А зашто не овако *

Почетком ове школске године, на часу одржаном у трећем разреду на природном смеру, задао сам следећи пример:

> Збир дужина три ивице правилне призме које полазе из истог темена је 9. Одредити димензије призме тако да површина омотача буде максимална, ако је призма:
> а) тространа; б) четворострана; в) шестострана.[1]

Од 30 ученика, само једна ученица успела је да се сети x координате темена квадратне функције, али није имала представу шта та формула значи, нити да јој је потребна да би решила задатак (у моју одбрану, одељење сам добио ове школске године; незгодно је то што је више од пола ученика имало врло добру или одличну оцену на крају другог разреда). Наравно, има много ученика којима сам лично предавао четири године, а који су стекли врло скромна знања о математици, али зато су имали недовољну или, евентуално, довољну оцену. Притисци којима сам сваке године изложен су огромни, количина ирационалности међу родитељима, али и међу колегиницама и колегама се увећава експоненцијално. Овај пример наводим као показатељ пропасти у коју срљамо сад већ деценијама. Некритички се дају четворке и петице, ,,анестезирамо" децу зарад мира у школи. Логична последица таквог приступа јесте да ниво знања драстично опада, а радне навике и одговорност све ређе спадају у особине наших ученика.

Решење у случају тростране призме:

$$2a + H = 9 \wedge M = 3aH$$

$$M = 3a(9 - 2a) \Rightarrow M = -6a^2 + 27a \Rightarrow M = -6\left(a^2 - \frac{9}{2}a\right)$$

$$M = -6\left(a^2 - \frac{9}{2}a + \frac{81}{16} - \frac{81}{16}\right) \Rightarrow M = -6\left(a - \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{243}{8}$$

Стицајем околности имам релативно добар увид у то како радимо, не само у Београду. То није репрезентативан узорак, али трендови се назиру. Све већи број наставника напише потребне формуле на табли или (модернији приступ) у презентацији, без доказивања и крене са израдом задатака. Не могу рећи да их не разумем, али морамо бити свесни да смо, ма колико лоши били, последња брана ,,дебилизацији" наставе у школи. Очигледно је да што мање тражимо, мање добијамо, и да то спуштање може да траје у недоглед.

*Зимски Државни семинар Друштва математичара Србије, 9. фебруар 2020.

[1] задатак из уџбеника математике за трећи разред гимназије, аутор Јован Д. Кечкић

Пројектни задатак број 1 - Вештина рачунања

Добра рачунска техника врло је важан каменчић у мозаику који желимо да изградимо код наших ученика, а потпуно је неоправдано запостављена уз објашњење да данас сви имају дигитроне и да их не треба замарати небитним детаљима.
Следи одређени број задатака којима желимо да подстакнемо наставнике да покушају да своје часове обогате понеким рачунским изазовом, наравно у складу с текућим градивом.

1. $2018 \cdot 146 - (2018 - 18 \cdot (4 + 5 \cdot 20)) \cdot 18$
2. $\dfrac{\left(1\frac{3}{25} - 1,87\right) \cdot 1,2 - 1,25 : 1\frac{7}{18}}{1,4 : 0,01 - 50}$
3. $\dfrac{1,2 : 0,375 - 0,2}{6\frac{4}{25} : 15\frac{2}{5} + 0,8} = \dfrac{0,016 : 0,12 + 0,7}{x}$
4. $\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{40} + \dfrac{1}{88} + \dfrac{1}{154} + \dfrac{1}{238}$
5. Дате изразе поређати по вредности од најмање до највеће
   - (i) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7}\right)$;
   - (ii) $(-0,125)^7 \cdot 8^8$;
   - (iii) $(-11) + (-33) - (-55) - (-66) - (-77) - (-88)$
   - (iv) $\left(-\dfrac{75}{13}\right)^2 + \left(\dfrac{37}{13}\right)^2$
   - (v) $\left[\left(-\dfrac{6}{7}\right)^7 + \left(-\dfrac{4}{5}\right) \cdot \left(-\dfrac{4}{9}\right) \cdot \dfrac{16}{81}\right] \cdot \left(9\dfrac{246}{247} - 0,666\right)$
6. $\dfrac{20182019^2 - 20182018^2}{20182018 \cdot 20182020 - 20182017 \cdot 20182019}$
7. $1755\frac{23}{3571} \cdot 1754\frac{23}{3571} - 1756\frac{23}{3571} \cdot 1753\frac{23}{3571}$
8. $\dfrac{83^3 + 17^3}{83 \cdot 66 + 17^2}$
9. $\dfrac{10^{2005} + 1}{10^{2006} + 1} \rho \dfrac{10^{2006} + 1}{10^{2007} + 1}$
10. $\left(\sqrt{\left(\sqrt{2} - \dfrac{3}{2}\right)^2} - \sqrt[3]{(1 - \sqrt{2})^3}\right)^2 + 2^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$
11. $\sqrt{1 + \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2}} + \cdots + \sqrt{1 + \dfrac{1}{2019^2} + \dfrac{1}{2020^2}} = 2020 - \dfrac{1}{2020}$

Пројектни задатак број 2 - Оптимално решавање једначина

Овде је наведено неколико примера једначина уз изазов да се решење одреди уз мало сналажења и помоћу добрих идеја уместо примене „грубе силе". Циљ није доћи до решења већ наћи елегантан начин да се једначине или неједначине реше.

1. Решити једначину $\frac{x+106}{1914}+\frac{x-1325}{3345}=\frac{x+79}{1941}+\frac{x+631}{1389}$.

2. Решити једначину $\dfrac{\dfrac{\dfrac{\frac{5}{6}x+1}{7}+x-5}{11}+x-2}{8}=x-21$.

3. Решити једначину $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{4+\dfrac{3}{x+1}}}}=\frac{16}{37}$.

4. Да ли једначина $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}=\frac{13}{12}$ има решење у скупу $\mathbb{N}$?

5. Решити једначину $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^8}+\frac{1}{x^{12}}-\frac{4}{x^7}=0$

6. Решити једначину $\frac{(m-1)(2x+m)}{m+1}=\frac{(x-m)(m-1)}{m+1}+\frac{x(m+1)}{m-1}$

7. $\frac{3x}{a^3-8}-\frac{a}{a^2+2a+4}=\frac{x-1}{a-2}$

   а) Решити једначину по непознатој x;
   б) за које $a\in\mathbb{R}$ је $x>0$?
   в) за које $a\in\mathbb{R}$ је $x=0$?

8. Решити једначину $\frac{9b^2-8}{2x+4}+\frac{4-3b^2}{2-x}=\frac{4b+3b^2x}{x^2-4}$ по непознатој x. За које $b\in\mathbb{R}$ је $x\leq 4\frac{2}{5}$?

9. Решити неједначине: а) $\frac{4x^2+4x+1}{x-5}\geq 0$; б) $\frac{(x-1)^2}{2x+3}>0$; в) $\frac{|x-2|}{x}\leq 0$

10. Решити неједначину $18x^3+45x^2+19x-12\leq 0$

11. Решити неједначину $\frac{2}{|2x-3|-1}+\frac{3}{|2x-3|+2}\leq 0$

12. Једначина $x-a=2|2\sqrt{x^2}-a^2|$ има максималан број решења ако и само ако је:
    А) $a<0\vee a>2$; Б) $a\leq -2\vee a\geq -\frac{1}{2}$; В) $-2<a<0$; Г) $|a|\leq 1$; Д) $-2<a<-\frac{1}{2}$.

Цртице из историје математике

Франсоа Вијет (François Viète, Фонтне ле Конт, 1540 — Париз, 23. фебруар 1603) ушао је у историју математике као један од заслужних за развој алгебре и математичке нотације, иако је по образовању био правник, а математиком се бавио из хобија. Велики део свог радног века провео је у служби француских краљева Анрија III и Анрија IV чије су владавине ушле у историју као доба великих политичких и религиозних превирања. Кажу да је Вијетова љубав према математици била толика да је имао обичај да остане у својим одајама и неколико узастопних дана изучавајући је, а за то време би јео и спавао тек толико колико је било потребно да преживи.

Слика 1: Портрет Франсоа Вијета.

Вијет је најпре радио као правни заступник виђених протестантских породица, да би затим постао саветник у Парламенту Бретање са седиштем у граду Рену. После неколико година добио је ново намештење, радио је као краљевски саветник и један од званичних посредника између краља и његових поданика. Према животопису из пера Фредерика Ритера сазнајемо да је у периоду од 1588. до 1594. Вијет званично радио као један од дворских дешифраната. Постоји доста извора који потврђују да је за мање од шест месеци успео да дешифрује нову номенклатуру[2] коју је шпански

[2]Шифре за стандардни алфабет плус списак од 413 речи с одговарајућим шифрама.

краљ Филип II користио за преписку са својим амбасадором на француском двору. Иако је коначни „превод” конкретне депеше стигао дан након што је Анри IV победио снаге Католичке лиге, па тако није у потпуности утицао на расплет догађаја, Филип II био је толико љут да се пожалио папи и оптужио Французе да су користили црну магију да би разбили шифарник. Због овог догађаја неки аутори сматрају Вијета оцем криптологије.[3]

Још једна анегдота у којој је Вијет радио у корист своје родне земље може се наћи у првом тому издања *Les Historiettes. Mémoires pour servir à l'histoire du XVIIe siècle* француског хроничара Жедеона Талмана де Роа (1619–1692) у оквиру четрдесет шесте приче, у целости посвећене нашем јунаку:

> За време владавине Анрија IV, Холанђанин по имену Адрианус Романус, математичар по образовању, али не толико учен колико је веровао да је био, објавио је књигу у којој је поставио изазов свим математичарима Европе, а да није навео ниједног из Француске. Убрзо потом, холандски амбасадор посетио је француског краља у дворцу Фонтенбло. Краљ је уживао показујући му разне занимљивости и похвалио се како у његовом краљевству живе изузетни представници свих професија.
>
> „Али, Господине”, одговорио му је амбасадор, „немате математичара, пошто Адрианус Романус у свом каталогу не наводи ниједног Француза.”
>
> „Имам, имам”, рече краљ, „имам изузетног човека: потражите и доведите господина Вијета.”
>
> Господин Вијет, који је био краљев саветник, већ се налазио у Фонтенблоу; дошао је по позиву. Амбасадор је послао по књигу Адриануса Романуса и показао изазов Вијету који одлази до једног од прозора галерије у којој су се тада налазили, и пре него што ју је краљ напустио, оловком пише два решења. Увече је послао амбасадору још неколико решења и додао да ће му их дати онолико колико амбасадор жели, јер је то била једна од оних једначина с бесконачно много решења.[4]

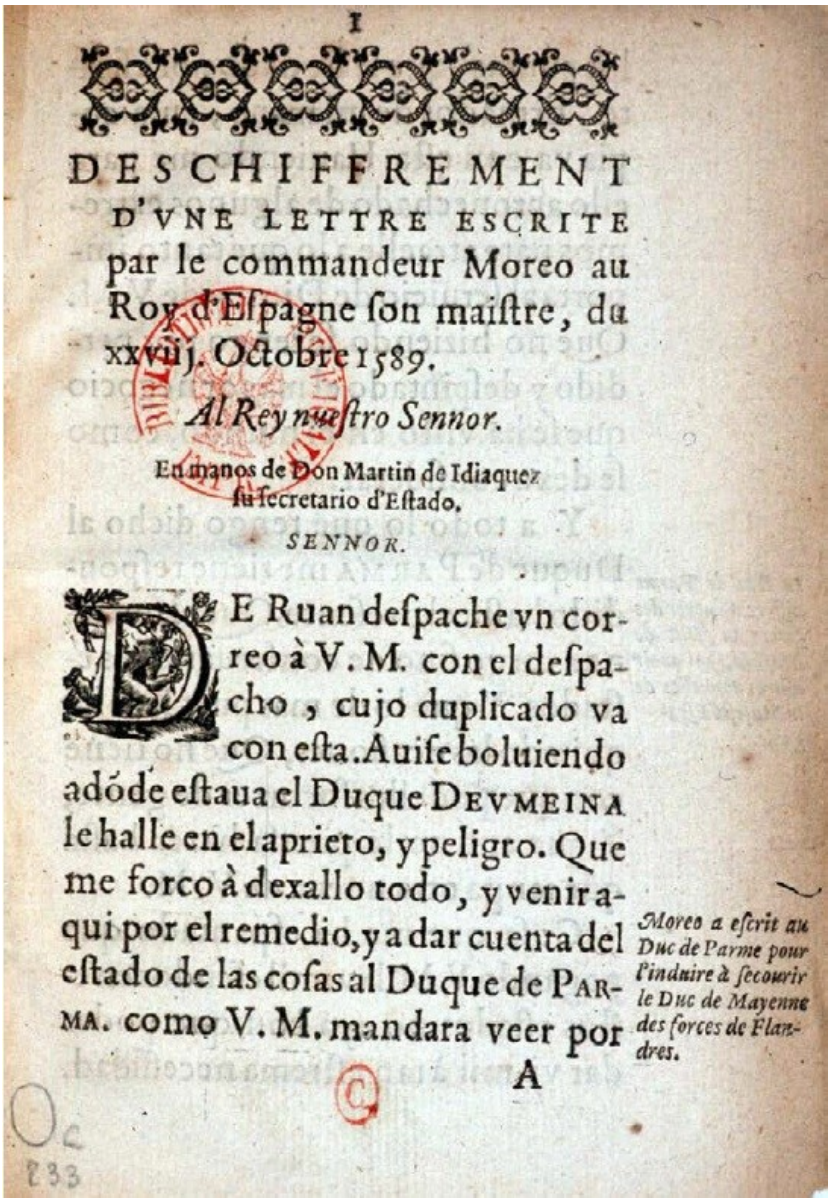
[3] Криптологија се може поделити на криптографију и криптоанализу. Криптографија се бави методама за слање порука у облик које може прочитати само онај коме је порука намењена. Криптоанализа се бави проналажењем начина за одгонетање шифроване поруке онда када није познат поступак шифровања.

[4] Du temps d'Henri IV, un Hollandais, nommé Adrianus Romanus, savant aux mathématiques, mais non pas tant qu'il croyait, fit un livre où il mit une proposition qu'il donnait à résoudre à tous les mathématiciens de l'Europe ; or, en un endroit de son livre il nommait tous les mathématiciens de l'Europe, et n'en donnait pas un à la France. Il arriva peu de temps après qu'un ambassadeur des États vint trouver le Roi à Fontainebleau. Le Roi prit plaisir à lui en montrer toutes les curiosités, et lui disait les gens excellents qu'il y avait en chaque profession dans son royaume.

"Mais, Sire, lui dit l'ambassadeur, vous n'avez point de mathématiciens, car Adrianus Romanus n'en nomme pas un de français dans le catalogue qu'il en fait."

"Si fait, si fait", dit le Roi, "j'ai un excellent homme : qu'on m'aille quérir M. Viète."

Le soir il en envoya plusieurs à cet ambassadeur, et ajouta qu'il lui en donneroit tant qu'il lui plairait, car c'était une de ces propositions dont les solutions sont infinies.



I

DESCHIFFREMENT D'VNE LETTRE ESCRITE par le commandeur Moreo au Roy d'Espagne son maistre, du xxviij. Octobre 1589.

Al Rey nuestro Sennor.

En manos de Don Martin de Idiaquez su secretario d'Estado.

SENNOR.

DE Ruan despache vn correo à V. M. con el despacho, cujo duplicado va con esta. Auise boluiendo adõde estaua el Duque DEVMEINA le halle en el aprieto, y peligro. Que me forco à dexallo todo, y venir aqui por el remedio, y a dar cuenta del estado de las cosas al Duque de PARMA. como V. M. mandara veer por

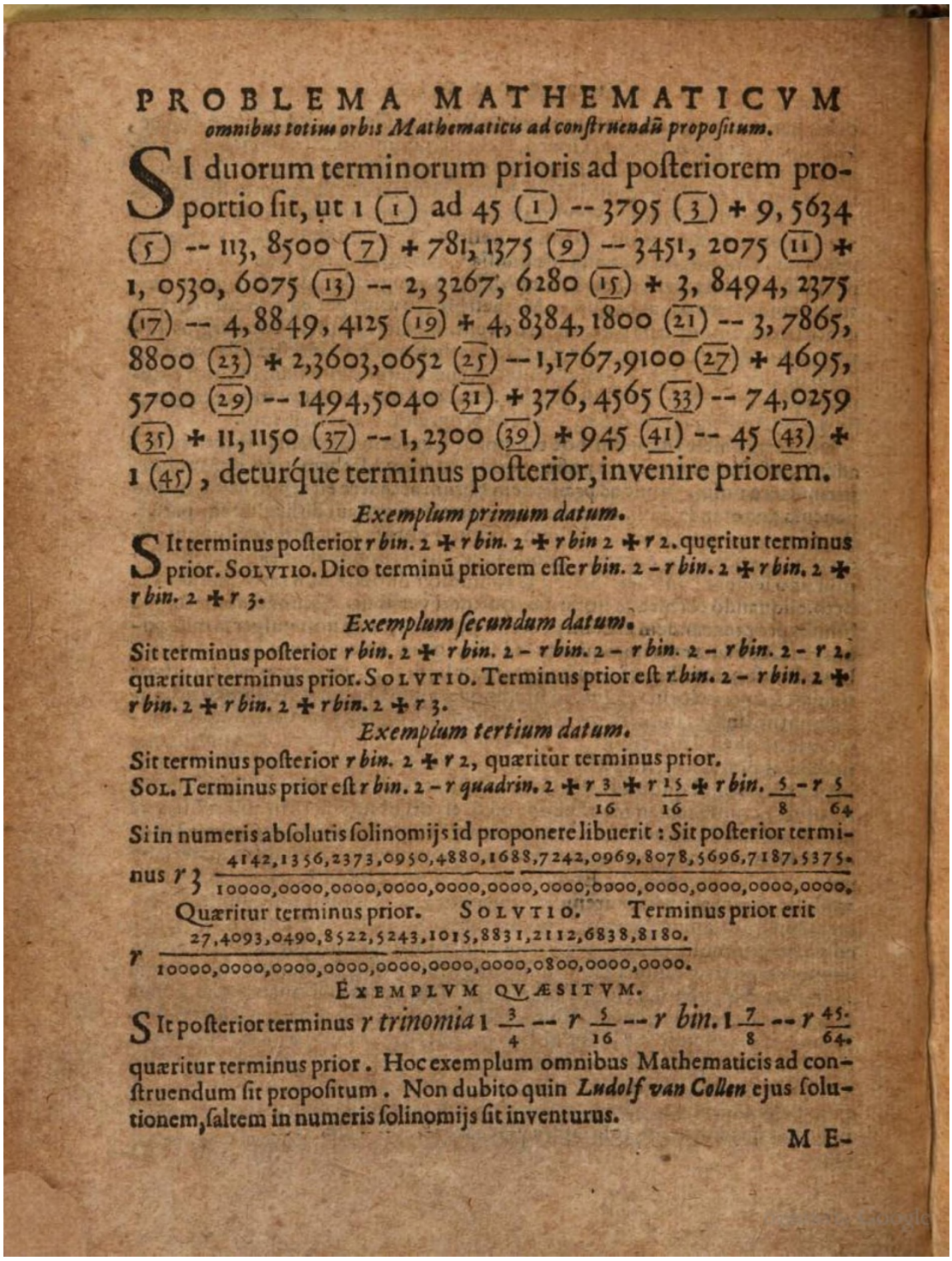
Moreo a escrit au Duc de Parme pour l'induire à secourir le Duc de Mayenne des forces de Flandres.

A

Слика 2: Вијетов дешифровани текст шпанске депеше.

Споменути фламанац Адриан ван Ромен (1561–1615) био је по образовању лекар и математичар, да би се 1604. замонашио и последње године живота провео као учитељ математике у Пољској. У свом тексту задао је једначину:

$$45(1)-3795(3)+95634(5)-1138500(7)+7811375(9)-34512075(11)+105306075(13)-232676280(15)+384942375(17)-488494125(19)+4838418000(21)-3786588000(23)+236030652(25)-117679100(27)+46955700(29)-14945040(31)+3764565(33)-740259(35)+111150(37)-12300(39)+945(41)-45(43)+1(45)$$



PROBLEMA MATHEMATICVM

omnibus totius orbis Mathematicis ad construendũ propositum.

SI duorum terminorum prioris ad posteriorem proportio sit, ut 1 (1) ad 45 (1) -- 3795 (3) + 9, 5634 (5) -- 113, 8500 (7) + 781, 1375 (9) -- 3451, 2075 (11) + 1, 0530, 6075 (13) -- 2, 3267, 6280 (15) + 3, 8494, 2375 (17) -- 4, 8849, 4125 (19) + 4, 8384, 1800 (21) -- 3, 7865, 8800 (23) + 2, 3603, 0652 (25) -- 1, 1767, 9100 (27) + 4695, 5700 (29) -- 1494, 5040 (31) + 376, 4565 (33) -- 74, 0259 (35) + 11, 1150 (37) -- 1, 2300 (39) + 945 (41) -- 45 (43) + 1 (45), deturque terminus posterior, invenire priorem.

Exemplum primum datum.

SIt terminus posterior *r bin.* 2 + *r bin.* 2 + *r bin* 2 + *r* 2. queritur terminus prior. SOLVTIO. Dico terminũ priorem esse *r bin.* 2 - *r bin.* 2 + *r bin.* 2 + *r bin.* 2 + *r* 3.

Exemplum secundum datum.

Sit terminus posterior *r bin.* 2 + *r bin.* 2 - *r bin.* 2 - *r bin.* 2 - *r bin.* 2 - *r* 2. quæritur terminus prior. SOLVTIO. Terminus prior est *r bin.* 2 - *r bin.* 2 + *r bin.* 2 + *r bin.* 2 + *r bin.* 2 + *r* 3.

Exemplum tertium datum.

Sit terminus posterior *r bin.* 2 + *r* 2, quæritur terminus prior.

SOL. Terminus prior est *r bin.* 2 - *r quadrin.* 2 + *r* $\frac{3}{16}$ + *r* $\frac{15}{16}$ + *r bin.* $\frac{5}{8}$ - *r* $\frac{5}{64}$

Si in numeris absolutis solinomijs id proponere libuerit: Sit posterior terminus *r* 3 $\frac{4142,1356,2373,0950,4880,1688,7242,0969,8078,5696,7187,5375.}{10000,0000,0000,0000,0000,0000,0000,0000,0000,0000,0000,0000.}$

Quæritur terminus prior. SOLVTIO. Terminus prior erit

r $\frac{27,4093,0490,8522,5243,1015,8831,2112,6838,8180.}{10000,0000,0000,0000,0000,0000,0000,0800,0000,0000.}$

EXEMPLVM QVÆSITVM.

SIt posterior terminus *r trinomia* 1 $\frac{3}{4}$ -- *r* $\frac{5}{16}$ -- *r bin.* 1 $\frac{7}{8}$ -- *r* $\frac{45}{64}$. quæritur terminus prior. Hoc exemplum omnibus Mathematicis ad construendum sit propositum. Non dubito quin *Ludolf van Collen* ejus solutionem, saltem in numeris solinomijs sit inventurus.

M E-

Слика 3: Ван Роменов изазов савременицима.

и позвао велике европске математичаре да је реше. На списку су се налазили следећи ван Роменови савременици:

Кристофер Клавијус
Гвидобалдо дел Монте
Ђовани Антонио Мађини
Јан де Гроа, отац филозофа Хуга Гроција
Лудолф ван Цојлен
Мишел Коање
Николас Петерсон
Симон Стевин
Тихо Брахе
Валентин Ото
Бернард Лодел де Мусон
Јанс ван ден Веге с ученицима
Томас Фијенус
Корнелис ван Опмер

Након што је видео једначину Вијет је препознао да се у њој крије подела лука на 45 једнаких делова, а Роменови примери наведени испод једначине на то јасно указују.[5] Решења која је дао Вијет одговарају луку од 8° (односно од $\frac{2\pi}{45}$ радијана), а кад је одредио прво, после је било лако наћи и преостала, тада прихватљива, 22 решења и следећег дана их уручити холандском амбасадору. Наводно је Вијет тада изјавио „Ut legi, ut solvi".[6]

[5] Вијет је већ раније открио једнакост која повезује $\sin n\theta$ са $\sin\theta$ и $\cos\theta$.
[6] „Чим прочиташ, реши."

Пројектни задатак број 3 - Тригонометрија за понети

Тригонометрија је вечити камен спотицања наших ученика. По плану рада обично се предаје као четврта тема у другом разреду, тј. од марта до краја школске године, али некако ни ми професори не успевамо да испоштујемо план рада, а и ученици посустану пред крај школске године. Резултати су видно лоши, што се посебно види током припреме пријемних испита за упис на факултет.

О именима тригонометријских функција

Назив *sinus* у европске језике стигао је ,,покваренim телефоном". Први познати термин налази се у делима индијског математичара Арјабхате (око 510). Иако користи полутетиву (*ardhā-jyā*, *ardhajyā* или *ardhā-djyā*), понегде је назива половином тетиве (*jyā-ardhā*), да би затим скратио ту реч и користио само термин тетива (*jyā* или *jīva*). У Брамагуптиним делима појављује се реч *karamajyā*, односно ,,усправни синус" (*sinus rectus*), да би се разликовао од ,,изврнутог/обореног синуса" (*sinus versus*). Арапи су даље променили тај назив у *karaja*, како се може наћи у списима Багдадске школе из 9. века, нпр. у ел Хорезмијевим преписима Брамагуптиног дела *Брамасиданта*. У каснијим делима Арапи користе реч *jîba* која нема значење, а фонетски је изведена из речи *jyā* (на Хинди језику). Сугласници су дозвољавали да се та реч чита као да је написано *jaib*, са значењем ,,недра", ,,груди", ,,залив". Преводећи с арапског на латински Герардо из Кремоне (око 1150.) користио је за *jaib* реч синус (недра, залив, облина, превој тоге око груди, земља око залива, превој земље), а онда су тако поступали и његови следбеници, мада се верује да је исти превод коришћен у Европи и пре Герарда из Кремоне. Поред речи синус, у преводима појављује се и реч тетива. На сраћени запис ,,*sin*" први пут наилазимо у делима француског математичара Еригона (1634).

Док су Грци као функцију користили тетиву над луком, није била од интереса тетива комплементног угла, али када је за основу науке узет правоугли троугао, постало је згодно разматрати синус комплементног угла. Тако је у употребу ушла реч *kotijyā* (налазимо је у Аријабхатиним списима, око 510.), иако је било довољно добро користити једноставно $\sin(90^\circ - \varphi)$, па су је преузели и Арапи. Платон из Тиволија (око 1120.) користио је израз *chorda residui*, Региомонтанус (око 1463.) *sinus rectus complementi*, Ретикус (око 1551.) *basis*, Вијет (1579) *sinus residuae*, Мађини (1609) *sinus secundus*, Едмунд Гунтер (1620) *co.sinus*, Џон Њутн (1658) *cosinus*, и тај термин је и данас прихваћен. Скраћени запис ,,*cos*" који су усвојили каснији аутори прво се може наћи код Џонаса Мура (1674).

Арапи су правили разлику између усправне сенке (средњовековни преводиоци користили су у овом случају термине *umbra*, *umbra recta* или *umbra extensa*) и изврнуте сенке (*umbra versa* или *umbra stans*, у зависности од тога да ли је гномон био нормалан на хоризонталну раван као код обичних

часовника, или у односу на вертикални зид као код часовника на зградама), понекад назване хоризонтална односно вертикална сенка. Вијет (око 1593) назива тангенту *sinus foecundarum* (скраћено на *foecundus*) али и *amsinus* и *prosinus*. Тек је с Томасом Финкеом (1583) термин ,,тангента" почео да буде еквивалент за *umbra versa*, а 1595 га је прихватио Питискус. Мађини (1609) користи *tangens secunda* за котангес. Сам термин може се први пут наћи у делима Едмунда Гантера (1620). Скраћеницу *tan* у облику A^{tan} први је употребио Жирард (1626) а скраћеницу *cot.* предложио је Џонас Мур (1674), али данас на међународном нивоу нема универзално прихваћених симбола за тангенс и котангес.

Кратак водич кроз земљу Тригонометрију

Дефиниција: Нека је $\triangle ABC$ правоугли са правим углом у темену C. Синус угла α, у ознаци $\sin\alpha$, дефинишемо као однос наспрамне катете и хипотенузе тј.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c},$$

косинус угла α, у ознаци $\cos\alpha$, као однос налегле катете и хипотенузе

$$\cos\alpha = \frac{b}{c},$$

тангенс угла α, у ознаци $\operatorname{tg}\alpha$, као однос наспрамне и налегле катете,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b},$$

котангенс угла α, у ознаци $\operatorname{ctg}\alpha$, као однос налегле и наспрамне катете,

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

Пример. Одредити тригонометријске функције угла α правоуглог троугла ABC, ако су катете $a = 3$ и $b = 4$. Које су вредности тригонометријских функција угла γ?[7]

Пример. Одредити вредности тригонометријских функција углова $30°$, $45°$, $60°$, $15°$, $22°30'$, $75°$, $67°30'$, $18°$

У свакодневној пракси чест је случај да уместо оваквог задатка нацртамо ученицима табелу с вредностима тригонометријских функција углова $30°$, $45°$ и $60°$ и евентуално објаснимо начин како да лакше запамте те бројеве, који им у том тренутку, а и касније, у суштини ништа не значе. Они ,,напреднији" наставници додају у табелу и вредности функција за $0°$ и $90°$.

Основни тригонометријски идентитети су следећи ,,погрешно" намештен камичак. И даље често срећем ученике који бубају формуле где се синус и косинус угла изражавају преко тангенса или котангенса, уз образложење

[7] Друго питање је задато да би ученицима скренули пажњу да смо дефинисали тригонометријске функције **оштрог угла правоуглог троугла**

да наставници траже да се то зна ,,из главе". Три основна идентитета су сасвим довољна за наставак ,,пловидбе" кроз тригонометрију.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1.$$

Наравно, потребно је доказати те идентитете, јер то не захтева више од два минута, а и неопходно је навикавати ученике да свака формула коју користе мора бити доказана.

Наредни ,,камен у мозаику" јесте увођење нових појмова, потребних да се прошири појам тригонометријских функција оштрог угла правоуглог троугла на тригонометријске функције било ког угла и тригонометријске функције реалног броја. Тај врло важан корак ка вишем нивоу некако прође као трептај ока, и не оставља траг у главама наших ученика.

Уопштени угао, радијанска мера угла и тригонометријска кружница су важни појмови без чијег разумевања нема ,,наставка путовања" у царство тригонометрије.[8]

Још нисам срео ученика који је успео да ми исприча како смо са тригонометријских функција углова прешли на тригонометријске функције реалног аргумента. Као почетник сигурно нисам овоме посвећивао превише времена, али последњих 25 година причу о овим појмовима понављам бар три пута, са свим детаљима, у прве три недеље обраде ове теме.[9]

Уопштени угао, уређен пар облика (n, α), уводимо да бисмо могли да добијемо геометријски приказ углова већих од $360°$,

Радијанска мера угла јесте однос дужине лука који исеца дати угао из кружнице чији центар се поклапа с теменом угла, и полупречника дате кружнице. На тај начин сваком углу додељујемо реалан број који га карактерише. Ово пресликавање је бијекција, јер различитим угловима додељујемо различите реалне бројеве и за сваки реалан број можемо наћи одговарајући угао који исеца лук дате дужине.

Тригонометријска кружница јесте кружница јединичног полупречника са центром у координатном почетку. Произвољна тачка на кружници има координате које узимају вредности из сегмента $[-1, 1]$. Свака тачка на кружници представља бесконачно много углова тј. реалних бројева који се међусобно разликују за целобројни умножак од 2π.

Питалице

1. Главна мера угла је број α такав да је $0 \leq \alpha \leq 360°$. Тачно или нетачно?

2. Сваке две главне мере угла разликују се за $360°$. Тачно или нетачно?

3. Уочимо на кружници полупречника r лук дужине r. Што је већи r, већи је и угао што га крајње тачке лука затварају са центром кружнице

[8] Колико пажње поклањамо увођењу ових појмова?

[9] Како ви објашњавате ученицима прелаз са углова на реалне бројеве?

4. Угао од једног радијана приближно је једнак углу од $57°18'$. Тачно или нетачно?

5. Тачке на тригонометријској кружници одређене бројевима $-\frac{17\pi}{3}$, $\frac{133\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$ се поклапају?

6. Нацртати правилни шестоугао уписан у тригонометријску кружницу чија се темена налазе у тачкама облика $k \cdot \frac{\pi}{3}, k = 0, 1, \ldots 5$. На којем луку који је одређен суседним теменима тог шестоугла леже тачке којима одговарају реални бројеви $3\sqrt{3}$, -15, $\frac{23\pi}{4}$, -313, $17,2$?

7. Одредити на тригонометријској кружници све тачке $\mathrm{M}(t)$ за које важи:
   1. $t = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$ 2. $t = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$
   3. $t = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$; 4. $t = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

8. Одредити на тригонометријској кружници следеће интервале реалних бројева:
   1. $\left(k\pi, \frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbb{Z}$ 2. $\left((2k-1)\frac{\pi}{4}, (4k-1)\frac{\pi}{8}\right), k \in \mathbb{Z}$
   3. $\left((4k-1)\frac{\pi}{8}, k\frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbb{Z}$ 4. $\left(k\frac{\pi}{2}, (4k+1)\frac{\pi}{8}\right), k \in \mathbb{Z}$

Сада можемо уопштити појам тригонометријских функција, тј. можемо да пређемо на тригонометријске функције реалног броја.

Произвољан угао поставимо тако да му је теме у координатном почетку, а завршни крак сече тригонометријску функцију у некој тачки M. Координате тачке $M(x, y)$, дефинишемо као

$$\cos\alpha = x \qquad \sin\alpha = y$$

Ако смо изабрали оштар угао, тачка M ће се налазити у првом квадранту и тада можемо да докажемо да је новоуведена дефиниција сагласна с дефиницијом тригонометријских функција оштрог угла правоуглог троугла. Разматрајући особине координате тачке M, можемо лако да закључимо које особине имају функције синус и косинус (област дефинисаности, област вредности, нуле, знак, периодичност, ток, екстремне вредности)[10]

1. За које $m \in \mathbb{R}$ постоји реалан број x тако да је $\cos x = \frac{2m-1}{m+2}$?

2. Који је број већи:
   а) $\sin 1$ или $\sin 2$ б) $\cos 1$ или $\cos 2$?

3. Завршни крак угла $\alpha = \frac{1234567890987654329537}{8}\pi$ сече тригонометријску кружницу у тачки M која се налази у:
   а) I квадранту; б) II квадранту; ц) III квадранту; д) IV квадранту;
   е) на оси Oy

4. Поређати по величини од највећег до најмањег бројеве:
   $\sin 1$, $\sin 2$, $\sin 3$, $\sin 4$, $\sin 5$, $\sin 6$, $\sin 7$, $\sin 8$

[10] Опишите особине функција синус и косинус!

5. Одредити предзнак производа:
   1. $\sin 1 \cdot \cos 1 \cdot \operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{ctg} 1$ 2. $\sin 1 \cdot \cos 2 \cdot \operatorname{tg} 3 \cdot \operatorname{ctg} 4$

6. Да ли за свако $x \in \mathbb{R}$ важи: 1. $\cos(\sin x) > 0$; 2. $\sin(\cos x) > 0$

Свођење на оштар угао природно се дефинише помоћу тригонометријске кружнице. Нека је дат реалан број γ. Њега можемо написати у облику $\gamma = 2k\pi + \beta$, $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \beta \leq 2\pi$ што значи да смо тригонометријске функције било ког реалног броја свели на тригонометријске функције реалног броја из интервала $[0, 2\pi]$. Број β можемо представити на следећи начин помоћу броја α, $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ у зависности од тога у ком квадранту се налази завршни крак угла:

$$\begin{array}{llllllll} \text{I} & 2\pi + \alpha & \text{II} & \pi - \alpha & \text{III} & \pi + \alpha & \text{IV} & 2\pi - \alpha \\ \text{I} & \frac{\pi}{2} - \alpha & \text{II} & \frac{\pi}{2} + \alpha & \text{III} & \frac{3\pi}{2} - \alpha & \text{IV} & \frac{3\pi}{2} + \alpha \end{array}$$

Применом тригонометријских функција оштрог угла правоуглог троугла долазимо до формула за свођење на оштар угао:[11]

$$\operatorname{trig}(\pi \pm \alpha) = \pm \operatorname{trig} \alpha \qquad \operatorname{trig}(2\pi \pm \alpha) = \pm \operatorname{trig} \alpha$$

$$\operatorname{trig}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \pm \operatorname{cotrig} \alpha \qquad \operatorname{trig}\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = \pm \operatorname{cotrig} \alpha$$

За досадашњу причу била је потребна једино дефиниција тригонометријских функција оштрог угла правоуглог троугла. Све остало се изводи за десетак секунди или чита са слике. Долазимо до другог важног елемента који је добро бар два пута извести током обраде наставне теме о тригонометрији.

Адиционе формуле!!!

Нека су задате две тригонометријске кружнице и на првој тачке A, P и Q такве да је тачка $A(1, 0)$, $\widehat{AP} = \alpha$ и $\widehat{AQ} = \beta$. На другој кружници дате су тачке A и Q такве да је $\widehat{AQ} = \alpha - \beta$. Те кружнице су подударне и кружни лукови који одговарају тетивама PQ и AR су једнаки па важи да је $d(P, Q) = d(A, R)$. Применом обрасца за растојање две тачке долазимо до формуле за косинус разлике углова. Заменом β са $-\beta$ добијамо формулу за косинус збира углова. Ако α у формули за косинус разлике заменимо са $\frac{\pi}{2} - \alpha$, добићемо формулу за збир синуса. Тангенс и котангенс збира и разлике углова се на основу ових формула једноставно изводе и ништа од тога не мора да се набуба.

Формуле за двоструки угао и половину угла природно се надовезују на адиционе формуле.

Трансформација збира и разлике тригонометријских функција у производ и обрнуто лако се изводе уз помоћ ,,тихог" потеза који добија партију,

$$\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \qquad \wedge \qquad \beta = \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Сада преостаје да стечена знања заједно с ученицима применимо у решавању једначина и неједначина. Синусна и косинусна теорема траже петнаест минута пажње и тиме смо заокружили потребна знања из тригонометрије.

[11] Објасните како то радите на свом часу

Бонус за крај

1. Ако је $\alpha = 2\,\mathrm{rad}$, онда $\operatorname{tg}\alpha$ износи:
   А) 2,185; Б) $-2,185$; Ц) 1,185; Д) $-1,185$; Е) 1

2. Мањи од углова, који граде дијагонале коцке једнак је:
   А) $90°$; Б) $70°31'$; Ц) $60°$; Д) $53°20'$; Е) $45°$

3. Однос полупречника описане и уписане кружнице правилног седмоугла једнак је:
   А) 0,901; Б) 0,851; Ц) 0,801; Д) 0,751; Е) 0,701

4. Највећи угао у троуглу чије су странице 5, 4 и 2 једнак је:
   А) $170°35'$; Б) $157°12'$; Ц) $135°$; Д) $118°48'$; Е) $108°13'$[12]

5. Укупан број реалних решења једначине
   $\cos x + \cos 2x + 2\cos^2\frac{3x}{2} + \cos 4x = \frac{1}{2}$ на сегменту $[0, 2\pi]$

[12] Како ћете објаснити ученицима начин решавања ових задатка