АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА (имплицитни приступ, принцип поларе)

Овај текст намењен је ученицима и професорима математике у средњим школама.

Циљ овог текста је да се покаже један, мало другачији приступ, у решавању задатака у аналитичкој геометрији.

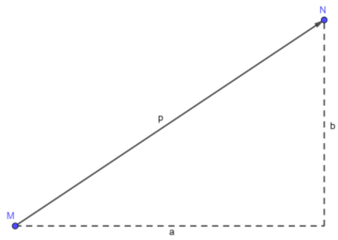
ОДРЕЂЕНОСТ ПРАВЕ

Сваку праву у Декартовој равни можемо одредити на више „различитих начина“. Рецимо, права је једнозначено одређена са:

1. Две своје различите тачке;
2. Углом који заклапа са позитивним делом апсцисе и једном својом тачком;
3. Углом који заклапа са позитивним делом апсцисе и одсечком на ординати (не баш свака права);
4. Вектором правца и једном својом тачком;
5. Вектором нормалним на вектор правца и једном својом тачком.

ЈЕДНАЧИНА ПРАВЕ

Нека је дат вектор $\vec{p}=\overrightarrow{MN}=(a,b)$. То значи да се од тачке M до тачке N долази тако што се по апсцисној оси „померимо“ за дужину a, а по ординатној оси за дужину b. Нека су координате ових тачака $M(x_M, y_M)$, односно $N(x_N, y_N)$. Тада се једначина праве, којој је правац одређен вектором $\vec{p}$ и која садржи, рецимо тачку M, може записати у облику:



$$\frac{x-x_M}{a}=\frac{y-y_M}{b}. \quad (1)$$

Израз $\frac{x-x_M}{a}=\frac{y-y_M}{b}$ не треба схватити као једнакост количника леве и десне стране, већ као чињеницу да се од једне до друге тачке ове праве може доћи „померањем“ по апсцисној оси за дужину a, а по ординатној оси за дужину b. Ако је једна од координата вектора $\vec{p}=\overrightarrow{MN}=(a,b)$ једнака нули, то значи да нема „померања“ дуж одговарајуће осе.

Из (1) се могу добити и остали облици једначине праве:

- $y-y_M=\frac{y_M-y_N}{x_M-x_N}(x-x_M)$, $a=x_M-x_N$, $b=y_M-y_N$;
- $y-y_N=k(x-x_N)$, $k=\frac{y_M-y_N}{x_M-x_N}$;
- $y=kx+n$, $n=y_M-kx_M$;
- $bx-ay+c=0$, $c=ay_M-bx_M$ (2)

Ово последње значи да ако је правац пружања праве дуж вектора $\vec{p}=(a,b)$, коефицијенти уз x и y су координате њему ортогоналног вектора $\vec{q}=(b,-a)$. Можемо рећи и да је $b=\Delta_y$, односно $a=\Delta_x$. Коефицијент c служи да обезбеди да права садржи задату тачку и може се лако рачунати напамет.

Ако су две праве записане у облику (2), тада су оне:

- паралелне ако су им одговарајући коефицијенти једнаки (пропорционални),
- нормалне ако заменимо одговарајуће коефицијенте и једном од њих променимо знак.

Одсечци на координатним осама, уколико је права задата у облику (2), су $x_0=-\dfrac{c}{b}$ и $y_0=\dfrac{c}{a}$, па је површина троугла одређеног правом и координатним осама дата са $P=\dfrac{c^2}{2|ab|}$.

Пример 1.

Дате су тачке $A(2,-3)$, $B(-1,1)$ и $C(-2,-5)$. Одредити једначину праве која:

а) садржи A и паралелна је са BC,
б) садржи C и нормална је на AB.

Решење:

а) За праву BC важи $\Delta_y=1-(-5)=6$ и $\Delta_x=-1-(-2)=1$, па је $BC: 6x-y+7=0$. Тада је права, $a \parallel BC$, $A\in a$ облика $a: 6x-y-15=0$.
б) Слично претходном, можемо напамет да израчунамо да је права $AB: 4x+3y+1=0$, одакле је $c\perp AB$ и $C\in c$, $c: 3x-4y-14=0$.

УГАО ИЗМЕЂУ ДВЕ ПРАВЕ

Нека су дате једначине две праве у имплицитном облику $p: ax+by+c=0$ и $q: Ax+By+C=0$. Како знамо да су углови са нормалним крацима једнаки и да (a,b) и (A,B) представљају векторе ортогоналне на правац пружања правих p и q, користећи дефиницију скаларног производа, следи да је

$$\cos\varphi=\cos\angle(p,q)=\frac{|aA+bB|}{\sqrt{(a^2+b^2)(A^2+B^2)}}, \text{ за оштар угао } \varphi.$$

ПОЛАРА

Полара је појам познат из пројективне геометрије. За потребе аналитичке геометрије, користићемо следећу дефиницију:

Дефиниција:

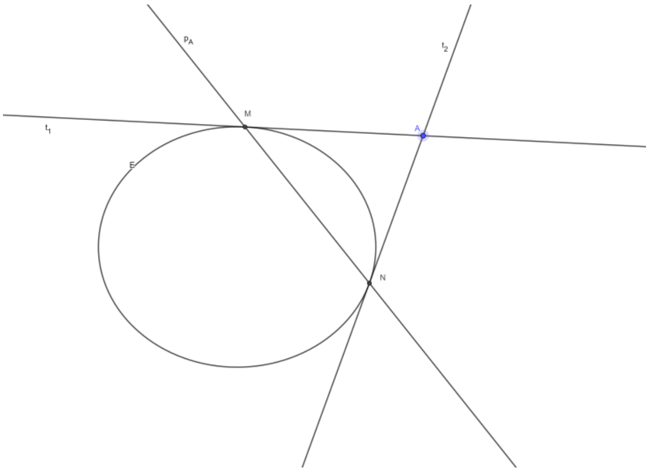
Полара[1] је права одређена додирним тачкама тангенте повучене из тачке (пол) на произвољну криву другог реда.

Специјални случајеви:

а) Ако је тачка (пол) на криви другог реда, полара[2] је исто што и тангента на криву.

[1] Доказ се може наћи у уџбенику Petar Javor "Analitička geometrija ravnine", Školska knjiga Zagreb,1990 – информацију дугујем др Миланки Гардашевић Филиповић, професору РАФ-а, мајци нашег бивег ученика Софије Филиповић (3-8, 2017 год).

б) Ако је тачка (пол) унутар криве другог реда, полара је права[3] паралелна сечици криве којој је пол средиште.



Како доћи до једначине поларе?

Једначина поларе p_A из тачке $A(x_A, y_A)$ добија се из једначине криве другог реда тако што се квадратни чланови x^2 и y^2 замене редом са xx_A, односно са yy_A (ако је једначина криве дата са $(x-p)^2$ и $(y-q)^2$, ови чланови се мењају члановима $(x-x_A)(x-p)$, односно $(y-y_A)(y-q)$), док се линеарни чланови x и y мењају са $\dfrac{x+x_A}{2}$, односно $\dfrac{y+y_A}{2}$.

Дакле, одређивање једначине тангенте из произвољне тачке на криву другог реда своди се на израчунавање највише две једначине поларе, што ћемо видети у каснијим примерима.

Зашто радити тангенте помоћу поларе?

Предност метода поларе је у томе што није потребно памтити услове додира за сваку појединачну криву. Помоћу поларе можемо одредити једначину тангенте криве чији центар није у координатном почетку. Такође, помоћу поларе можемо добити и једначине тангенти које су паралелне апсцисној оси, што није случај уколико користимо услов додира. Вешт рачунџија може довољно брзо да ради све задатке помоћу поларе, не оптерећујући се памћењем непотребних формула.

Задаци[4]:

У овом делу разматраћемо неколико типова задатака. Показаћемо како се могу решити коришћењем принципа поларе. Остали задаци могу послужити за самосталан рад.

Дата је тачка која је средиште тетиве криве другог реда

Полара

Тангента у тачки која припада кривој

Тангента која је паралелна или нормална на дату праву

Тангента из тачке ван криве другог реда

Заједничке тангенте

Најближе тачке датој правој

Остали задаци

КРАЈ ПРЕДАВАЊА ОД 45 МИНУТА

---

[2] Ове формуле постоје у збиркама које се користе у настави.

[3] Ово је приметио Јован Танасијевић, ученик 4-9 школске 2018/19, спремајући пријемни за факултет.

[4] С. Огњановић и Ж. Ивановић, Збирка решених задатака за 3. Разред гимназија и техничких школа, Београд 2010.

Међусобни положај две праве

719. Наћи једначину праве која садржи тачку $M\left(-1,3\right)$ и са правом $p:3x+2y-6=0$ образује угао од 45°.

723. Одредити једначину симетрале дужи AB, $A\left(1,-4\right)$, $B\left(3,2\right)$.

726. Наћи једначине правих одређених висинама троугла ако су једначине његових страница $2x-y+3=0$, $x+5y-7=0$, $3x-2y+6=0$.

Дата је тачка која је средиште тетиве криве другог реда

846. Дат је круг $\left(x-1\right)^2+y^2=4$. Одредити једначину тетиве круга која садржи тачку $A\left(2,-\frac{1}{2}\right)$ и подељена је том тачком на два једнака дела.

847. Написати једначину тетиве круга $\left(x-3\right)^2+\left(y-4\right)^2=16$ која пролази кроз тачку $A\left(5,7\right)$, која је средиште тражене тетиве.

Полара

837. Из тачке $P\left(2,-3\right)$ конструисане су тангенте круга $\left(x-1\right)^2+\left(y+5\right)^2=4$. Наћи једначину тетиве која садржи додирне тачке.

(*) Из тачке $P\left(-16,9\right)$ конструисане су тангенте елипсе $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. Израчунати одстојање тачке P од тетиве елипсе одређене додирним тачкама.

Тангента у тачки која припада кривој

831. Одредити једначину тангенте круга у тачки додира:

а) $x^2+y^2=5, M\left(1,-2\right)$,

б) $x^2+y^2-2x-3y=0, M\left(0,3\right)$,

в) $x^2+y^2=20, M\left(4,2\right)$,

г) $\left(x-1\right)^2+\left(y-2\right)^2=25, M\left(5,5\right)$,

д) $\left(x+2\right)^2+\left(y-2\right)^2=25, M\left(1,-2\right)$,

е) $x^2+y^2-2x-4y+3=0, M\left(2,1\right)$

833. Одредити једначину нормале круга у његовој тачки, ако је:

а) $x^2+y^2+4x-4y-17=0, M\left(2,5\right)$,

б) $x^2+y^2-6x-8y+17=0, M\left(5,6\right)$,

в) $x^2+y^2=25, M\left(3,4\right)$.

906. Наћи једначине тангената које дату елипсу додирују у тачки:

а) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1, A\left(2,-3\right)$,

б) $2x^2+3y^2=21, A\left(3,1\right)$,

в) $4x^2+9y^2=22, A\left(1,\sqrt{2}\right)$,

г) $3x^2+4y^2=48, A\left(2,-3\right)$,

д) $x^2+3y^2=16, A\left(2,2\right)$.

911. Одредити једначину тангенте и нормале елипсе у својој тачки:

а) $3x^2+4y^2=12, D\left(-1,y_1>0\right)$,

б) $\frac{x^2}{50}+\frac{y^2}{32}=1, D\left(5,y_1<0\right)$.

954. Одредити једначину тангенте хиперболе у својој тачки:

а) $x^2-4y^2=64, D\left(10,y>0\right)$,

б) $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1, D\left(5,y<0\right)$, в) $9x^2 - y^2 = 144, D(x<0,-9)$

г) $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1, D(4,2)$.

Тангента која је паралелна или нормална на дату праву

830. Дата је права $x+2y+1=0$ и круг $x^2+y^2=5$. Одредити једначине тангената датог круга које су:

а) Паралелне са датом правом,

б) Нормалне на дату праву,

в) Са датом правом граде угао од 45°.

834. Одредити једначине тангенти круга које су паралелне датој правој:

а) $x^2+y^2=5, l: 2x-y+1=0$,

б) $x^2+y^2-10x-12y+36=0, l: 4x-3y+10=0$.

835. Одредити једначине тангенти круга које су нормалне на дату праву:

а) $x^2+y^2=4, p: x+y=2$,

б) $x^2+y^2-6x-8y+15=0, p: y=3x$.

909. Одредити једначине тангенти елипсе које су паралелне датој правој:

а) $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1, l: 2x-y+17=0$,

б) $9x^2+16y^2=144, l: x+y-1=0$,

в) $x^2+4y^2=10, l: 3x+2y+7=0$.

910. Одредити једначине тангенти елипсе које су нормалне на дату праву:

а) $25x^2+169y^2=4225, q: 13x+12y-115=0$

б) $x^2+4y^2=20, q: 2x-2y-13=0$,

в) $3x^2+4y^2=120, q: 2x-y+7=0$,

г) $x^2+4y^2=16, q: 3x-2y+18=0$.

921. Одредити једначине тангенти елипсе $x^2+3y^2=28$ које са правом $x-5y-20=0$ граде угао 45°.

956. Одредити једначину тангенте хиперболе $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{6}=1$ паралелне правој $x+y-7=0$.

Тангента из тачке ван криве другог реда

832. Наћи једначине тангената круга конструисаних из тачке на круг:

а) $x^2+y^2=25, M(7,1)$,

б) $x^2+y^2-8x-4y+16=0, M(0,0)$,

в) $x^2+y^2-2x+4y=0, M(-4,3)$,

г) $x^2+y^2=32, M(8,8)$,

д) $x^2+y^2+2y=0, M(1,1)$.

857. Из тачке $A(4,2)$ конструисане су тангенте на круг $x^2+y^2=10$. Израчунати угао који те тангенте међу собом граде.

907. Одредити једначине тангенти на елипсу конструисаних из дате тачке:

а) $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{18}=1, A(12,-3)$,

б) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1, A(10,4)$,

в) $x^2+4y^2=100, A(2,7)$,

г) $19x^2+25y^2=475, A(10,-8)$,

д) $9x^2+15y^2=135, A(-6,3)$,

е) $25x^2+24y^2=600, A(-16,9)$.

953. Одредити једначине тангенти конструисаних из дате тачке на дату хиперболу:

а) $A(1,0), 2x^2-9y^2=18$,

б) $B(0,3), x^2-y^2=9$,

в) $C(-3,5), 3x^2-y^2=3$,

г) $D(2,0), 9x^2-8y^2=72$.

996. Одредити једначину тангенте параболе $y^2 = 8x$ која садржи тачку а) $P(5,-7)$, б) $Q(-4,2)$.

Заједничке тангенте

870. Наћи једначине заједнички тангенти кругова:

а) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ и $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$,

б) $x^2 + y^2 = 2$ и $(x-2)^2 + y^2 = 8$,

в) $x^2 + (y+1)^2 = 5$ и $x^2 + (y-4)^2 = 20$.

914. Наћи једначине заједничких тангенти двеју елипси:

а) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ и $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$,

б) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ и $\frac{x^2}{6} + y^2 = 1$.

Најближе тачке датој правој

874. На кругу $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 20$ наћи тачку A најближу правој $3x + 4y + 34 = 0$ и израчунати одстојање тачке A од те праве.

875. Дат је круг $x^2 + y^2 = 34$ и права која садржи тачке $M(9,-2)$ и $N(6,10)$. Одредити координате тачке A праве најближе кругу и тачке B круга најдаље правој.

923. Одредити тачку на елипси $x^2 + 4y^2 = 20$ најближу (најдаљу) правој $x + y = 7$.

(*) На елипси $2x^2 + y^2 = 18$ дате су тачке $A(1,4)$ и $B(3,0)$. Одредити на елипси тачку C тако да површина троугла ABC буде највећа.

Остали задаци

957. Одредити величину b^2 у једначини хиперболе $b^2x^2 - 16y^2 = 16b^2$ знајући да је права $15x + 16y - 36 = 0$ тангента те хиперболе.

958. Одредити једначину хиперболе $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ ако су једначине двеју њених тангенти $5x - 6y - 16 = 0$ и $13x - 10y - 48 = 0$.

1016. Права сече параболу у двема тачкама. Одредити једначине тангената параболе у тим тачкама и величину угла који оне граде:

а) $l: x - 2y - 6 = 0, P: y^2 = 2x$,

б) $l: 2x - 3y + 4 = 0, P: y^2 = 4x$.