ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

АКРЕДИТОВАНИ СЕМИНАР:

345

ДРЖАВНИ СЕМИНАР О НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ И РАЧУНАРСТВА ДРУШТВА МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Компетенција: К1
Приоритети: 3

ТЕМА:

САВРЕМЕНИ ПРИСТУП НАСТАВИ ТРИГОНОМЕТРИЈЕ

РЕАЛИЗАТОРИ СЕМИНАРА:

МИЛОСАВ МИЛЕНКОВИЋ

ДРАГОЉУБ ЂОРЂЕВИЋ

БЕОГРАД,
08–09. 02. 2020.

САВРЕМЕНИ ПРИСТУП НАСТАВИ ТРИГОНОМЕТРИЈЕ

Увод

Тригонометрија је математичка дисциплина која се бави тригонометријским функцијама и њиховим применама. Њене корене срећемо још у старом веку (Египат, Вавилон). Реч тригонометрија је састављена од грчких речи *тригоном* (троугао) и *метрон* (мера), што указује да се ова дисциплина у свом почетку бавила проблемом *мерења троугла* (тј. његових страница и углова). Савремена тригонометрија се бави тригонометријским функцијама углова и бројева између којих постоји тесна веза.

Данашњи начин означавања и облик тригонометријских функција потиче од Ојлера (1707. – 1783. г.). Он је тригонометријске функције схватио као бројеве, а не као дужине. Дефинисао је тригонометријске функције комплексних бројева и нашао везу тригонометријских функција са експоненцијалном функцијом ($e^{ix} = \cos x + i\, sin\, x$).

Назив за тригонометријску функцију *синус* у Европу је стигао техником „поквареног телефона“. У Индији су користили назив *џива* што значи тетива лука. Арапи ту реч преносе као *џаиб* што значи кривина, набор на одећи. Европски средњевековни преводилац Роберт из Честера реч *џаиб* преводи дословно на латински језик те тако долази до назива *синус* што значи удубљење, шупљина. Назив *косинус* настао је у 17. веку као скраћеноца од *комплементи синус*, што би у преводу био синус комплементног угла. Назив *тангенс* уводи Финцке 1583. године због везе са тангентом. *Котангенс* је добио име из истог разлога као и *косинус*.

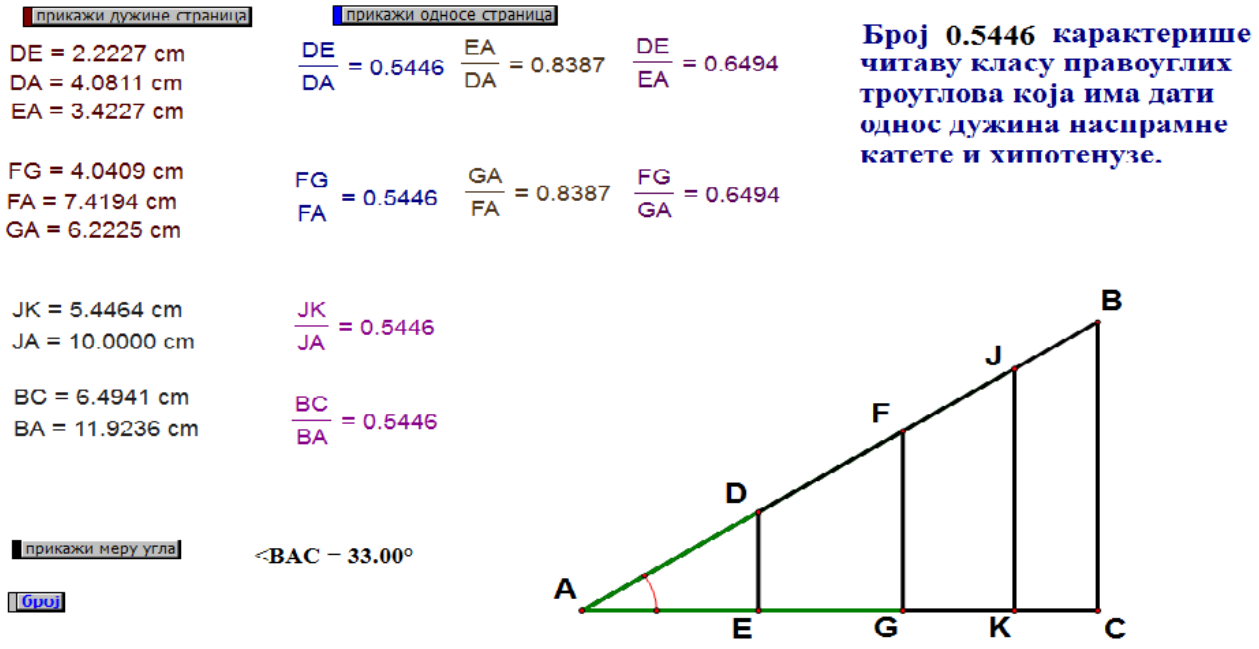
Тригонометријске функције су основ за описивање многих појава и процеса у савременој техничкој пракси.

Тригонометрија у школама Републике Србије

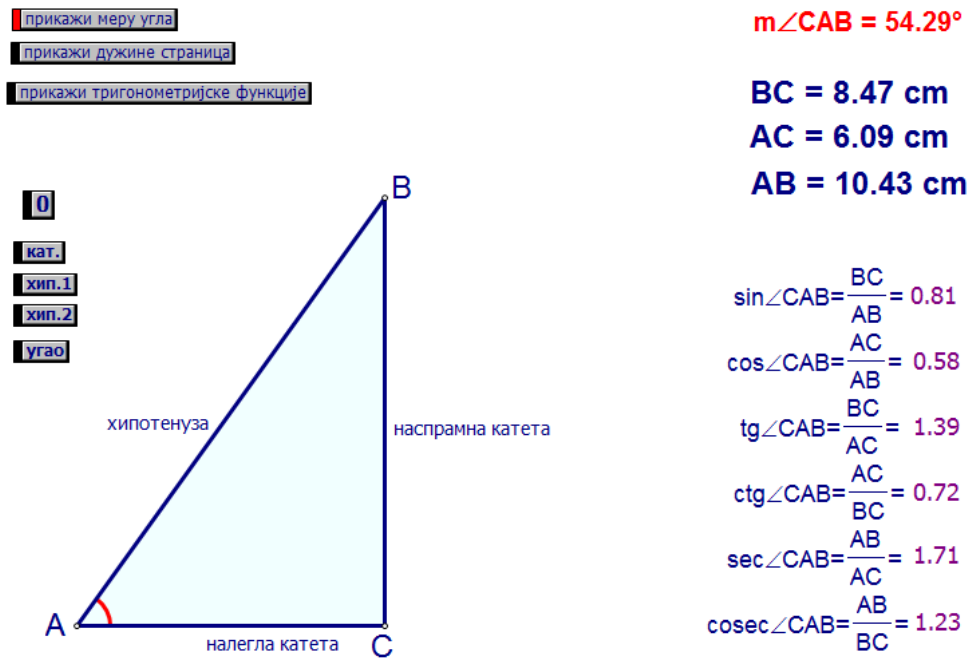
Тригонометрија је саставни део градива свих средњих школа. У Просветном гласнику (12/2018) дат је Програм наставе и учења за први разред гимназије. У њему је за обавезан наставни предмет *математика* дата и тема *Тригонометрија правоуглог троугла* са следећим садржајем: *Тригонометријске функције оштрог угла, основне тригонометријске идентичности. Решавање правоуглог троугла*. За ову тему оријентациони број часова је 7. У Просветном гласнику (8/2019) дат је Програм наставе и учења за други разред гимназије. У њему је за обавезан наставни предмет *математика* дата и тема *Тригонометријске функције* са следећим садржајем: *Угао. Радијан. Тригонометријске функције. Тригонометријске трансформације. Тригонометријске једначине и неједначине. Синусна и косинусна теорема*. За ову тему оријентациони број часова је 56 (за природно-математички смер).

Од наставника се очекује да свој начин рада прилагоди захтевима савременог друштва, да мотивише ученике и олакша им разумевање предвиђених садржаја водећи рачуна о циљу предмета и исходима. Методе које користи могу бити од великог значаја при усвајању градива.

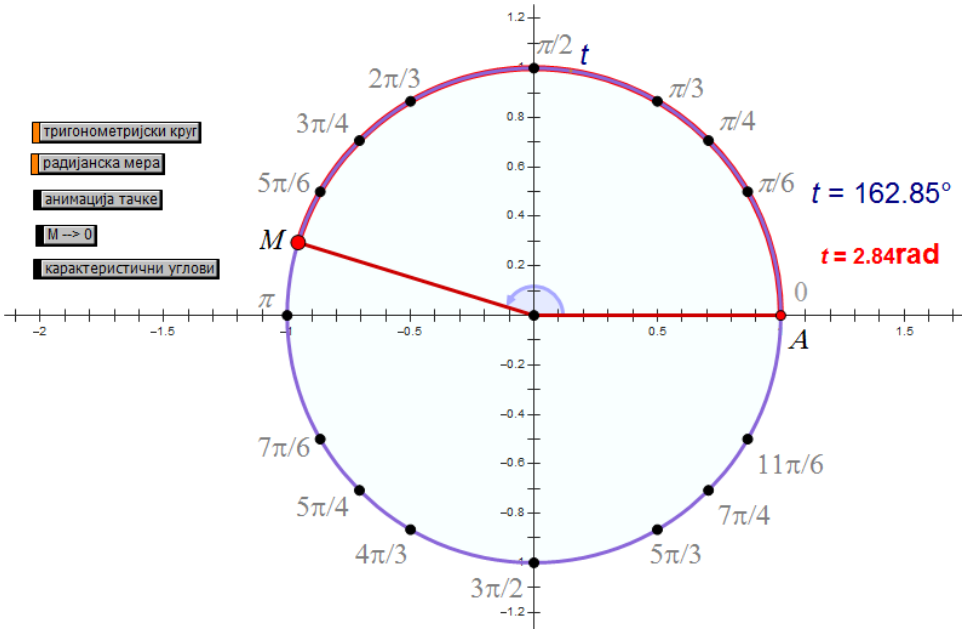
Однос страница правоуглог троугла



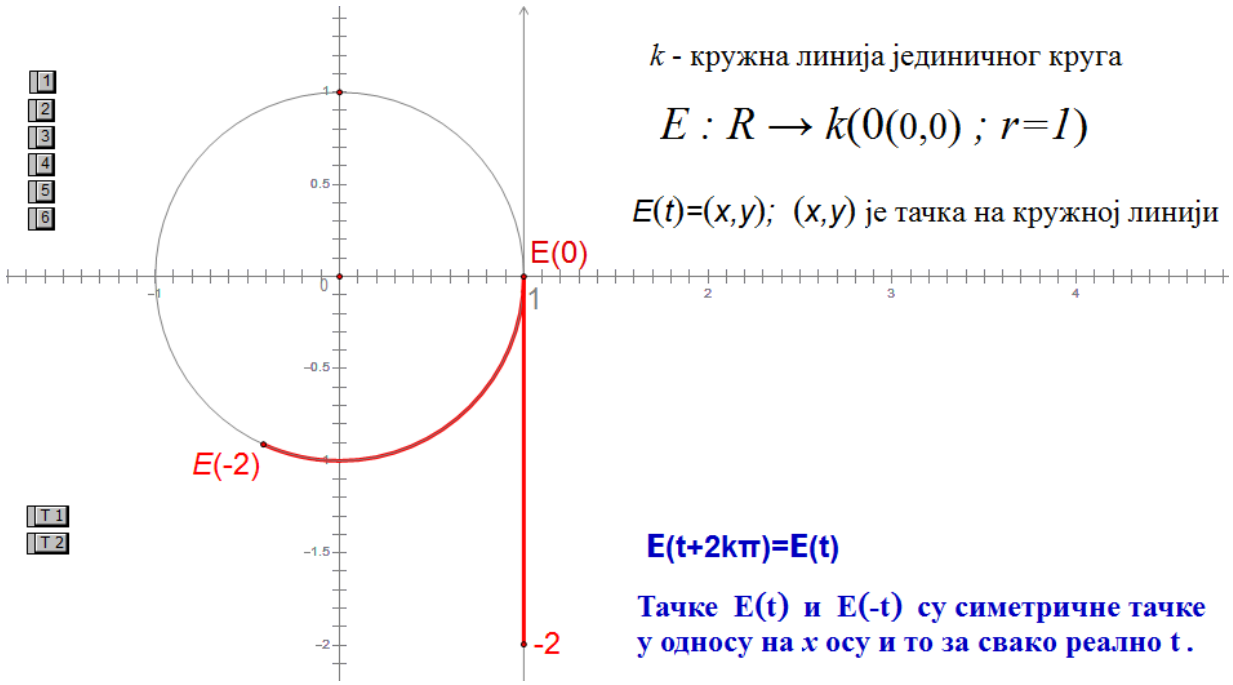
Дефиниција тригонометријских функција оштрог угла правоуглог троугла



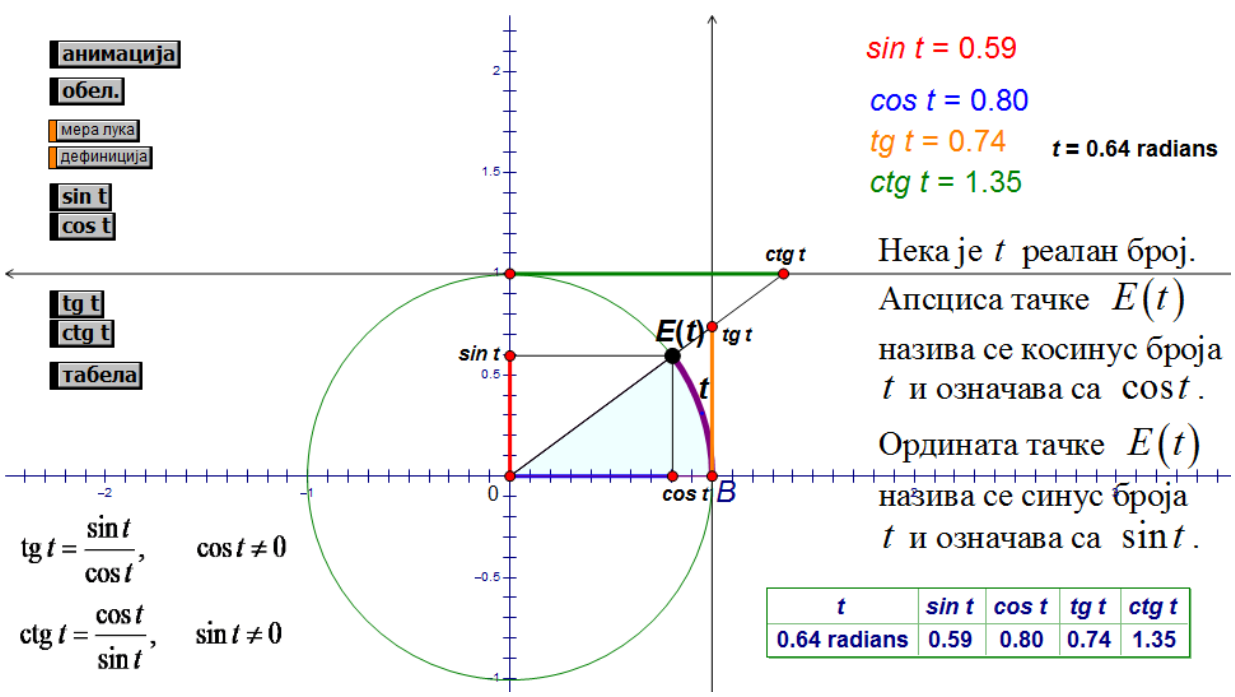
Тригонометријски круг



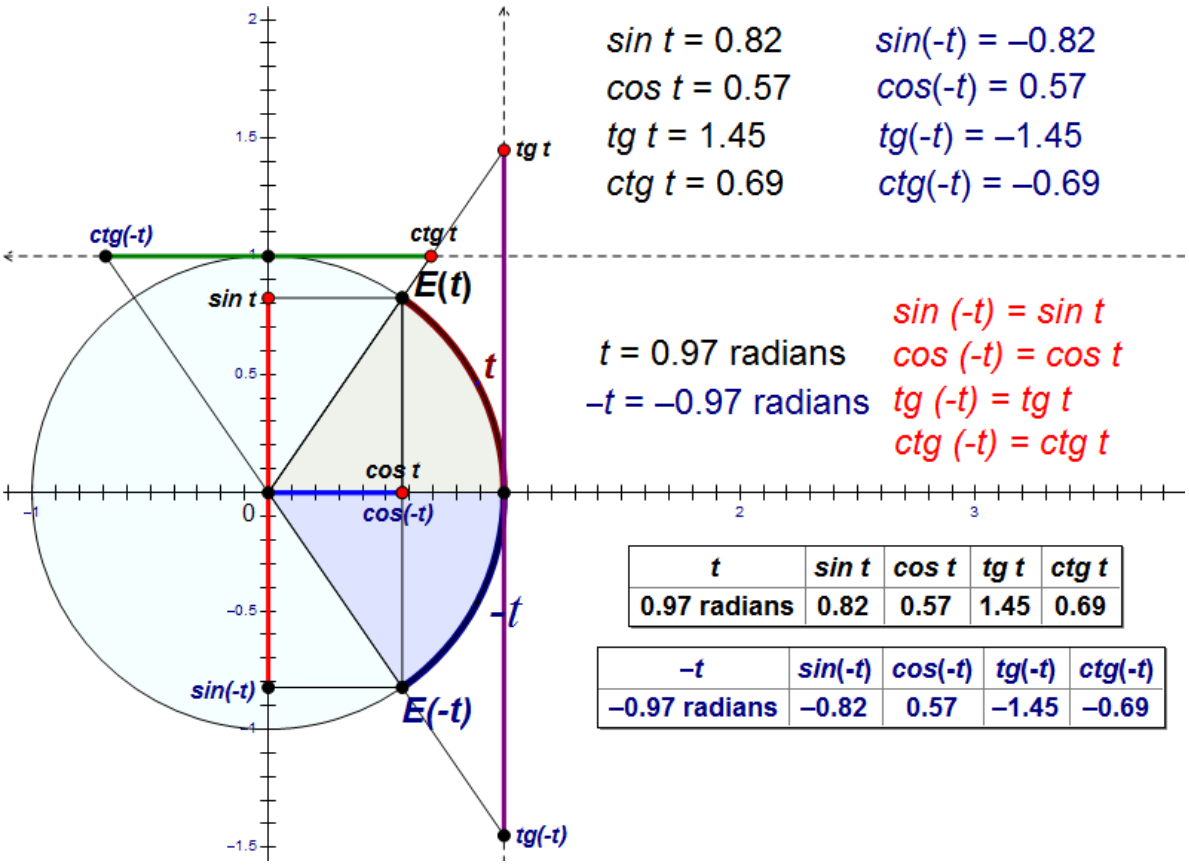
Експоненцијално пресликавање



Дефиниција тригонометријских функција произвољног угла



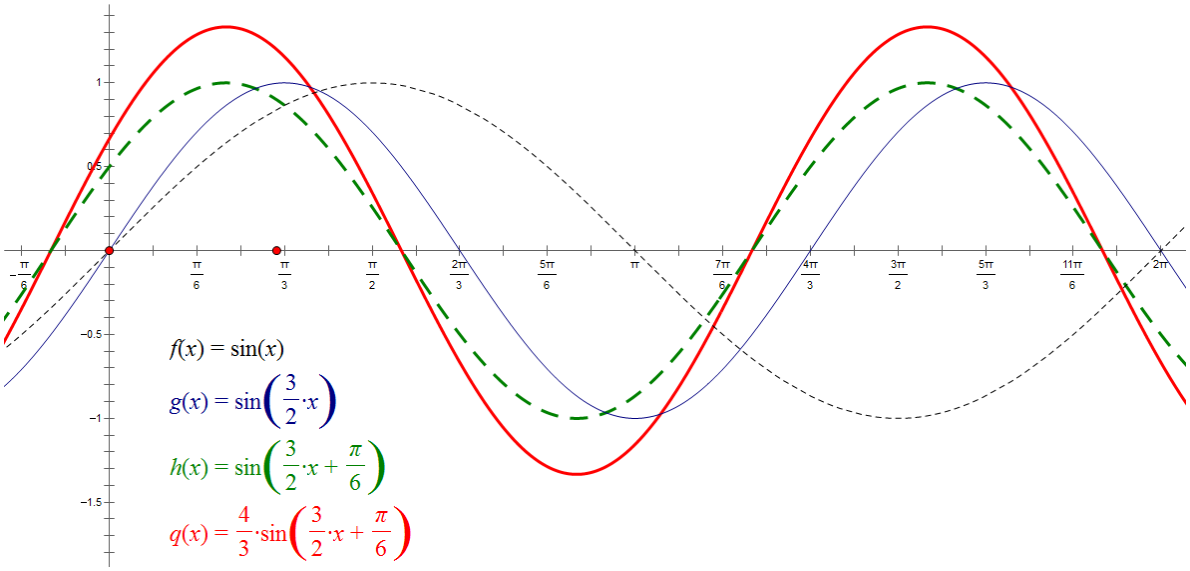
Тригонометријске функције негативних углова



t	sin t	cos t	tg t	ctg t
0.97 radians	0.82	0.57	1.45	0.69

–t	sin(-t)	cos(-t)	tg(-t)	ctg(-t)
–0.97 radians	–0.82	0.57	–1.45	–0.69

Графици тригонометријских функција



Инверзне тригонометријске функције

Тригонометријске функције $\sin x, \cos x, tg\, x$ и $ctg\, x$ нису бијекције. Дакле, оне немају инверзне функције, под претпоставком да се подразумева да се оне посматрају на својим природним доменима (R за функције $\sin$ и $\cos$, $R\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}, k\in Z$ за tg и $R\backslash\{k\pi\}, k\in Z$ за ctg). Међутим, ако посматрамо одређене рестрикције тих функција (тј. сузимо њихов домен , а по потреби и кодомен), можемо добити бијекције. У том случају тако добијене функције имаће инверзне.

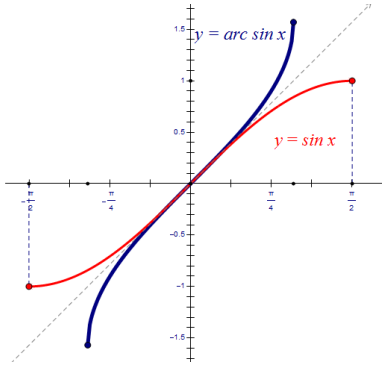
Домен функције синус је R а кодомен $\{y|-1\le y\le 1\}=[-1,1]$. Ако посматрамо рестрикцију функције синус на домену $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, односно, ако узимамо само оне уређене парове од функције синус чије су прве компоненте из $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, онда ће та нова функција бити бијективна и њу обележавамо симболом $\sin_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}$. Та функција има себи инверзну функцију коју обележавамо $\sin^{-1}_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}$ или $arc\sin$. Значи:

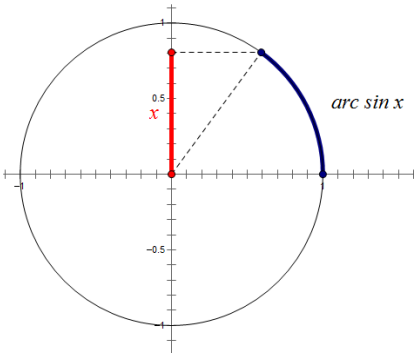
$$\sin^{-1}_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}=arc\sin=\left\{(\sin x,x)\middle|x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right\}=\{(y,arc\sin y)|y\in[-1,1]\}=\{(x,arc\sin x)|x\in[-1,1]\}$$

Дакле: $y=\sin x\Leftrightarrow x=arc\sin y,$ за $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], y\in[-1,1]$; односно важе следеће једнакости:

$$arc\sin(\sin x)=x, \text{ за } -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2},$$

$$\sin(arc\sin y)=y, \text{ за } -1\le y\le 1.$$



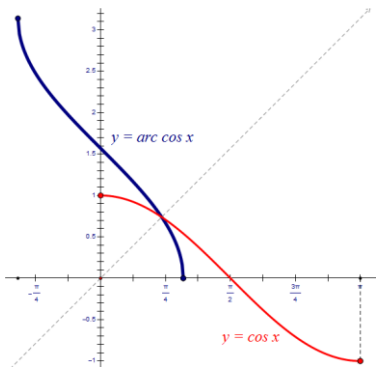


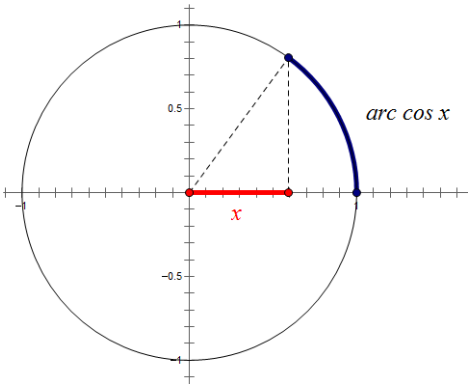
Домен функције косинус је R а кодомен $\{y|-1\le y\le 1\}=[-1,1]$. Ако посматрамо рестрикцију функције косинус на домену $[0,\pi]$, односно, ако узимамо само оне уређене парове од функције косинус чије су прве компоненте из $[0,\pi]$, онда ће та нова функција бити бијективна и њу обележавамо симболом $cos_{[0,\pi]}$. Та функција има себи инверзну функцију коју обележавамо $\cos^{-1}_{[0,\pi]}$ или $arc\cos$. Значи:

$$cos^{-1}_{[0,\pi]}=arc\cos=\{(\cos x,x)|x\in[0,\pi]\}=\{(y,arc\cos y)|y\in[-1,1]\}=\{(x,arc\cos x)|x\in[-1,1]\}$$
.

Дакле: $y=\cos x\Leftrightarrow x=arc\cos y,$ за $x\in[0,\pi],\ y\in[-1,1]$; односно важе следеће једнакости: $arc\cos(\cos x)=x,$ за $0\le x\le\pi$,

$$\cos(arc\cos y)=y,\ \text{за}\ -1\le y\le 1.$$





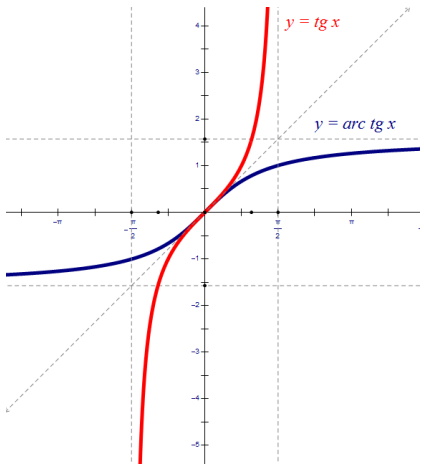
Домен функције тангенс је $R\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\},k\in Z$ а кодомен R. Ако посматрамо рестрикцију функције тангенс на домену $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, односно, ако узимамо само оне уређене парове од функције синус чије су прве компоненте из $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, онда ће та нова функција бити бијективна и њу обележавамо симболом $tg_{\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}$. Та функција има себи инверзну функцију коју обележавамо $tg^{-1}_{\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}$ или $arctg$. Значи:

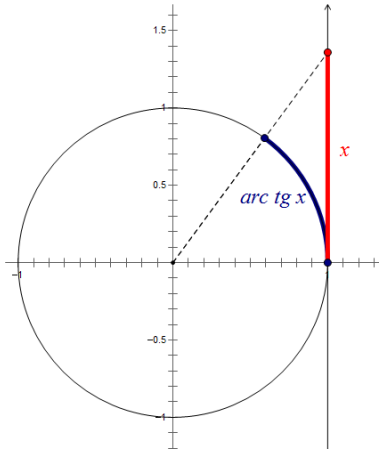
$$tg^{-1}_{\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)} = arctg = \left\{ (tg\,x, x) \middle| x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \right\} = \{(y, arctg\,y) | y \in R\} = \{(x, arctg\,x) | x \in R\}.$$

Дакле: $y = tg\,x \Leftrightarrow x = arctg\,y,$ за $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), y \in R$; односно важе следеће једнакости:

$$arctg(tg\,x) = x, \text{ за } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},$$

$$tg(arctg\,y) = y, \text{ за } y \in R.$$





Израчунавање вредности инверзне тригонометријске функције

1) Израчунати:

а) $arc\sin\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $arc\cos\left(-\frac{1}{2}\right)$; в) $arctg\,1$;

г) $arcctg\left(-\sqrt{3}\right)$; д) $arc\sin\sqrt{2}$; ђ) $arc\sin\frac{1}{2} + arc\cos\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решење: а) Угао из интервала $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ чији је синус $\frac{\sqrt{3}}{2}$ једнак је $\frac{\pi}{3}$. Дакле $arc\sin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$.

б) Угао из интервала $[0, \pi]$ чији је косинус $-\frac{1}{2}$ једнак је $\frac{2\pi}{3}$. Дакле $arc\cos(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$.

в) Угао из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ чији је тангенс 1 једнак је $\frac{\pi}{4}$. Дакле $arctg\,1 = \frac{\pi}{4}$.

г) Угао из интервала $(0,\pi)$ чији је котангенс $-\sqrt{3}$ једнак је $\frac{5\pi}{6}$. Дакле $arc\,ctg\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{5\pi}{6}$.

д) Не постоји $arc\,sin\sqrt{2}$ јер $\sqrt{2}\notin[-1,1]$.

ђ) $arc\,sin\frac{1}{2}+arc\,cos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$.

2) Израчунати:

а) $arc\,sin\left(sin\frac{\pi}{4}\right)$; б) $arc\,sin\left(sin\frac{10\pi}{9}\right)$; в) $arc\,sin\left(sin\sqrt{2}\right)$;

г) $arc\,sin(sin5)$; д) $arc\,sin(sin2022)$; ђ) $arc\,sin(sin2021)$;

е) $arc\,sin\left(cos\frac{33\pi}{5}\right)$.

Решење: а) Први начин: $arc\,sin\left(sin\frac{\pi}{4}\right)=arc\,sin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$.

Други начин: Угао из интервала $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ чији је синус једнак синусу угла од $\frac{\pi}{4}$ је $\frac{\pi}{4}$.

Дакле $arc\,sin\left(sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$.

б) Нека је $\beta=arc\,sin\left(sin\frac{10\pi}{9}\right)$. Тада је $sin\,\beta=sin\frac{10\pi}{9}$ и $\beta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Из једначине $sin\,\beta=sin\frac{10\pi}{9}$ добијамо $\beta=\frac{10\pi}{9}+2k\pi\vee\beta=\pi-\frac{10\pi}{9}+2l\pi;\,k,l\in Z$.

Како $\beta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, долази у обзир само $-\frac{\pi}{9}$. Дакле $arc\,sin\left(sin\frac{10\pi}{9}\right)=-\frac{\pi}{9}$.

Задатак се може решити и на следећи начин:

$$arc\,sin\left(sin\frac{10\pi}{9}\right)=arc\,sin\left(sin\left(\pi+\frac{\pi}{9}\right)\right)=arc\,sin\left(sin\left(-\frac{\pi}{9}\right)\right)=-\frac{\pi}{9}.$$

в) $arc\sin\left(\sin\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}$.

г) $arc\sin\left(\sin 5\right)=arc\sin\left(\sin\left(5-2\pi\right)\right)=5-2\pi$.

д) $arc\sin\left(\sin 2022\right)=arc\sin\left(\sin\left(2022-644\pi\right)\right)=2022-644\pi$.

ђ) $arc\sin\left(\sin 2021\right)=arc\sin\left(\sin\left(\pi-2021\right)\right)=arc\sin\left(\sin\left((\pi-2021)+642\pi\right)\right)=$

$=arc\sin\left(\sin\left(643\pi-2021\right)\right)=643\pi-2021$.

е) $$arc\sin\left(\cos\frac{33\pi}{5}\right)=arc\sin\left(\cos\left(6\pi+\frac{3\pi}{5}\right)\right)=arc\sin\left(\cos\frac{3\pi}{5}\right)=$$

$$=arc\sin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{10}\right)\right)=arc\sin\left(-\sin\frac{\pi}{10}\right)=arc\sin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)\right)=-\frac{\pi}{10}.$$

3) Израчунати:

а) $arc\cos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)$; б) $arc\cos\left(\cos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$; в) $arc\cos\left(\cos 6\right)$;

г) $arc\cos\left(\cos 7\right)$; д) $arc\cos\left(\cos 2021\right)$; ђ) $arctg\left(tg\frac{9\pi}{7}\right)$;

е) $arctg\left(ctg\frac{8\pi}{3}\right)$.

Решење:

а) Нека је $\beta=arc\cos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)$. Тада је $\cos\beta=\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)$ и $\beta\in\left[0,\pi\right]$.

Како је $\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{7}\right)$ биће $\cos\beta=\cos\frac{9\pi}{14}$,

дакле $\beta=\frac{9\pi}{14}+2k\pi\vee\beta=-\frac{9\pi}{14}+2l\pi;\ k,l\in Z$. Како је $\beta\in\left[0,\pi\right]$,

долази у обзир само $\beta=\frac{9\pi}{14}$. Дакле $arc\cos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)=\frac{9\pi}{14}$.

Задатак се може решити и на следећи начин:

$$arc\cos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)=arc\cos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{7}\right)\right)=\ arc\cos\left(\cos\frac{9\pi}{14}\right)=\frac{9\pi}{14}.$$

б) $arc\cos\left(\cos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)=arc\cos\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

в) $arc\cos(\cos 6)=arc\cos(\cos(-6))=arc\cos(\cos(-6+2\pi))=2\pi-6.$

г) $arc\cos(\cos 7)=arc\cos(\cos(7-2\pi))=7-2\pi.$

д) $arc\cos(\cos 2021)=arc\cos(\cos(-2021))=arc\cos(\cos(-2021+644\pi))=$

$=644\pi-2021.$

ђ) $arctg\left(tg\frac{9\pi}{7}\right)=arctg\left(tg\left(\pi+\frac{2\pi}{7}\right)\right)=arctg\left(tg\frac{2\pi}{7}\right)=\frac{2\pi}{7}.$

е) $arctg\left(ctg\frac{8\pi}{3}\right)=arctg\left(ctg\left(2\pi+\frac{2\pi}{3}\right)\right)=arctg\left(ctg\frac{2\pi}{3}\right)=arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\pi}{6}.$

4) Израчунати:

а) $\cos\left(arc\cos\frac{3}{5}+arc\sin\frac{8}{17}\right);$ б) $\sin 2\left(arc\sin\frac{1}{\sqrt{3}}\right);$

в) $\sin\left(\frac{1}{2}arc\sin\frac{5}{13}\right);$ г) $\sin(arctg 3);$

Решење: а) Означимо $arc\cos\frac{3}{5}=\alpha$ и $arc\sin\frac{8}{17}=\beta\ \Rightarrow\ \cos\alpha=\frac{3}{5}, 0\le\alpha\le\pi$ и $\sin\beta=\frac{8}{17}$ $-\frac{\pi}{2}\le\beta\le\frac{\pi}{2}$. Налазимо $\sin a=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$ и $\cos\beta=\sqrt{1-\left(\frac{8}{17}\right)^2}=\frac{15}{17}$. Па је

$$\cos\left(arc\cos\frac{3}{5}+arc\sin\frac{8}{17}\right)=\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{3}{5}\cdot\frac{15}{17}-\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{17}=\frac{13}{85}.$$

б) $sin2x = 2sin\,x \cdot cos\,x$;

$$arc\,sin\frac{1}{\sqrt{3}} = \alpha \Rightarrow sin\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2},\ cos\,\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}};$$

$$sin2\left(arc\,sin\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2sin\left(arc\,sin\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot cos\left(arc\,sin\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

в) $sin\frac{1}{2}x = \pm\sqrt{\frac{1-cos\,x}{2}}$; $arc\,sin\frac{5}{13} = \alpha \Rightarrow sin\,\alpha = \frac{5}{13}, \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]; \Rightarrow cos\,\alpha = \frac{12}{13};$

$$sin\left(\frac{1}{2}arc\,sin\frac{5}{13}\right) = \sqrt{\frac{1-cos\left(arc\,sin\frac{5}{13}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1-cos\,\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{12}{13}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{26}}\cdot\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{26}}{26}.$$

г) $sin(arctg3) = \frac{tg(arctg3)}{\sqrt{1+tg^2(arctg3)}} = \frac{3}{\sqrt{1+3^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.

5) Доказати идентитете:

а) $arc\,sin\,x + arc\,cos\,x = \frac{\pi}{2}$, б) $arc\,sin(-x) = -arc\,sin\,x$,

в) $arc\,cos(-x) = \pi - arc\,cos\,x$, г) $arctgx + arcctgx = \frac{\pi}{2}$,

д) $arctg(-x) = -arctgx$, ђ) $arcctg(-x) = \pi - arcctgx$.

Доказ: а) Нека је $\alpha = arc\,sin\,x$. Тада је $sin\,\alpha = x$ и $cos\,\alpha = \sqrt{1-x^2}$, (из услова $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ следи да не долази у обзир $cos\,\alpha = -\sqrt{1-x^2}$). Нека је $\beta = arc\,cos\,x$. Тада је $cos\,\beta = x$ и $sin\,\beta = \sqrt{1-x^2}$. Дакле $sin(\alpha+\beta) = x^2 + 1 - x^2 = 1$, па је $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z$.

Међутим, из услова $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\beta \in [0, \pi]$ следи $\alpha + \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, па је $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

б) Из услова $-\frac{\pi}{2} \le arc\,sin\,x \le \frac{\pi}{2}$ следи $-\frac{\pi}{2} \le -arc\,sin\,x \le \frac{\pi}{2}$. Такође је

$-\frac{\pi}{2} \le arc\,sin(-x) \le \frac{\pi}{2}$. По дефиницији функције $arc\,sin\,x$ је $sin(arc\,sin(-x)) = -x$, а

због непарности функције $\sin x$ је $\sin(-\arcsin x) = -\sin(\arcsin x) = -x$. Дакле, синуси два угла: $\arcsin(-x)$ и $-\arcsin x$ из интервала $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ су једнаки, па следи да су и ти углови једнаки, тј. да је $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

в) Нека је $\alpha = \arccos(-x)$. Тада је $\cos\alpha = -x$, па је $\cos(\pi - \alpha) = x$. Због $0 \le \alpha \le \pi$ је и $0 \le \pi - \alpha \le \pi$, па је $\pi - \alpha = \arccos x$, односно $\alpha = \pi - \arccos x$ и, коначно: $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

г), д) и ђ) слично претходном.

6) Доказати идентитете:

а) $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$, за $x \in [-1,1]$;

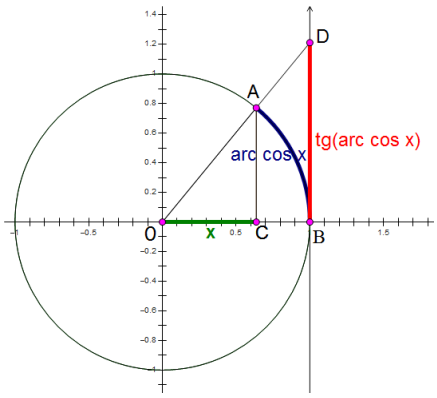
б) $\sin(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$, за $x \in R$;

в) $\operatorname{tg}(\arccos x) = \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$, за $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$;

г) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{x}$, за $x \in R \setminus \{0\}$;

д) $\arcsin(\cos x) = \dfrac{\pi}{2} - x$, за $x \in [0, \pi]$.

Доказ: Докажимо само једнакост под в) јер се остале слично доказују.



Из $\Delta OBD \sim \Delta OCA$ следи $BD : OB = CA : OC$,

одакле је $\operatorname{tg}(\arccos x) : 1 = \sqrt{1 - x^2} : x$ и најзад $\operatorname{tg}(\arccos x) = \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$.

7) Израчунати: $arctg3 + arctg\frac{1}{2}$.

Решење:

$$x > 0 \Rightarrow arctgx > 0;\ 0 < arctg3 + arctg\frac{1}{2} < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi;\ tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta};$$

$$\alpha = arctg3,\ \beta = arctg\frac{1}{2},\quad \gamma = \alpha + \beta,\quad 0 < \gamma < \pi,\quad tg\alpha = 3,\ tg\beta = \frac{1}{2};$$

$$tg\gamma = tg(\alpha+\beta) = \frac{3 + \frac{1}{2}}{1 - 3\cdot\frac{1}{2}} = -7 \quad \Rightarrow \quad \gamma = arctg(-7) + k\pi, 0 < \gamma < \pi;$$

$$\gamma = arctg(-7) + \pi = -arctg7 + \pi = \pi - arctg7 \ \Rightarrow\ arctg3 + arctg\frac{1}{2} = \pi - arctg7.$$

8) Доказати идентитет $arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + arctg\frac{\sqrt{2}}{2} = arctg\left(1+\sqrt{2}\right)^2$.

Решење: Нека је $\alpha = arctg\frac{\sqrt{2}}{2}$, због $arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ и

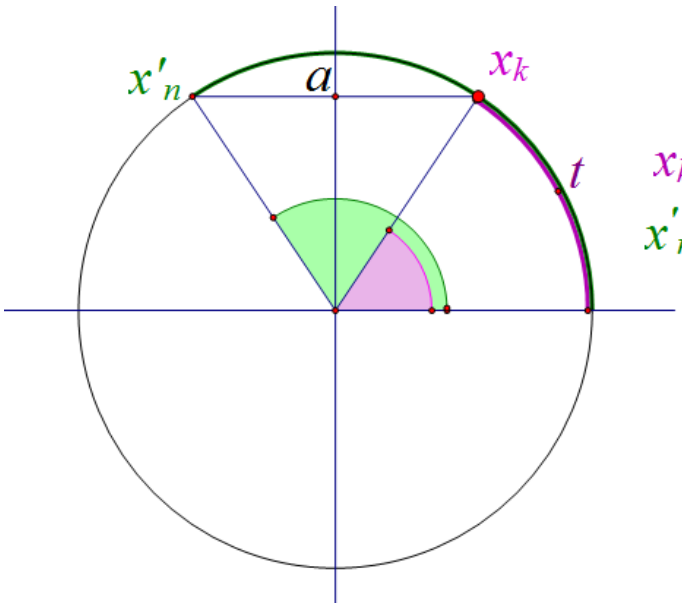
$\frac{\pi}{4} + \alpha < \frac{\pi}{2};\left(0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \Rightarrow 0 < \alpha < \frac{\pi}{4}\right)$ биће $\frac{\pi}{4} + \alpha = arctg\left(tg\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\right)$.

Како је $tg\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $tg\frac{\pi}{4} = 1$ па је

$$tg\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{tg\frac{\pi}{4} + tg\alpha}{1 - tg\frac{\pi}{4}\cdot tg\alpha} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\left(2+\sqrt{2}\right)^2}{2^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{6+4\sqrt{2}}{2} = 3 + 2\sqrt{2} = \left(1+\sqrt{2}\right)^2.$$ Дакле $\frac{\pi}{4} + \alpha = arctg\left(1+\sqrt{2}\right)^2$.

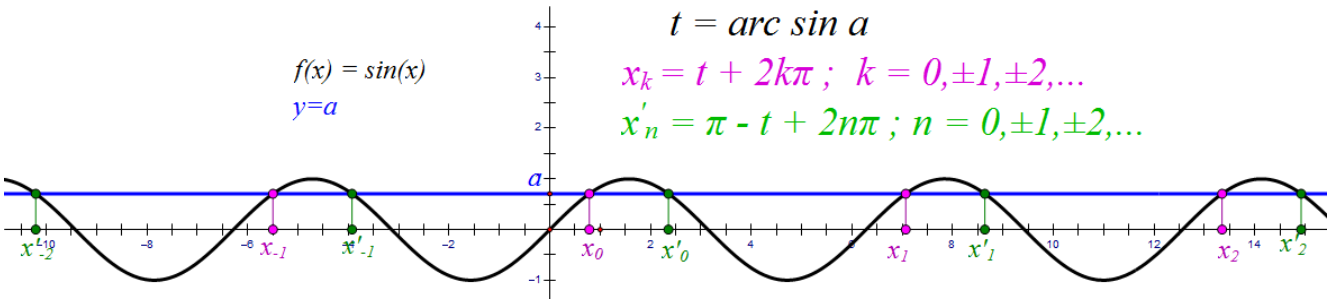
Једначина $\sin x = a$



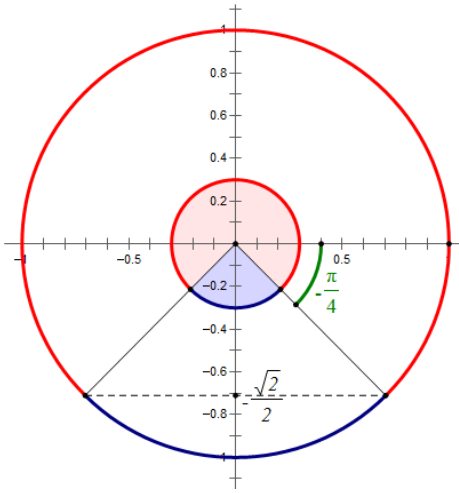
$$t = \arcsin a$$

$$x_k = t + 2k\pi\ ;\quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$x'_n = \pi - t + 2n\pi\ ;\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$



Тригонометријске неједначине



$$\sin x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

$$\sin x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

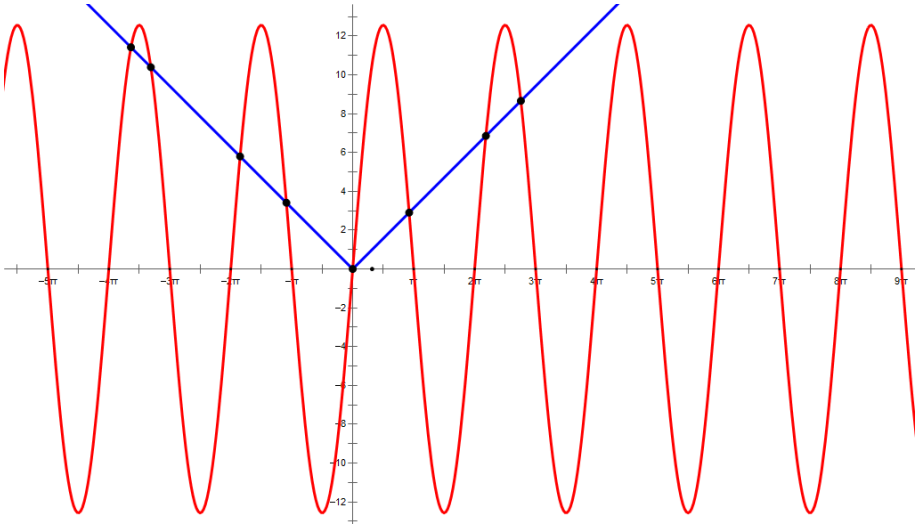
$$\frac{5\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

Задаци са такмичења и пријемних испита

1. Једначина $|x| = 4\pi \sin x$ има:

A) тачно 1 решење B) тачно 3 решења C) тачно 4 решења

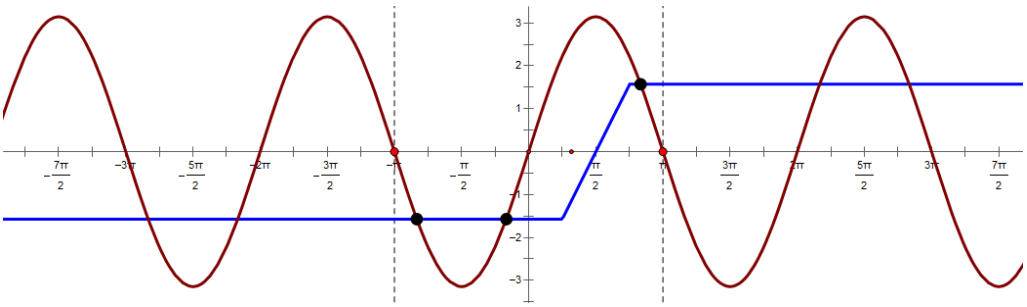
D) тачно 8 решења E) више од 8 решења



Решење: Под D.

2. Број оних решења једначине $\pi \sin x = \left|x - \frac{\pi}{4}\right| - \left|x - \frac{3\pi}{4}\right|$, која припадају интервалу $(-\pi, \pi)$, једнак је:

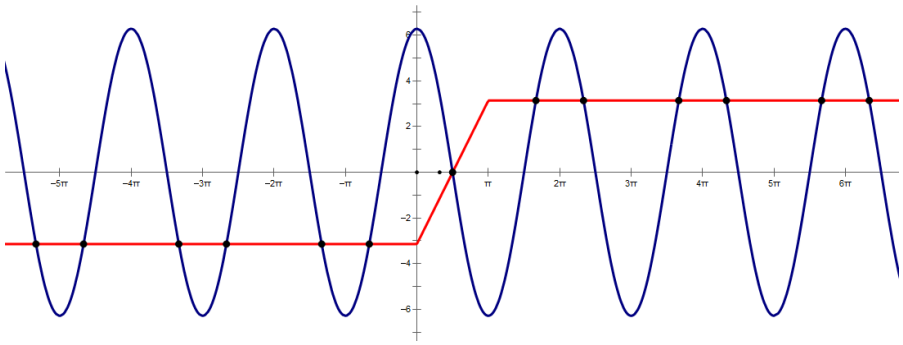
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4



Решење: Под D.

3. Колико решења има једначина $2\pi \cos x = |x| - |x - \pi|$:

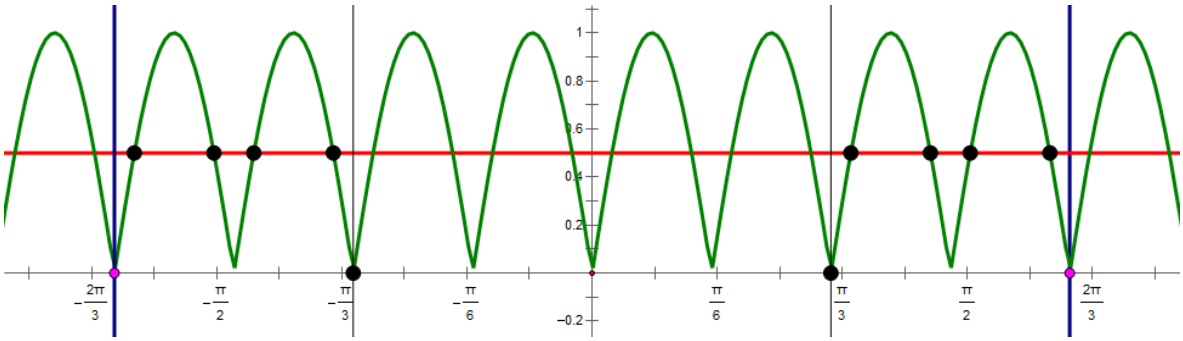
A) ∞ B) 0 C) 2 D) 3 E) 4



Решење: Под А.

4. Број решења једначине $\sqrt{4x^2-4}\cdot|\sin 2\pi x|=\sqrt{x^2-1}$, који задовољавају услов $|x|\le 2$ је:

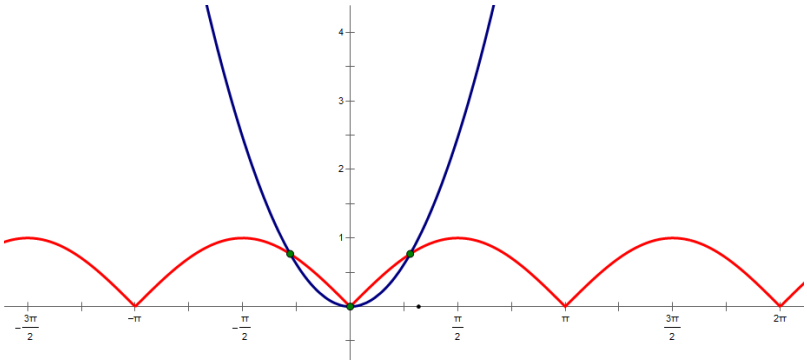
A) 6 B) 8 C) 10 D) 16 E) 18



Решење: Једначина постији када је $x^2-1\ge 0$ тј. $x\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$. Решења су ± 1 а остала се добијају као пресек функција $y=\frac{1}{2}$ и $y=|\sin 2\pi x|$ у интервалу од $[-2,1)\cup(1,2]$. Дакле решење је под С.

5. Број решења једначине $x^2-|\sin x|=0$ је:

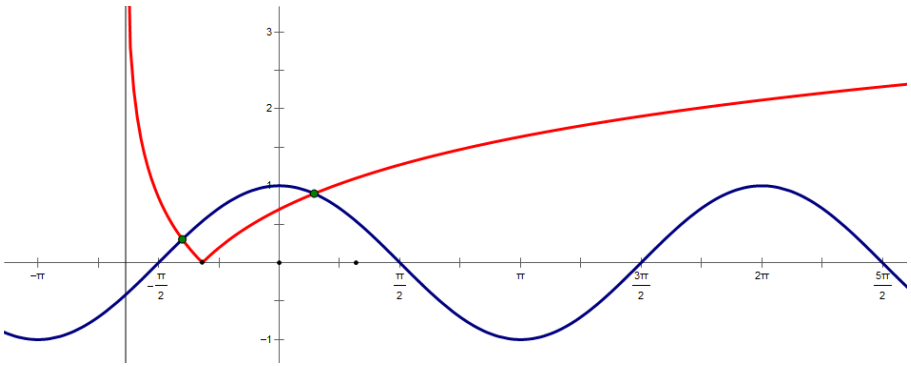
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) више од 3



Решење: Под D.

6. Број решења једначине $|\ln(x+2)| = \cos x$ је:

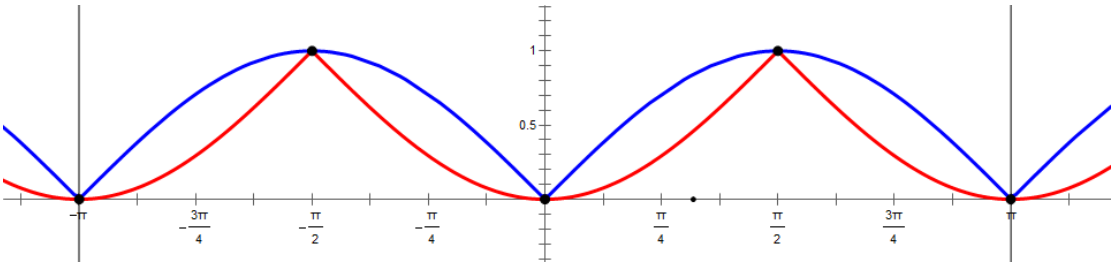
A) 2 B) 1 C) 0 D) 3 E) више од 3



Решење: Под А.

7. Број решења неједначине $|\sin x| + |\cos x| \le 1$, која припадају сегменту $[-\pi, \pi]$ је:

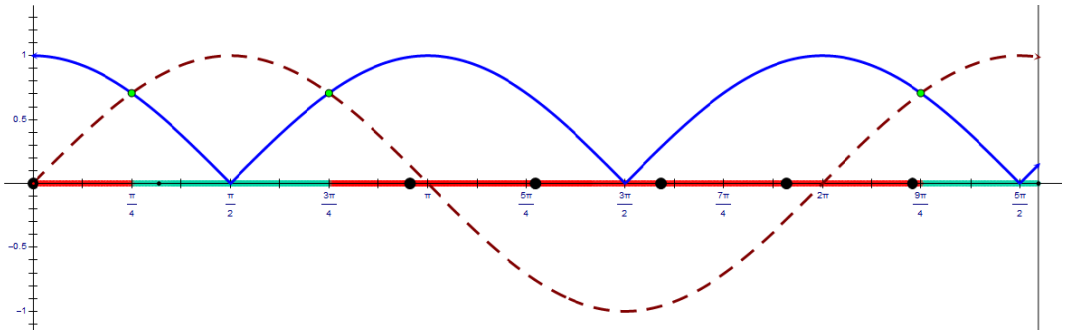
A) 0 B) 3 C) 5 D) 7 E) више од 7



Решење: Ако нацртамо графике функција $y = |\sin x|$ и $y = 1 - |\cos x|$ на сегменту $[-\pi, \pi]$ видимо да је решење дате неједначине под С.

8. Број целобројних решења неједначине $\sin x < |\cos x|$ у интервалу $[0,8]$ једнак је:

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8



Решење: Под С.

9. Израчунати: $arc\,ctg 5 + arc\,tg \frac{2}{3}$.

Решење:

$$tg\left(arc\,ctg 5 + arc\,tg \frac{2}{3}\right) = \frac{tg\left(arc\,ctg 5\right) + tg\left(arc\,tg \frac{2}{3}\right)}{1 - tg\left(arc\,ctg 5\right)\cdot tg\left(arc\,tg \frac{2}{3}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{ctg\left(arc\,ctg 5\right)} + \frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{ctg\left(arc\,ctg 5\right)}\cdot\frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{5} + \frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}} = \frac{\frac{13}{15}}{\frac{13}{15}} = 1 \quad \Rightarrow \quad arc\,ctg 5 + arc\,tg \frac{2}{3} = \frac{\pi}{4}.$$

10. Доказати да је $\dfrac{\pi}{arc\,tg \frac{1}{\sqrt{27}} + arc\,sin\sqrt{\frac{3}{28}}}$ природан број.

Решење: Нека је $\alpha = arc\,tg \frac{1}{\sqrt{27}}$, $\beta = arc\,sin\sqrt{\frac{3}{28}}$. Како је $\frac{1}{\sqrt{27}}$ и $\sqrt{\frac{3}{28}} > 0$

α и β су оштри углови следи:

$$tg\,\alpha = \frac{1}{3\sqrt{3}}, \quad sin\,\beta = \sqrt{\frac{3}{28}} \Rightarrow cos\,\beta = \sqrt{1 - \frac{3}{28}} = \frac{5}{\sqrt{28}} \Rightarrow tg\,\beta = \frac{sin\,\beta}{cos\,\beta} = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

$$tg\left(\alpha + \beta\right) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\cdot tg\beta} = \frac{\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{5}}{1 - \frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{5}} = \frac{\frac{5+9}{15\sqrt{3}}}{\frac{15\sqrt{3} - \sqrt{3}}{15\sqrt{3}}} = \frac{14}{14\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Како су α и β оштри улови следи $\alpha + \beta \in \left(0, \pi\right)$.Једини угао из интервала $\left(0, \pi\right)$ чији је тангенс $\frac{\sqrt{3}}{3}$ је $\frac{\pi}{6}$ па следи $\alpha + \beta = \frac{\pi}{6}$.

Дакле $\dfrac{\pi}{arctg\dfrac{1}{\sqrt{27}}+arcsin\sqrt{\dfrac{3}{28}}}=\dfrac{\pi}{\frac{\pi}{6}}=6,\quad 6\in N.$

11. Доказати да је $arctg\,2+arctg\,3=\dfrac{3\pi}{4}$.

Решење: Нека је $\alpha=arctg\,2$ и $\beta=arctg\,3$, тј. $tg\alpha=2$ и $tg\beta=3$. Одавде је $\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ и $\dfrac{\pi}{4}<\beta<\dfrac{\pi}{2}$. Како је $tg\left(\alpha+\beta\right)=\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}=-1$, због услова $\dfrac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$ добија се $\alpha+\beta=\dfrac{3\pi}{4}$.

12. Доказати да је: $4arctg\dfrac{1}{5}-arctg\dfrac{1}{239}=\dfrac{\pi}{4}$.

Решење: Лева страна је аргумент комплексног броја

$\left(5+i\right)^4\cdot\left(239-i\right)=\left(476+480i\right)\cdot\left(239-i\right)=114244+114244i$, дакле једнака $\dfrac{\pi}{4}$.

13. Дата је једначина $\left(arcsin\,x\right)^3+\left(arccos\,x\right)^3=a\pi^3$.

а) Показати да једначина нема решења ако је $a<\dfrac{1}{32}$.

б) Решити једначину у случајевима $a=\dfrac{1}{8}$ и $a=\dfrac{7}{8}$.

Решење: а) Сменом $t=arcsin\,x$ једначина добија облик $t^3+\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)^3=a\pi^3$, односно $12t^2-6\pi t+\pi^2\left(1-8a\right)=0$. Дискриминанта ове једначине је $D=36\pi^2-48\pi^2\left(1-8a\right)$ = $=12\pi^2\left(32a-1\right)$. Једначина нема реалних решења ако је $D<0$, тј. ако је $a<\dfrac{1}{32}$.

б) За $a=\dfrac{1}{8}$ је $t=0\ \vee\ t=\dfrac{\pi}{2}$. Дакле, за $a=\dfrac{1}{8}$, решења једначине су $x=sin\,0=0$

$x = sin\frac{\pi}{2} = 1$. За $a = \frac{7}{8}$ је $t = -\frac{\pi}{2} \vee t = \pi$. Како је $t = \pi$ у контрадикцији са

$t = arc\,sin\,x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, остаје само $t = -\frac{\pi}{2}$, односно $x = sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

14. Доказати да за свако $x \in [-1,1]$ важи неједнакост: $arc\,sin\,x \cdot arc\,cos\,x \le \frac{\pi^2}{16}$.

Решење: Пошто је $arc\,cos\,x = \frac{\pi}{2} - arc\,sin\,x$ биће

$$arc\,sin\,x \cdot arc\,cos\,x = arc\,sin\,x \cdot \left(\frac{\pi}{2} - arc\,sin\,x\right) = -\left(arc\,sin\,x\right)^2 + \frac{\pi}{2} arc\,sin\,x.$$

Међутим, функција $y = -t^2 + \frac{\pi}{2}t$ има максимум $y = \frac{\pi^2}{16}$ за $t = \frac{\pi}{4}$.

15. Упростити израз $sin\left(2arctg\,x\right) + cos\left(2arctg\,x\right) + sin^2\left(arctg\,x\right)$.

Решење: Како је $sin\,2\alpha = \frac{2tg\,\alpha}{1+tg^2\alpha}$, $cos\,2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$, $sin\,\alpha = \pm\frac{tg\,\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$ добијамо

$$sin\left(2arctg\,x\right) + cos\left(2arctg\,x\right) + sin^2\left(arctg\,x\right) = \frac{2x}{1+x^2} + \frac{1-x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{2x+1}{x^2+1}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ђ. Дугошија, Ж. Ивановић: Тригонометрија; "Круг" - Београд, 2006.

2. Д. Георгијевић, М. Обрадовић: Mathematiskop 4; "Mathematiskop" - Београд, 2000.

3. Н. Икодиновић: Математика 1; "Klett' '- Београд, 2019.

4. Н. Икодиновић, С. Димитријевић, С. Алексић: Математика 2; "Klett" - Београд, 2015.

5. Друштво математичара Србије: Настава математике; 1992/1, 1993/2.

6. Друштво математичара Србије: Материјал са семинара о настави тригонометрије;

Београд, 2009.

7. Друштво математичара Србије: Материјал са семинара о функцијама; Београд, 2003.

8. Л. Милин, Ж. Ивановић: Збирка решених задатака из тригонометрије са задацима за

такмичења и пријемне испите на факултетима; "Научна књига" - Београд, 1984.

9. Вене Т. Богославов: Збирка решених задатака из математике 2; "Завод за уџбенике и наставна средства' '- Београд 2003.

10. Ж. Ивановић, С. Огњановић: Математика 2 – збирка задатака и тестова за други разред гимназија и техничких школа; "Круг" - Београд, 2004.

11. Маја Марасовић: Тригонометрија у Геогебри и њена примена у настави математике;

Дипломски рад - Загреб 2018.

12. https://www.geogebra.org/materials.