ДРЖАВНИ СЕМИНАР
ДРУШТВА МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ 2020

Жива математика
Приповедање математике и интерактивне радионице као метод у настави и популаризацији математике

проф. др Душко Јојић, проф. др Раде Живаљевић

Улога предавача, наставника математике, писца уџбеника у савременој школи је другачија и захтева прилагођавање и редефинисање. Wikipedia, Facebook, MatxOverflow, YouTube, и многе друге (интерактивне) базе, блогови, подкасти допуштају и самообучавање и појављују се активно у троуглу ученик-наставник-интернет.
Вероватно све што се лако може разбити на фрагменте, релативно независне модуле, и што се лако уобличује у математичке интерактивне тестове, одлази једним делом на интернет мрежу и постаје део самосталног обучавања и вежбања. Да ли то значи да је не тако далека будућност образовања школа без наставника или још радикалније, класична школа као институција нестаје и целокупно учење се пребацује на интернет, видети нпр. https://www.diygenius.com/unschooling-is-21st-century-education/ . Не верујемо у овакав развој догађаја. Ипак остаје питање каква је основна улога наставника математике и како приступити новим генерацијама ученика који одрастају у свету нових технологија.

Према америчком математичару Роберту Грајсту (Robert Ghrist) оно што у релацији наставник-ученик остаје неизмењено и чак добија на значају је потреба за математичком причом (mathematical storytelling) са заплетом и занимљивим ликовима (story with drama and characters).

Чланак једног од аутора http://elib.mi.sanu.ac.rs/files/journals/tm/39/tmn39p64-73.pdf (The Teaching of Mathematics, 2017, Vol. XX, No. 2, pp. 64–73) примерима илуструје могућности оваквог приступа настави математике.

У првом делу планирамо да обрадимо неколико конкретних тема корисних за свакодневну наставу (1) Нестандардни и такмичарски задаци у редовној настави – изазов и мотив за ученике. (2) Колико је потребно (довољно) да наставник буде строг у дефиницији новог математичког појма. (3) Употреба уџбеника и остале литературе. (4) Теорија графова као део редовне наставе или припреме за такмичење, и др.

У другом делу покушаћемо да примерима прича са математичким садржајем, кроз активну интеракцију са слушаоцима, укажемо на врлине „живе математике“.
Верујемо да многи наставници увелико користе причу и „драму“ као метод и надамо се да ће неки поделити са нама своја искуства.

„Жива математика“ (из наслова теме) је име групе (Р. Живаљевић, Математички институт САНУ, 2010) која се бави наставом и популаризацијом математике.

1. КАКО ЗАИНТЕРЕСОВАТИ УЧЕНИКЕ ЗА МАТЕМАТИКУ?

Већина наставника математике се у последње време жали на незаинтересованост ученика за озбиљан рад, или још горе, на потпунуо одсуство жеље ученика да прати и научи и најелементарније градиво. У таквој атмосфери и наставник постаје незадовољан и незаинтересован, а квалитет наставе опада. Уз уважавање свих отежавајућих околоности у данашње време, већина наставника математике је тај посао одабрала (између осталог) и због тога што су упознали сакривене лепоте математике. Уколико наставник учини мали додатни напор, да се неке од лепих и занимљивих прича из математике уклопи у редовну наставу, то може да учини наставу занимљивијом и повећа интерес „обичних ученика“ за математику. Наводимо неколико тема које могу илустровати лепоте математике, а могу их разумети и ученици.

Теме за основну школу:

- Збир првих n природних бројева
- Трикови за лакше рачунање
- Конструкција правог угла (уображени геометар)
- Примена Дирихлеовог принципа
- Како је Талес измерио висину Кеопсове пирамиде
- Постоји бесконачно много простих бројева

Теме за средњу школу:

- О брзини раста геометријског низа (пшеница на шаховској табли)
- Кардинални број бесконачног скупа
- Зенонов парадокс
- Еквивалентност Ојлерове и Кошијеве теореме
- Немогућност трисекције угла и дуплирања коцке
- Непостојање формуле за решење једначине петог степена

Такође, занимљиве приче из историје математике, као и савремене приче из математике, могу заинтересовати ученике за математику:

- Ератостеново мерење обима земље
- Математика у коцкању и картању
- Математика у кодирању и „разбијање“ шифре
- Прича о аксиоматском заснивању геометрије и геометрији Лобачевског
- Доказ Фермаове теореме
- Сукоб Њутна и Лајбица
- Жене у математици

- Такмичења из математике
- Перељман и одбијање награде од милион долара

2. ЗАДАЦИ СА ТАКМИЧЕЊА У РЕДОВНОЈ НАСТАВИ

Такмичења из математике и евентуални успех на такмичењу је један од највећих мотива за додатни рад ученика. Нажалост, данас је скоро па немогуће, да ученици из „обичних“ школа направе изузетан резултат. Ипак, нестандардни задаци, са неочекиваним, једноставним али атрактивним решењем, могу послужити као мотив и за ученике у редовној настави. Зато је понекад добро показати ученицима да постоје задаци другачији од оних којиу се налазе у збиркама и уџбеницима. За решење неких тешких задатака (и са такмичења „вискоког нивоа“) није потребно велико математичко знање него досетка или упорност.

Примери неколико таквих задатака:

- У равни је дато неколико правих тако да не постоје три које пролазе кроз исту тачку. У тачки А која припада тачно једној од тих правих се налази пуж. Пуж се креће дуж праве до прве „раскрснице“, тј. до пресека те праве са неком од осталих правих. На првој раскрсници пуж бира да ли ће скренути лево или десно, једино не сме да настави право!. Да ли је могуће да се пуж врати у тачку А из супротног смера, односно да се пуж у шетњи окрене?

- Дата је табла димензија m x n. Табла је окрњена и недостају јој доње лево и горње десно поље. Да ли је могуће таблу покрити доминама 2 x 1?

  Овај добро познати задатак има много занимљивих уопштења.

- Одредити све реалне бројеве a,b,c,d за које је a+b+c+d=20, а ab+ac+ad+bc+bd+cd=150.

Понекад комисије које састављају задатке нису сасвим коректне (или имају веома високо мишљење о такмичарима). Постоје задатаци чије је решење објављено као научни рад (додуше прије такмичења):

Ево неколико примера таквих задатака:

- Дато је n тачака у равни које нису све на истој правој. Доказати да постоји права која пролази кроз тачно две од датих тачака.
- На турнир у брицу је дошло пет такмичара. Сваки пар такмичара треба да одигра по један меч са сваким другим паром. У току дана један пар може да одигра највише један меч. Колико најмање дана треба да траје турнир?

3. КОЛИКО ЈЕ ДОБРО И ВАЖНО БИТИ СТРОГ И ФОРМАЛАН

Осим неколико основних појмова у математици као што су тачка, права, скуп, број(?), сви остали појмови траже формалну дефиницију. Формално говорећи, дефиниција новог појма у математици је навођење неопходних и довољних карактеристичних особина тог појма. При томе, све особине наведене у дефиницији морају да буду независне и неопходне. Такође, листа наведених особина мора да буде довољна за јасно разумевање и препознавање новог појма.

У предавању нећемо причати о томе шта је дефиниција у логичко-филозофском смислу. Главно питање је колико наставник треба да се придржава строгог математичког формализма у настави. Да ли сваки појам треба заиста формално дефинисати на часу и инсистирати на томе да ученици усвоје такву дефиницију? То је сасвим прихватљиво ако је дефиниција кратка, једноставна и прилагођена узрасту.
Ево неколико примера прихватљивих дефиниција:

- Тетива
- Паралелограм
- Прост број

Шта урадити у случају када се неки појам може објаснити (дефинисати) на више различитих начина? Доказ теореме која гласи *„Следећа тврђења су еквивалентана* ...“ сигурно није занимљив и прихватљив за ученике свих усраста. Једна од идеја је да се таква теорема уситни у неколико задатака које може да реши и наставник (уколико процени да су превише тешки за ученике). Примери појмова који се могу описати на више начина:

- Пречник је тетива која пролази кроз центар/ најдужа тетива
- Тангента
- Паралелограм

Дефиниције неких појмова у уџбеницима математике (мислим на уџбенике који се користе у Републици Српској) и нису баш прихватљиви за ученика. Вероватно се и професор не осећа најпријатније када погледа следеће дефиниције:

- Алгебарски израз
- Полиедар
- Површина

Један од начина за превладавање проблема са дефиницијом таквих појмова је компромис са строгошћу и ослањање на интуицију.Такође, постоји могућност да се „потражи“ дефиниција која ће бити прихватљива за узраст.

Аксиоматско заснивање геометрије је нешто што прво пада на памет када се говори о строгости и формалном у математици. Моје мишљење је да данас ученици у првом средње немају довољно стрпљења за изградњу тако комплексне теорије на формалан начин. Покушаји да се та теорија „укратко преприча“ неће донијети никакву корист за слушаоце.

Причу о строгости и формализму и строгости у математици можемо наставити у питању шта, колико и када треба да се докаже у редовној настави. Ево неколико идеја шта је лепо/важно да се докаже ученицима:

ОСНОВНА ШКОЛА

- Правила о дељивости бројева
- Број дијагонала и збир углова у конвексном n-тоуглу
- Значајне тачке у троуглу
- Површина ликова
- Подударност троуглова
- Питагорина теорема
- Формуле које се користе у алгебарским изразима

СРЕДЊА ШКОЛА

- Постојање ирационалних бројева
- Примена математичке индукције
- Виетове Формуле
- Ојлерова формула за полиедре
- Егзистенција броја е
- Кавалијериев принцип и запремина
- Теореме диференцијалног рачуна

Колико у доказу треба инсистирати на строгости је ствар укуса предавача, нивоа знања ученика и времена које нам је на располагању. Ипак, било би лепо да већина ученика који заврше средњу школу бар чују да се у математици нешто и доказује, те да је то важно бар колико и рачунање.

УМЕСТО ЗАКЉУЧКА

- Није свака дефиниција (а поготово теорема) која се појави у уџбенику обавезна за ученике
- Направити властиту базу занимљивих „прича“ (неколико идеја наћи ћете у наставку текста)
- Прилагодити наставу и захтеве реалној ситуацији

Жива математика 1: Тополошка машина за прање веша

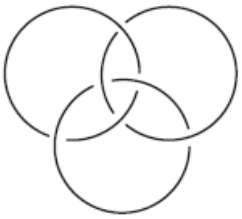
Машинско прање веша захтева пажљиво сортирање одеће, избор температуре, дужину прања итд. Ако негде погрешимо добићемо изгужване јастучнице, обојене мајице, поцепане делове одеће.

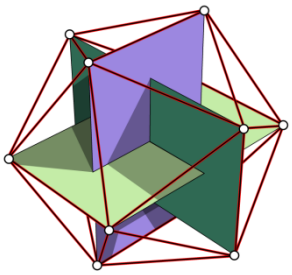
Оно што не очекујемо је мистериозно мењање геометрије (топологије) одеће до које је дошло када смо подесили центрифугу на „превелики број обртаја“.

Ако пажљиво погледамо прву слику приметићемо да се једна од бретела уврнула за 360 степени! Како је до овога дошло и да ли је овако нешто могуће експериментално или теоретски проверити?

На слици 2 је приказан поједностављен, математички модел наведене мајице и питање је да ли се било каквим кретањем кроз простор (без цепања) може мајица на овај начин замрсити.

Жива математика 2: Боромејски прстенови

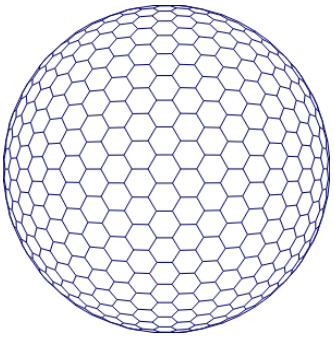




Уочите Боромејске прстенове (паралелограме) на слици лево. Уверити се да стране паралелограма образују златни пресек.

Жива математика 3: Епохално откриће или првоаприлска шала

1. Да ли је могућа следећа слика!?



Другим речима да ли је могуће склопити сферу (границу лопте) од шестоуглова као што је приказано на слици?
http://pub.ist.ac.at/~edels/hexasphere/

2. Конвексни политоп је **тривалентан** ако из сваког темена полазе тачно 3 ивице. Показати да у задатом тривалетном политопу важи формула,

$$\sum_{n\geq 3}(6-n)P_n = 12$$

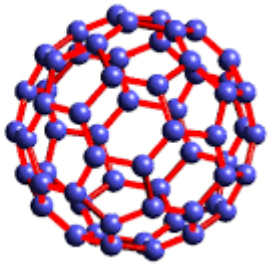
где је $P_n =$ број n-тоугаоних страна

3. Фулерен је конвексни политоп код кога су:
   (а) све пљосни или петоугли и шестоугли;
   (б) из сваког темена полазе тачно 3 ивице.

   Шта нам каже претходна формула ако је тривалетни политоп фулерен.

4. Да ли постоји фулерен са било којим, унапред заданим бројем P_6 шестоугаоних страна?

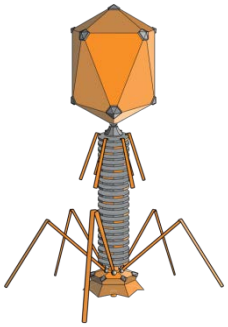
5. Из сваког од 12 темена икосаедра излази 5 ивица. Трункација (зарубљивање) икосаедра се обавља тако што се одсече свих 12 врхова (рез пролази кроз свих 5 ивица на удаљености 1/3 дужине ивице). Уверити се да се овом трункацијом икосаедра добија фулерен (познат као C_{60} или фудбалска лопта). Колико шестоугаоних страна има C_{60} ?



6. Да ли постоји фулерен у коме два петоугла имају заједничко теме или заједничку ивицу? (Погледати књигу https://arxiv.org/pdf/1609.02949.pdf.)

Жива математика 4: Зашто вируси воле геометрију?

Ова тема има и алтернативни наслов „Зашто се вирусима допада икосаедар“. Тема се на атрактиван начин бави геометријом правилних полиедара са акцентом на икосаедру. У радионици за ученике се могу користити компјутерске анимације урађене у оквиру пројекта „Жива математика“, видети http://www.rade-zivaljevic.appspot.com/ .



Основна веза са светом вируса је врло интересантна чињеница да су капсиди (протеински омотачи) највећег броја вируса икосаедралног облика, http://en.wikipedia.org/wiki/Capsid, http://en.wikipedia.org/wiki/Bacteriophage.

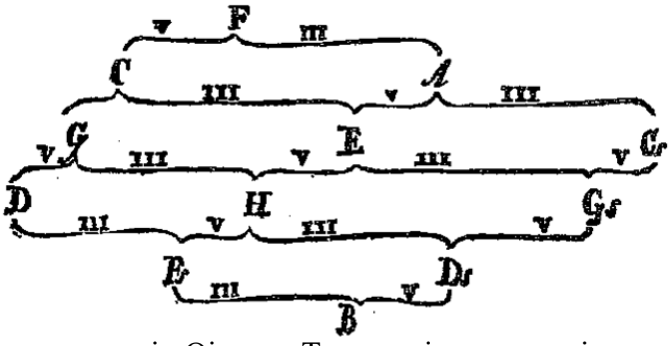
Модел на слици (лево) се зове „вирус за понети“ јер га и деца могу лако направити од сламки. Слика изнад дочарава стварни изглед таквог вируса (бактериофаг).

Слика лево је тзв. „тенсегрити модел икосаедра“. Модел у пречнику има 40 цм и направљен је од три дрвена Боромејска прстена (дрвени рамови суспендовани у простору) и 24 спиралне опруге које систем држе у равнотежи.

Све три анимације доступне на адреси http://www.rade-zivaljevic.appspot.com/ . (Боромејски прстенови, Бојова површ и Метаморфозе икосаедра) су блиско повезане са овим моделом.

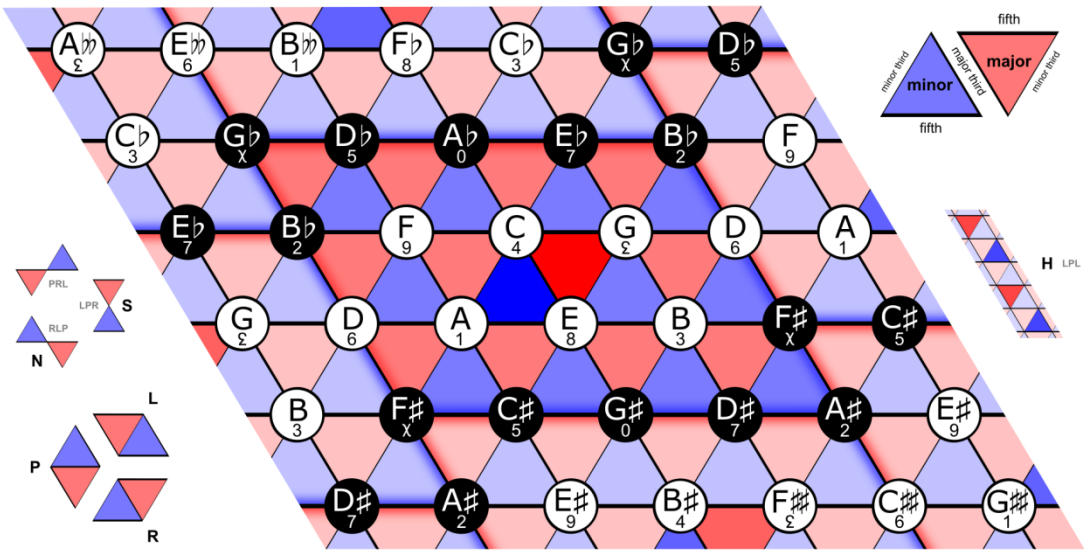
Жива математика 5: Леонард Ојлер и музички „Tonnetz“

Леонард Ојлер (L. Euler) је 1739. Године написао *Tentamen novae theoriae musicae ex certissismis harmoniae principiis dilucide expositae,* као дело из математичке теорије музике.



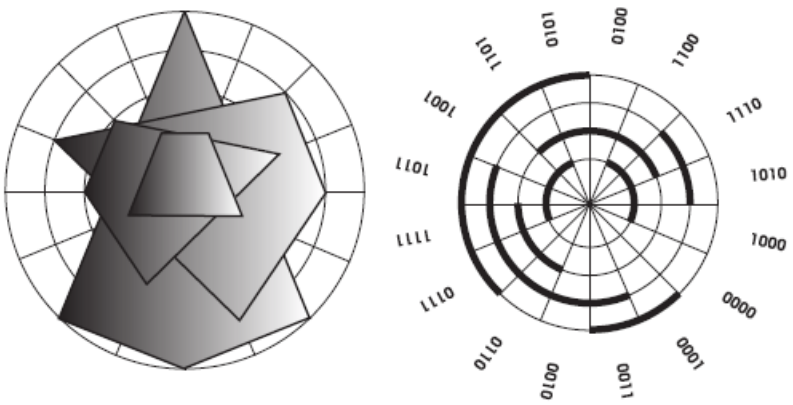
У савременој интерпретацији Ојлеров Тонец даје геометријски приказ дурских и молских акорда у основној дванестотонсокј лествици. Укратко и поједностављено речено Тонец је математички „кључ“ за разумевање једног од најважнијих делова музичке теорије.

Математичким језиком речено Тонец је једно врло правилно разбијање дводимензионалног торуса на 24 троугла од којих 12 припада дуровима а 12 моловима.



Помоћу Тонеца се може визуелизовати музика, видети на пример
https://www.youtube.com/watch?v=ZWyu9uwKtp0 или
https://www.youtube.com/watch?v=nidHgLA2UB0
где је предмет анализе Gymnopédie No. 1, Erik Satie.

Жива математика 6: Грејови кодови и драма „Quad“ Семјуела Бекета



Задатак 1: Свих 16 подскупова датог скупа од 4 елемента поређати у круг тако да се свака два суседна скупа разликују у тачно једном елементу.

Задатак 2: Замислимо да је дати скуп {a, b, c, d} од 4 елемента скуп глумаца путујућег позоришта. Замислимо да они желе да организују представу која има 16 сцена, тако да се у свакој сцени појави различит подскуп скупа глумаца. Направити план представе тако да:

1. прва сцена је без глумаца,
2. у последњој сцени (након које пада завеса) је само један глумац,
3. сцене се смењују тако што тачно један глумац или глумица уђу или изађу са сцене.

Задатак 3: Направити план представе у којој свака од 4 глумице (глумца) уђе на сцену два пута и изађе са сцене 2 пута (видети слику).

Дискусија:

1. Каква је веза ове приче са драмом „Quad“ Семјуела Бекета?

https://www.youtube.com/watch?v=34NNTgvUE7c

https://www.youtube.com/watch?v=LPJBIvv13Bc&t=60s

https://www.youtube.com/results?search_query=quad+beckett

2. Каква је веза са теоријом кодирања (Греојови кодови) и пронаћи слику балансираног 4-битног Грејовог кода у књизи:

[Knu-4A] D.E. Knuth. *The Art of ComputerProgramming*, Vol. 4A: Combinatorial Algorithms, Part 1. Addison-Wesley, 2011. `http://www.cs.utsa.edu/~wagner/knuth/`.

Жива математика 7: Гласање као математичка игра

[39 : 7, 7, 7, 7, 7, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

Модел гласања у Савету безбедности УН. Глас сталне чланице (њих 5) носи тежину 7 док глас једне од 10 промењивих чланица има тежину 1. Резолуција пролази ако је збир тежина гласова чланица које су гласале ЗА бар 39. Објаснити зашто је изабран баш овај модел гласања.

[30: 10, 10, 10, 9]

Четири партнера улажу у заједнички посао (3 по 10000 ЕУР и један 9000 ЕУР). Одлуке доносе према схеми [30; 10, 10, 10, 9]. Уочава се да последњи партнер нема никакву реалну моћ у одлучивању тј. његово мишљење никада не утиче на одлуку !

[11: 12, 5, 4]

Ово је модел гласања у коме први играч „диктатор“, тј. мишљење преостала два играча је потпуно ирелеватно.

[101: 99, 98, 3]

Ово је модел гласања у парламенту где гласају 3 партије, две заступљене са приближно истим бројем посланика (99 и 98) и трећа потпуно маргинална са само 3 посланика. Закон се усваја ако за њега гласа бар 101 посалник. У овом моделу све три партије су равноправне (парадокс!) и имају потпуно исти утицај на одлуке јер се равноправно појављују у 4 добитничке коалиције. (Подразумева се да сви посланици из исте партије гласају једнако.)

The European Union (2008): Shapley-Shubik Power Distribution

Member nation	Weight	Percentage of votes	Shapley-Shubik Power
France, Germany, Italy, United Kingdom	29	8.41%	8.67%
Spain, Poland	27	7.83%	8.00%
Romania	14	4.06%	3.99%
Netherlands	13	3.77%	3.68%
Belgium, Greece, Czech Republic, Hungary, Portugal	12	3.48%	3.41%
Austria, Bulgaria, Sweden	10	2.90%	2.82%
Denmark, Ireland, Lithuania, Slovakia, Finland	7	2.03%	2.00%
Cyprus, Estonia, Latvia, Luxembourg, Slovenia	4	1.16%	1.10%
Malta	3	0.87%	0.82%