећи од одговарајуће основне елементарне функције: $f(x) \rightarrow f\left(x+\frac{b}{a}\right) \rightarrow f\left(a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right) \equiv f(ax+b) \rightarrow Cf(ax+b) \rightarrow Cf(ax+b)+D$.

Применом ових трансформација могу се добити и графици основних елементарних функција: $y = \cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, $y = ctg\ x = tg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, $y =$

$arccos\, x = \frac{\pi}{2} - arcsin\, x,\;\; y = arcctg\, x = \frac{\pi}{2} - arctgx.$ На слици 7. представљена је трансформација графика функције $y = \sin x$ у график функције $y = \cos x$.



Слика 7. Транслација графика функције $f(x) = \sin x$ у график функције $g(x) = \cos x = \sin(x + \pi/2)$

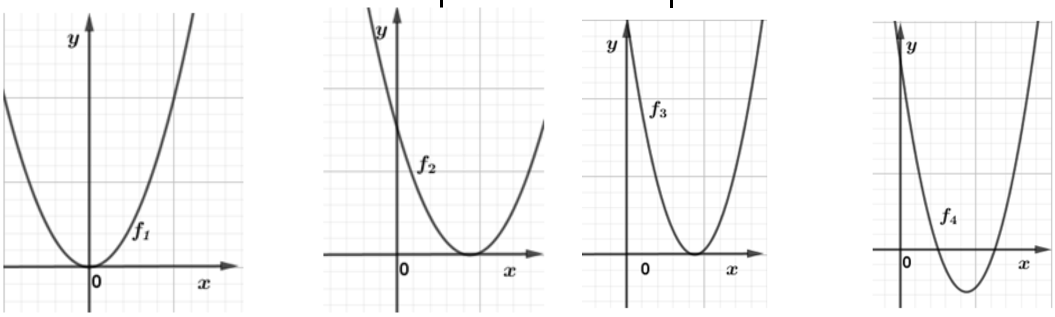
ПРИМЕРИ ГРАФИКА ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦИЈА

Сада ћемо конструисати графике неких елементарних функција применом трансформација основних елементарних функција описаних у претходном поглављу корак по корак.

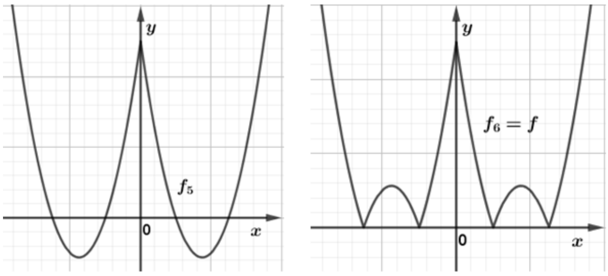
1. $y = |2x^2 - 7|x| + 5|$

Посматрајмо функцију $f(x) = |2x^2 - 7|x| + 5| = \left|2\left(|x| - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}\right|$. Конструишимо график ове функције корак по корак полазећи од у њеној класи припадајуће елементарне функције:

$$x^2 \to \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 \to 2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 \to 2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{9}{8} \to 2\left(|x| - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{9}{8} \to$$
$$y = \left|2\left(|x| - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}\right|$$



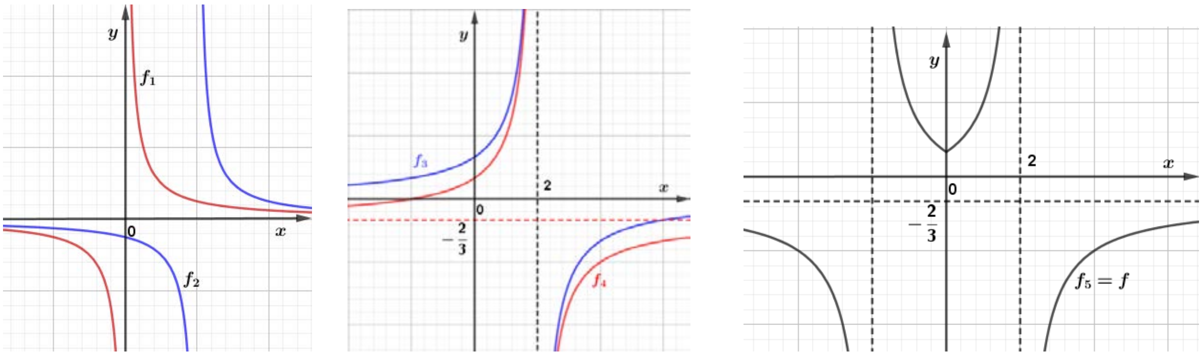
Слика 8. Графици функција $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = (x - 7/4)^2$, $f_3(x) = 2(x - 7/4)^2$ и $f_4(x) = 2(x - 7/4)^2 - 9/8$



Слика 9. Графици функција $f_5(x) = 2(|x| - 7/4)^2 - \frac{9}{8}$ и $f_6(x) = |2(|x| - 7/4)^2 - 9/8|$

2. $y = \frac{2|x|+4}{6-3|x|}$

Дату функцију можемо написати у облику $y = -\frac{2}{3} - \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{|x|-2}$. До тог облика можемо доћи преко низа функција: $\frac{1}{x} \to \frac{1}{x-2} \to -\frac{8}{3} \cdot \frac{1}{x-2} \to -\frac{2}{3} - \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{x-2} \to -\frac{2}{3} - \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{|x|-2}$.

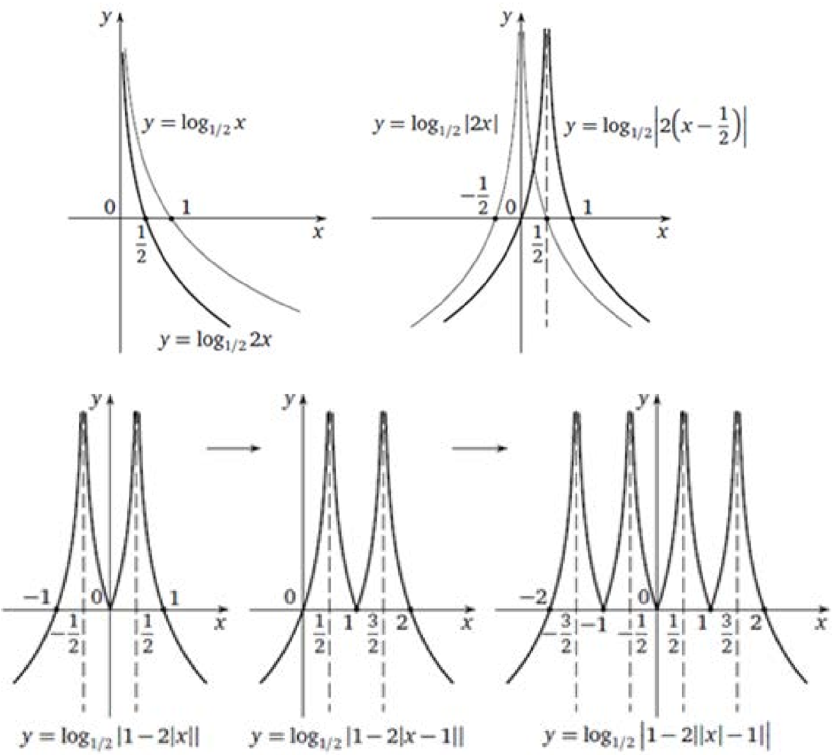


Слика 10. Графици функција $f_1(x) = 1/x$, $f_2(x) = 1/(x-2)$, $f_3(x) = (-\frac{8}{3})(x-2)$, $f_4(x) = (-\frac{2}{3}) - (\frac{8}{3})(x-2)$ и $f_5(x) = (-\frac{2}{3}) - (\frac{8}{3})(|x|-2)$

3. $y = \log_{1/2}|1 - 2||x| - 1||$

График дате функције добијамо помоћу низа функција

$$\log_{1/2} x \to \log_{1/2} 2x \to \log_{1/2}|2x| \to \log_{1/2}|2(x-1/2)| \to \log_{1/2}|1-2|x-1|| \to \log_{1/2}|1-2||x|-1||.$$

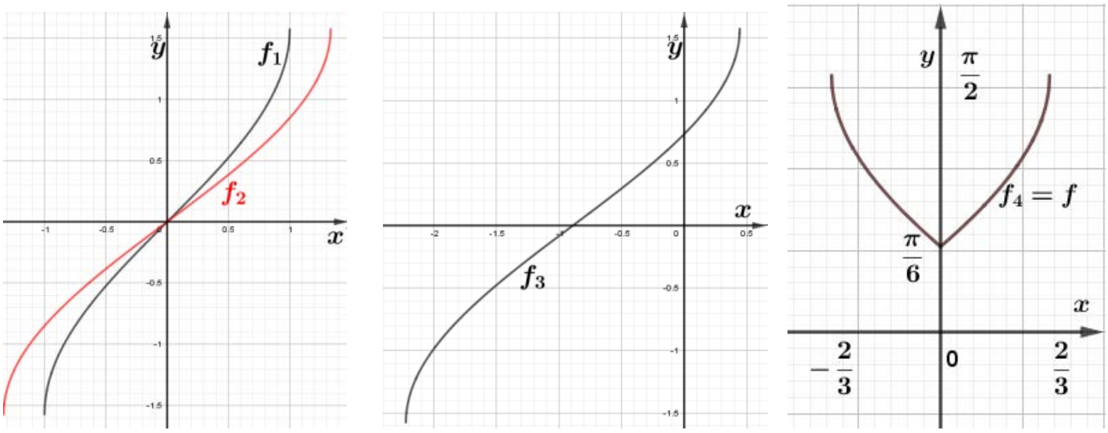


Слика 11. Низ графика функција за конструкцију графика $y = \log_{1/2}|1-2||x|-1||$

4. $y = \arcsin\left(\dfrac{2+3|x|}{4}\right)$

До дате функције долази се преко низа функција:

$$\arcsin x \to \arcsin\frac{3}{4}x \to \arcsin\frac{3}{4}\left(x+\frac{2}{3}\right) \to \arcsin\frac{3}{4}\left(|x|+\frac{2}{3}\right) \equiv \arcsin\left(\frac{2+3|x|}{4}\right)$$



Слика 12. График функције $y = \arcsin\left(\dfrac{2+3|x|}{4}\right)$

ПРИМЕНА ГРАФИКА ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦИЈА НА РЕШАВАЊЕ ЈЕДНАЧИНА И НЕЈЕДНАЧИНА

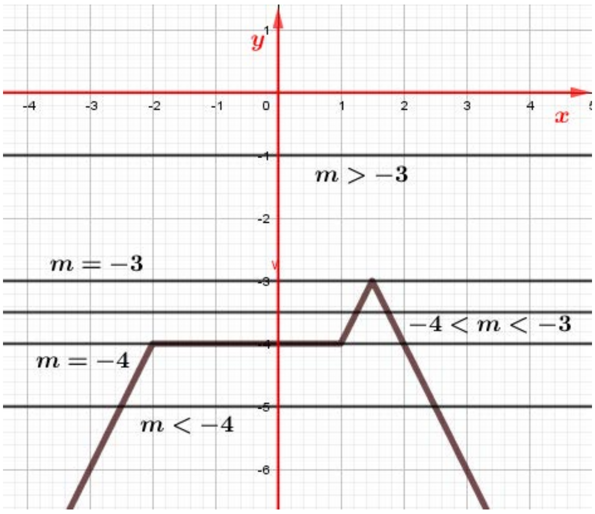
Конструкција графика елементарних функција описана у претходном одељку може се ефикасно искористити за графичко решавање једначина и неједначина, посебно оних у којима фигуришу апсолутне вредности и/или параметри. Размотримо следеће примере.

5. Решити:

(а) једначину $|x-1|-|x+2|-|2x-3|=m$,

(б) неједначину $|x-1|-|x+2|-|2x-3| \geq m$, где је m реалан параметар.

За конструкцију графика функције $y=|x-1|-|x+2|-|2x-3|$ довољно је одредити њене вредности $y(-2)=-4$, $y(1)=-4$ и $y(3/2)=-3$, као и да је $y=2x$ за $x<-2$, односно $y=-2x$ за $x \geq \frac{3}{2}$(график је приказан на слици 13). Сада се, посматрајући положаје праве $y=m$ за разне вредности параметра m, лако налази следеће:



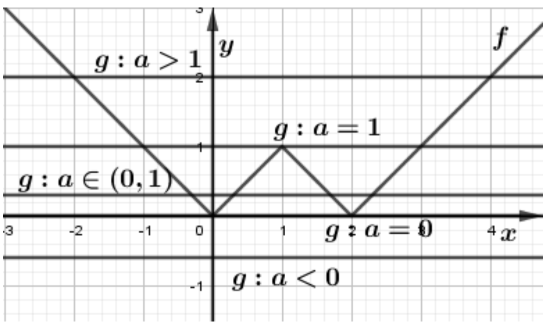
Слика 13. График функције $f(x) = |x-1| - |x+2| - |2x-3|$ и различити положаји праве $y = m$

(а) једначина нема решења за $m > -3$; за $m = -3$ решење је $x_1 = 3/2$; за $-4 < m < -3$ решења су $x_1 = (m+6)/2$ и $x_2 = -m/2$; за $m = -4$ решења су сви $x \in [-2,1]$, као и $x_1 = 2$; за $m < -4$ решења су $x_1 = m/2$ и $x_2 = -m/2$.

(б) неједначина нема решења за $m > -3$; за $m = -3$ решење је $x_1 = 3/2$; за $-4 < m < -3$ решења су сви $x \in \left[\frac{m+6}{2}, -\frac{m}{2}\right]$; за $m \leq -4$ решења су $x \in \left[\frac{m}{2}, -\frac{m}{2}\right]$.

6. Одредити број решења једначине $|1 - |1-x|| = a$ у зависности од реалног параметра a.

Овај задатак се, наравно, може решити и ачгебарски, али ако се, као у тексту задатка, захтева само одређивање броја решења, графичка метода је много бржа. Посматрамо графике ф-ја $f(x) = \big|1 - |1-x|\big|$ и $g(x) = a$. График прве добијамо преко низа графика функција $x \to -x \to -x+1 \to |1-x| \to -|1-x| \to -|1-x|+1 \to \big|1-|1-x|\big|$, док је график друге хоризонтална права (слика 14).



Слика 14. Карактеристични положаји графика функција f и g за различити број решења једначине

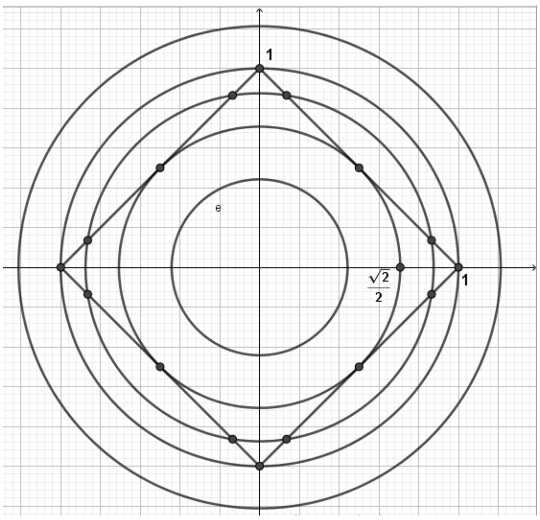
На слици 14 представљено је пет карактеристичних положаја графика функције g у односу на график функције f. Закључујемо да:

- Једначина нема решења за $a < 0$,
- Једначина има два решења за $a \in (1, \infty) \cup \{0\}$,

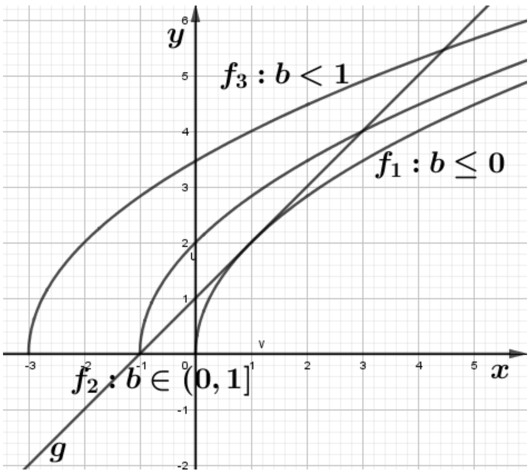
- Једначина има четири решења за $a \in (0,1)$,
- Једначина има три решења за $a = 1$.

7. У зависности од реалног параметра a одредити колико решења има систем једначина: $|x| + |y| = 1 \wedge x^2 + y^2 = a^2$.

Прва једначина представља квадрат са теменима на координатним осама у вредностима 1 и -1, а друга кружницу са центром у координатном почетку и полупречником a (Слика 15). Са слике закључујемо да је број решења: 0 ако је $|a| < \frac{\sqrt{2}}{2} \vee |a| > 1$; 4 ако је $|a| = \frac{\sqrt{2}}{2} \vee |a| = 1$ и 8 ако је $\frac{\sqrt{2}}{2} < |a| < 1$.



Слика 15.



Слика 16.

8. Решити по x неједначину $2\sqrt{x+b} > x + 1,\ b \in R$.

На слици 16. посматрамо разне положаје полу-параболе $f(x) = 2\sqrt{x+b}$ у односу на праву $g(x) = x + 1$. Пресечне тачке графика, ако постоје, за апсцису имају вредности које су решења једначине $2\sqrt{x+b} = x + 1$. За $b = 0$ решење уочене једначине $x = 1$ не задовољава неједначину. Ако је $0 < b \leq 1$, једначина има два решења $x_{1,2} = 1 \pm 2\sqrt{b}$ која представљају границе отвореног интервала за решења неједначине. Ако је $b > 1$ онда је једино решење једначине $x_1 = 1 + 2\sqrt{b}$, па се график полу-параболе налази изнад праве g између свог темена $(-b, 0)$ и пресечне тачке $(1 + 2\sqrt{b}, 2 + 2\sqrt{b}\ )$ са том правом.

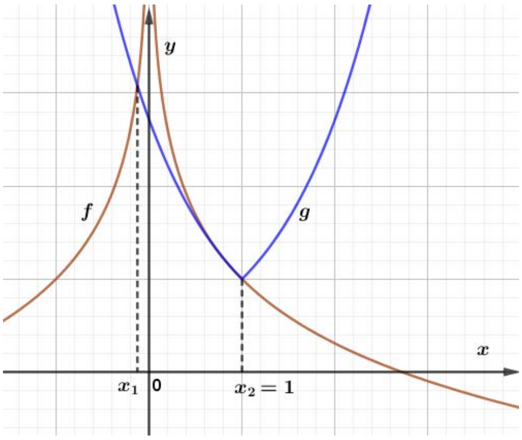
Закључујемо да:

1) За $b \leq 0$ неједначина нема рашења,
2) За $0 < b \leq 1$ је $x \in (1 - 2\sqrt{b}, 1 + 2\sqrt{b})$,

3) За $b > 1$ је $x \in (-b, 1 + 2\sqrt{b})$.

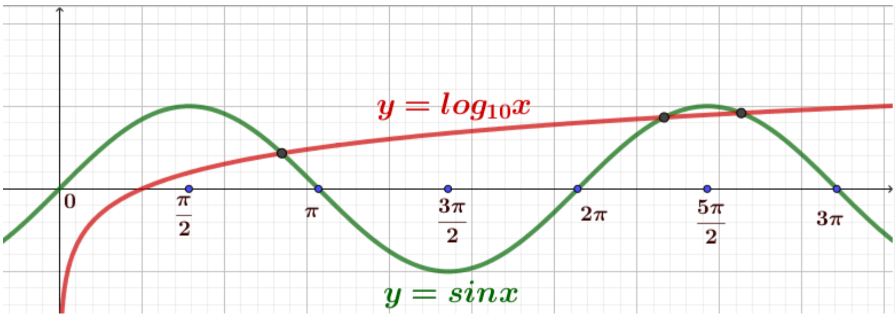
9. Одредити целобројна решења неједначине $1 - \ln\,|x| \geq e^{|x-1|}$.

Неједначина је дефинисана за све реалне бројеве изузев за $x = 0$. Означимо $f(x) = 1 - \ln|x|$ и $g(x) = e^{|x-1|}$ и конструишимо графике тих функција (слика 17). На основу слике закључујемо да је решење неједначине одређено са $x \in [x_1, 0) \cup (0,1]$. Како је $x_1 \in (-1,0)$, имамо да је $x_2 = 1$ једино целобројно решење неједначине.



Слика 17.

10. Одредити број решења једначине $\log_{10} x = \sin x$ и интервале у којима се она налазе.



Слика 18.

Због $\log_{10}\frac{\pi}{2} < 1 = \sin\frac{\pi}{2}$ и $\log_{10}\pi > 0 = \sin\pi$ (и због монотоније и непрекидности функција $y = \log_{10} x$ и $y = \sin x$) постоји тачно једно решење једначине x_1 у интервалу $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Из сличних разлога постоје и решења $x_2 \in \left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right)$ и $x_3 \in \left(\frac{5\pi}{2}, 3\pi\right)$. Више решења нема јер је $\log_{10} x > 1$ за $x > 10$. Графици су приказани на слици 18.

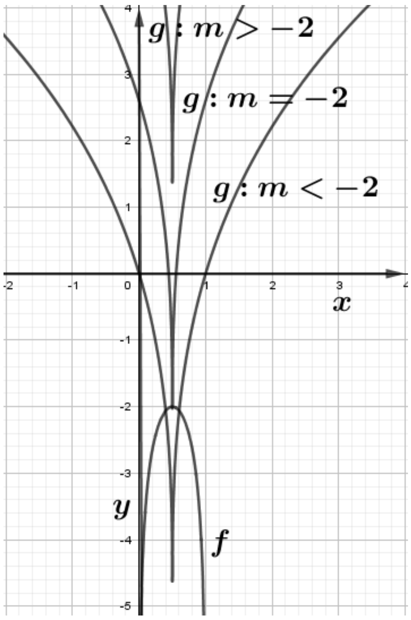
11. Одредити број решења једначине $\log_2(x - x^2) = 5\sqrt[3]{|2x - 1|} + m$ у зависности од реалног параметра m.

Домен функције $f(x) = \log_2(x - x^2)$ је интервал $(0,1)$ а добија се из услова $x - x^2 > 0$. Граничне вредности на рубовима домена су $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = \lim\limits_{x\to1-0} f(x) = -\infty$. На основу тога закључујемо да функција има максимум, а достиже га када и квадратни израз у аргументу логаритма због монотоности логаритамске функције. Дакле, тај максимум је $f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2 \frac{1}{4} = -2$. Закључујемо и да је график функције симетричан у односу на праву $x = \frac{1}{2}$. Функција $g(x) = 5\sqrt[3]{|2x-1|} + m$ дефинисана је за свако $x \in R$. Због $|2x-1| \geq 0$ је $g(x) \geq m$. Минимум $g_{min} = m$ функција има за $|2x-1| = 0$, тј. $x = \frac{1}{2}$. График функције $g(x)$ је такође симетричан у односу на праву $x = 1/2$. На слици 19. представљена су три карактеристична положаја графика функције $g(x)$ у односу на график функције $f(x)$. На основу тога закључујемо да дата једначина:

1) нема решења за $m > -2$,

2) има једно решење $x_1 = 1/2$ за $m = -2$,

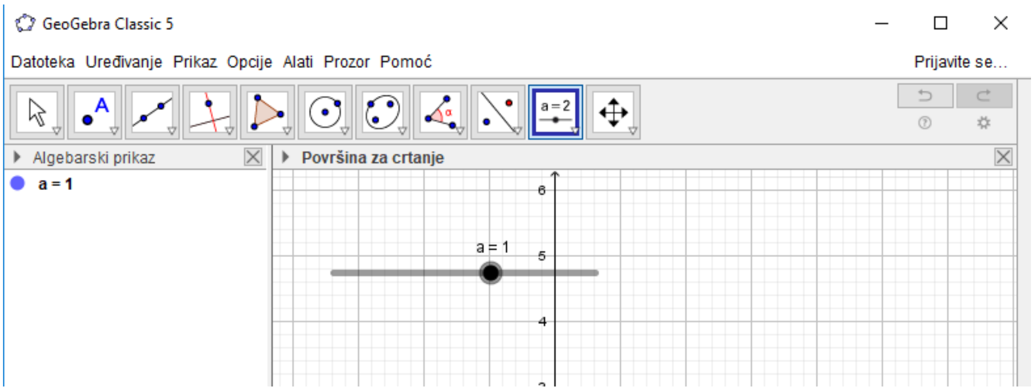
3) има два решења x_2, x_3 за $m < -2$, при чему су тачке x_2, x_3 симетричне у односу на тачку $x = \frac{1}{2}$.



Слика 19

НАПОМЕНА О ПРИМЕНИ СОФТВЕРА ГЕОГЕБРА

Поступак графичког решавања претходних задатака знатно је олакшан применом компјутера и савремених математичких апликација, међу којима се у последње време посебно истиче GeoGebra. Коришћењем GeoGebre принцип очигледности у настави се значајно реализује при решавању једначина и неједначина са параметрима. Пре конструкције графика за дати параметар се конструише „клизач“ (слика 20) на коме се вредности параметра могу подесити према задатом интервалу у конкретном проблему. Када се уцртају графици функција чија се релација испитује, променом вредности параметра на „клизачу“ уочавају се динамичка својства графика функције са параметром, те се непосредно емпиријски могу уочити карактеристични положаји у односу на график друге функције.



Слика 20. Радна површина програма Геогебра са активном командом клизача

Геогебра се може искористити и за увежбавање методичког приступа конструкције графика елементарне функције $f(x) = Cf_1(ax + b) + D$ преко низа функција. Најпре се за сваки коефицијент посебно конструишу „клизачи“ са задатим дозвољеним интервалима вредности, а затим задају редом функције f_1 и f. Мењањем вредности „клизача“ за конкретни коефицијент можемо се практично уверити у врсту трансформације графика у зависности од тог изабраног коефицијента. Примери ових графика уз употребу и апсолутних вредности могу се погледати у [14].

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Без коришћења диференцијалног рачуна скицирати графике следећих функција или одредити скуп тачака дефинисан једначином.

а) $f(x) = 2|x-1| + |x-3|$ *б)* $f(x) = |x-2| + |x+5| - |x| - 3$

в) $f(x) = 1 - ||x-1| - 3|$ *г)* $f(x) = |x^2 - 2|x| - 8|$

д) $|y| = x^2 - x$ *ђ)* $y = \left|\dfrac{2|x|-4}{6-3|x|}\right|$

е) $f(x) = |2^{x+1} - 2| - 1$ *ж)* $y = \left|2^{-|x|} - \dfrac{1}{2}\right|$

з) $y = |3^{|x-1|} - 3|$ *и)* $f(x) = |ln|x-1||$

ј) $y = (sin\, x)^2$ *к)* $y = A\, sin\, \omega x + B\, cos\, \omega x$

л) $f(x) = \left|\dfrac{3}{4} cos\, x - \dfrac{1}{2}\right|$ *љ)* $y = log_2 |x - |x-1||$

м) $y = arctg|1 - 2|x||$

2. Решити следеће једначине и неједначине:

а) $\left|\sqrt{x^2 - 2x + 1} - 3\right| = 1$ *б)* $|2 - |1 - |x||| = 1$

в) $|x-1| - 2|x-2| + 3|x-3| = 4$ *г)* $|x^2 - 3|x| + 1| = 1$

д) $|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3$ *ђ)* $\sqrt{1 + 2x + x^2} + \sqrt{x^2 - 8x + 16} > 7$

е) $10^{|\sin x|} > 10^{|\cos x|}$

3. У зависности од $a \in R$ одредити број решења једначине:

а) $\left|x^2 - 4|x| + 3\right| = a$ *б)* $a \sin x = \ln|x|$

в) $|x-2| + |x+5| - |x| - 3 = a$

4. Одредити збир целобројних решења неједначине:

а) $\arcsin|x-1| \geq |\sin x|$ *б)* $|x| - 1 < e^{-|x-1|}$

5. Одредити број решења једначине или неједначине

а) $\left|\sqrt{x^2 - 2x + 1} - 3\right| = 1$ *б)* $x = 4\pi \cdot sin\, x$,

в) $|\sin x| + |\cos x| \leq 1,\ \ x \in [-\pi, \pi]$ *г)* $x^2 - cos\, x = 0$

д) $x^2 - 2x - \log_2|1-x| = 3$ *ђ)* $3^{|x|} \cdot \left|2 - |x|\right| = 1$

6. Решити систем једначина или неједначина

а) $|x| + |y| = 1, y - x = k\, , k \in R$ *б)* $|x+y| = 1 \wedge |x| + |y| = 1$

в) $|x^2 + 5x| < 6 \wedge |x+1| \leq 1$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А. (2017): *Математический анализ в задачах и упражнениях*, *Том 1 Дифференциальное и интегральное исчисление*, МЦНМО, Москва.

[2] Георгијевић Д., Обрадовић М. (2000): Математископ 4; "Математископ", Београд.

[3] Друштво математичара Србије: Настава математике; 1992/1, 1993/2.

[4] Друштво математичара Србије (2003): Материјал са семинара о функцијама; Београд.

[5] Дугошија Ђ., Ивановић Ж.(2006): Тригонометрија; "Круг", Београд.

[6] Живановић М. (2019): *Трансформације графика елементарних функција*, Настава математике 64 (2), 78-92.

[7] Ивановић Ж., Огњановић С. (1999): *Математика 2, Збирка решених задатака и тестова за II разред гимназија и техничких школа*, 8. издање, "Круг", Београд.

[8] Икодиновић Н.(2013): Математика 1; "Клет", Београд.

[9] Каделбург З., Мићић В., Огњановић С. (2017): *Анализа са алгебром 2, Уџбеник са збирком задатака за 2. разред Математичке гимназије*, 8. издање, "Круг", Београд

[10] Математочки факултет: *Задаци са писмених испита из предмета Методика наставе математике Б*, Београд.

[12] Милин Л., Ивановић Ж. (1984): *Збирка решених задатака из тригонометрије са задацима за такмичења и пријемне испите на факултетима*, "Научна књига", Београд.

[13] Društvo matematičara i fizičara Hrvatske: Matematičko-fizički list br. 120/1979.

[14] Vene T. B. (2011): *Zbirka rešenih zadataka iz matematike 2*, 35. izdanje, Zavod za udžbenike, Beograd

[15] Živanović M. (2019): *Grafici elementarnih funkcija*, Geogebra Classroom Resource, https://www.geogebra.org/m/zz4rxkh7, 04. 08. 2019