



ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ДРЖАВНИ СЕМИНАР 2020.

**О НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ У
ОСНОВНИМ И СРЕДЊИМ ШКОЛАМА**

Тема:

**КАКО НАПРАВИТИ ДОБАР ИЗБОР ЗАДАТАКА
И НАСТАВУ УСМЕРИТИ КА ИСХОДИМА И
ФУНКЦИОНАЛНОМ ЗНАЊУ?**

Аутори и предавачи:

Вељко Тиоровић, Анђелка Симић

Београд 09. 02. 2020.

1. УВОД

Теме многобројних истраживања наставне праксе и семинара су пројектна настава, исходи, стандарди, функционално знање, међународна тестирања, итд. Наставници у Србији похађали су и похађају семинаре који се тичу наставе усмерене на исходе, а ту је и све више конференција и портала који дају могућност да наставници прикажу примере своје добре праксе. И поред свега тога још увек се не види велики напредак, па ни нови резултати на ПИСА тестирању нису на нивоу очекиваних. Мишљења смо да у креирању савременог приступа настави треба користити све предности и квалитете традиционалног приступа уз коришћење неких савремених средстава и метода рада. У таквим решењима наставу математике превасходно треба усмерити ка постизању и функционалних и трајних знања.

Традиционални приступ изради наставних планова, у смислу онога шта треба да се учи данас се сматра превазиђеним јер и ученици и наставници све информације могу да пронађу веома једноставно. Поред тога, још увек постоје пријемни испити на факултетима па наставници и о томе воде рачуна и морају да обраде све теме.

Савремени приступ образовању је усмерен на исходе којима се дефинише шта ће ученик знати или умети да уради по завршетку образовања и учења. Дефинишу се у терминима мерљивог понашања ученика и могу се проверавати. Стандарди су мерни инструменти чијом употребом је могуће утврдити шта је и у коликој мери развијено и постигнуто. Преко стандарда се образовни циљеви и задаци преводе на много конкретнији језик који описује постигнућа ученика, стечена знања, вештине и умења. Наставници могу користити стандарде да развију низове задатака објективног типа, којима би се проверило да ли су ученици савладали кључне компетенције које се захтевају на одређеном нивоу постигнућа.

У периоду док се прелази на нове програме од наставника се очекује да организују наставу усмерену на исходе, а да при томе не запоставе садржаје планиране наставним програмом. Оно чиме наставник у свом раду треба првенствено да се руководи јесу опште предметне и специфичне предметне компетенције, које уствари представљају одговор на питање шта ће ученици од онога што се учи у оквиру предмета бити у стању да искористе у даљем учењу и животу уопште.

У ПИСА пројекту је уобичајено да се уместо термина знање користи израз писменост или компетенција: писменост да би се указало да је реч о оним знањима која се сматрају образовним капиталом који је ученику неопходан да би наставио школовање и да би се успешно снашао у личним и професионалним улогама у којима ће се, као одрасла особа, наћи; а бити компетентан у овој студији не значи само да је неко стекао одговарајућа знања, него и вештине, ставове и вредности, да зна како да дође до знања и како може да их примени у животним ситуацијама. Другим речима, нагласак је на функционалним знањима.

Још један од основних предуслова за постизање математичке писмености и спремности за функционалну примену знања је и правилан приступ решавању проблема и математички запис решења¹.

¹ Знаменити амерички математичар, мађарског порекла, Ђерђ Поја у својој књизи "Како ћу решити математички задатак?" даје и на примерима објашњава користан алгоритам за решавање математичких проблема.

2. ТАКСОНОМИЈА ЗНАЊА

Основно средство споразумевања у процесу образовања је таксономија знања, а и она се мења у складу са резултатима многобројних истраживања. Таксономија знања помаже да се одреди шта је важно да ученици науче, да се планира и организује настава како би се постигли добри резултати са што више ученика у неком временском оквиру.

Ревидирана Блумова таксономија (Anderson and Krathwohl, 2001) има облик дводимензионалне табеле. Једна димензија је димензија знања (врсте знања које се учи, продукти учења), а друга димензија је димензија когнитивних процеса (процеса који се користе за учење). Димензија знања садржи четири, а димензија когнитивних процеса шест нивоа. Виши нивои укључују ниже нивое и представљају сложенија знања и сложеније процесе.

Димензија знања	Димензија когнитивних процеса					
	Сећање Памћење	Разумевање	Примена	Анализа	Евалуација	Стварање (синтеза)
Знање чињеница						
Концептуално знање						
Процедурално знање						
Метакогнитивно знање						

За сваки задатак који се припрема добро је пронаћи место у табели. Тиме ће наставник идентификовати која знања и које врсте мисаоних процеса захтева од ученика, стећи ће јаснији увид у тежину задатка и сл. Овај посао олакшава постојање стандарда постигнућа, јер је сваки стандард у вези са очекиваним исходом и базира се на неком степену исхода. Задаци на тестирањима треба да су везани за стандарде/исходе, а исходи се могу поставити у одређено место у табели.

3. ПИСМЕНЕ ПРОВЕРЕ ЗНАЊА

Писмене провере знања (контролни и писмени задаци) настали су ради брже провере знања и зато што се њима може постићи виши ниво објективности него усменим проверама. Узимајући у обзир међународне тестове, али и тестове за „малу матуру“ и тестове са државних матура земаља из окружења, може се закључити да су разлике у односу на контролне и писмене задатке, какве најчешће дају наставници математике у Србији, велике. Дакле, један корак ка помирењу традиционалне наставне праксе и савремених тестова може да буде и корекција контролних и писмених задатака.

Да би се направио добар тест, сваки задатак треба да буде прецизно постављен, да ученик има јасно упутство како треба да реши задатак и како да прикаже решење.

Израда тестова је веома захтеван посао тимова људи, али од наставника се очекује да испоштује нека основна правила. Сваки тест треба да садржи разноврсне задатке у смислу исхода али и поставке, задатке различите тежине, да има унапред дефинисане тачне одговоре и бодовање тако да су критеријуми за оцене унапред познати ђацима. Веома је важно да се пред ученике стављају задаци оптималне тежине како би се одржала мотивација, избегло одустајање али и досада ако је превише задатака истог нивоа тежине.

Квалитет целог теста постиже се избором задатака који су поуздани, ваљани, дискриминативни, саопштени на једноставан начин, релевантни, фокусирани, прецизни. Задаци на тесту треба да праве диференцијацију у квалитету знања према таксономији (степену мисаоних активности које задатак захтева, а ученик може да пружи).

4. ВРСТЕ ЗАДАТАКА

Задаци се могу поделити према више критеријума, али нама је сада значајна подела на задатке затвореног и отвореног типа. Задаци затвореног типа су они код којих су унапред одређени тачни одговори које ученик треба да идентификује. Најчешће коришћени задаци затвореног типа су: задаци алтернативног избора, задаци вишеструког избора, задаци повезивања, задаци сортирања/класификовања. Задаци отвореног типа састоје се у захтеву на који ученик може да одговори слободним одговором. Најчешће коришћени задаци отвореног типа су: кратак одговор, допуна реченице, есејско питање, проблемски задаци.

Сви типови задатака имају своје предности и мане.

- Задаци алтернативног избора су лаки за писање и оцењивање, али им је висок фактор погађања и не могу да тестирају више нивое.
- Задаци у којима се тражи повезивање су корисни за тестирање веза, чињеничних знања, лаки су за писање и клонирање, али их није лако формулисати.
- Задаци у којима се очекује класификација или сортирање су лаки за писање и оцењивање, добри за тестирање једноставних веза, али су често ограничени на чињенична тестирања.
- Задаци вишеструког избора имају мали фактор погађања, могу да мере раличите когнитивне процесе, анализа резултата може да буде интересантна за статистику, лаки су за оцењивање, али је за такве задатке најтеже написати добре дистракторе и тешко је мерити презентовање идеје.
- Задаци кратког одговора су добри за тестирање чињеничног знања, смањена је могућност погађања, лаки су за писање и оцењивање, али нису за мерење сложених исхода.
- Задаци у којима треба да се допуни реченица су добри за тестирање чињеничних знања, лаки за писање и оцењивање, смањена је могућност тачног погађања одговора, али су бољи за тестирање вештина нижих нивоа.
- Есејска питања или задаци са продуженим одговором дају могућност за процењивање знања и вештина виших нивоа, лаки су за писање, стимулишу креативно мишљење, али је код оваквих задатака тешко оцењивање.
- Проблемски задаци су добри за процењивање знања и вештина виших нивоа па се могу мерити сложенији исходи. Код овог типа задатака тешко је оцењивање.

5. ПРИМЕРИ ЗАДАТАКА КОЈИ ПОДСТИЧУ ФУНКЦИОНАЛНО ЗНАЊЕ

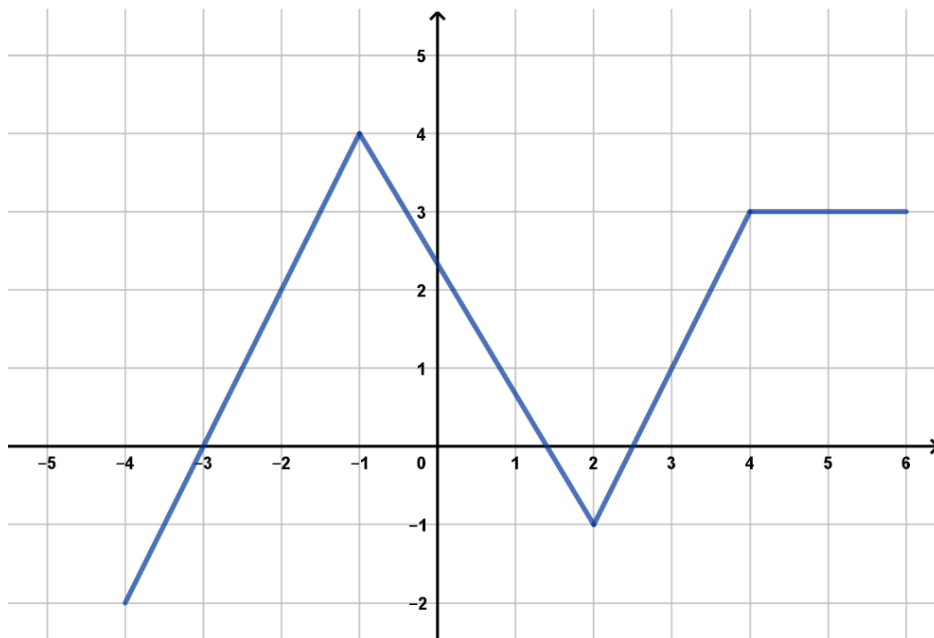
На почетку ове секције наводимо два задатка са коментарима о значају који имају за развој функционалног знања.

1. За 5 евра (EUR) може се купити 625 српских динара (RSD), а за 2 кувајтска динара (KWD) може се купити 750 српских динара (RSD). Колико евра (EUR) је потребно за куповину 100 кувајтских динара (KWD)?

Овај задатак се може сврстати у једноставније задатке конверзије валута и утврђивања пропорционалности међу величинама. Све информације у задатку су очигледне и значај задатка и његових захтева је јасан, јер се односи на свакодневне потребе конверзије валута које имају људи широм света. Ученик треба, на основу датих података, најпре да утврди курс – однос евра и српских динара, а затим однос српских и кувајтских динара. Након тога, посредно и да одреди однос евра и кувајтских динара.

У настави математике у основној школи се могу примењивати проблемске ситуације сличне овој код обраде тема пропорционалност и линеарне једначине. Такође, оваква проблемска ситуација се може погодно користити и у настави у првом разреду средње школе код обраде ових садржаја. Теме из свакодневног живота служе да повећају интересовање, као и да мотивишу за учење и решавање оваквих проблема. Овај задатак погодан је као узор за прављење низа, како једноставнијих, тако и сложенијих проблема сличног типа.

2. На слици је приказан график функције $y = f(x)$, на интервалу $[-4, 6]$.



- а) Колико нула има ова функција?
- б) Одреди највећу вредност функције на датом интервалу.
- в) За коју вредност $x \in [-4, 6]$ функција достиже најмању вредност?
- г) Одреди интервале у којима је ова функција растућа.
- д) За које вредности $x \in [-4, 6]$ је функција константна?

У задатку се од ученика очекује да анализира графички представљену функцију у складу са захтевима задатка. На основу одговора наставник има прецизан увид у то да ли ученик зна и разуме шта су нуле функције, екстремне вредности и монотоност.

Број захтева би могао бити већи па би се њима могло утврдити да ли ученик разуме још неке особине функције, попут знака или кодомена. У зависности од тога да ли се задатак ради у основној или средњој школи, може се придружити одговарајућем стандарду на одређеном нивоу. Овом задатку могао би се придружити и реални контекст у погледу статистичке обраде података о некој појави, па би на тај начин постао још „функционалнији“.

ЗАДАЦИ

3. У магацин је доведено 50 великих буради сока од јабуке запремине 25 l. Колико треба флаша запремине 1,5 l да се у њих складишти та количина сока?
4. Патике у једној продавници су поскупеле 24%. Ако је њихова цена пре поскупљења била 4000 динара, нова цена се може израчунати на следећи начин:
 - a) $0,24 \cdot 4000$ динара;
 - b) $0,76 \cdot 4000$ динара;
 - c) $1,24 \cdot 4000$ динара;
 - d) 4000 динара + $1,24 \cdot 4000$ динара
 - e) $1,76 \cdot 4000$ динара.
5. На папиру квадратног облика налази се срце које додирује ивице папира (види слику). Ана жели да изреже срце макама и залепи га у свеску. Процент дела папира који Ана треба да одстрани приближно је једнак:
 - a) 10%;
 - b) 17%;
 - c) 19%;
 - d) 21%;
 - e) 25%.



6. Предузеће „Гљиварство“ уговорило је са страним партнерима извоз 50 тона сувих гљива. Познато је да свеже гљиве када се тек уберу садрже 80% воде, а да суве које су спремне за извоз садрже 18% воде. Откуп, транспорт, прерада, сушење и припрема за извоз сувих гљива коштају ово предузеће 500 динара по килограму. Уговорена продајна цена сувих гљива страном партнеру је 4000 динара по килограму.
- а) Колико свежих гљива треба откупити да би се добила 1 тона сувих гљива?
 б) Колика ће бити зарада овог предузећа након испоруке уговорених 50 тона робе?
7. Нека је природан број a прост, а природан број b сложен. Поред датог исказа заокружити да ли је он тачан (Т) или нетачан (Н).

Број $a \cdot b$ је увек сложен.	Т	Н
Број $a - b$ је увек прост.	Т	Н
Број b^a је сложен.	Т	Н
Број $b - a$ не може бити прост.	Т	Н
Број $2 \cdot a + 4 \cdot b$ је сложен природан број.	Т	Н

8. Одредити НЗС и НЗД бројева $2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^7$ и $2^7 \cdot 3^5 \cdot 5^3$.

9. Повезати број из десне колоне са његовим бројем цифара у левој колони:

$5^{300} \cdot 8^{100} \cdot 10^{30}$	331
$77 \cdot 100^{90}$	304
$2^{42} \cdot 5^{39}$	40
$2000 \cdot 1000^{100}$	182

10. Нека је x негативан реалан број. За сваки од понуђених израза заокружи *позитиван* ако је за тако дато x његова вредност позитивна, односно *негативан* ако му је вредност негативна.

$\frac{x}{ x }$	позитиван	/	негативан
$-\frac{1}{x}$	позитиван	/	негативан
$-x^2$	позитиван	/	негативан
$\sqrt{-x}$	позитиван	/	негативан
$(-x)^{2019}$	позитиван	/	негативан
$\frac{ -2x }{x}$	позитиван	/	негативан

11. Кроз једну тачку равни постављене су четири праве. Неки углови између две по две суседне праве су једнаки: 10° , 20° и 50° . Колики је највећи могући угао између две суседне праве?
12. Дрво високо 25 метара ветар је преломио и оно оно је пало тако да му је врх додирнуо тло на 5 метара удаљености од стабла. На којој се висини дрво преломило?

13. Дате су дужине страница три троугла. Повезати сваки од њих са одговарајућом врстом.

11, 15, 20

правоугли

9, 16, 17

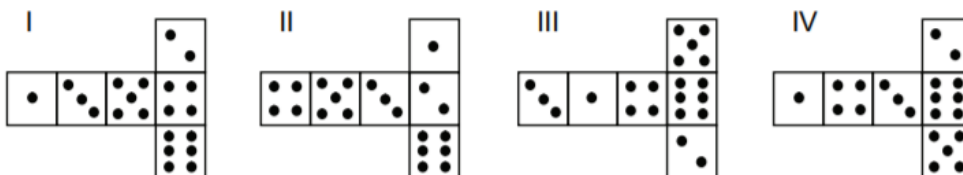
оштроугли

12, 35, 37

тупоугли

14. Зидове и плафон једне гимнастичке сале треба окречити. Ако се зна да је она облика квадрa, ширине 14 метара, дужине 20 метара и висине 3 метра, да прозори заузимају површину од $18 m^2$, а да су улазна врата широка 1,5 метара, а висока 2 метра, колика је површина за кречење?

15. Дато је неколико мрежа коцкице за игру. Од којих је могуће направити коцкицу тако да је збир бројева на насправним странама једнак 7?



16. Дате су реченице:

- Линеарна једначина не може имати више од једног решења.
- Линеарна једначина $x - 8 = x + 8$ нема решења.
- Линеарна једначина $x - 2 = 0$ има 2 решења.
- Линеарна једначина $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 1$ има једно решење у скупу целих бројева.
- Лиенарна једначина $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 1$ има једно решење у скупу рационалних бројева.

Колико међу датим реченицама има тачних?

17. Дата је линеарна функција $y = (m + 1)x + m - 2$, $m \in R$.

- a) За коју вредност m њен график пролази кроз координатни почетак?
- b) За коју вредност m је њен график паралелан x -оси?
- c) За коју вредност m је њен график паралелан y -оси?

18. Колико решења у скупу реалних бројева има једначина $\sqrt{x + 5} \cdot (x - 2)^2 \cdot 2^x = 0$?

- a) 0;
- b) 1;
- c) 2;
- d) 3;
- e) 4.

19. Одредити за које $a, b \in R$ је график квадратне функције $y = (x - 3)^2 - 2$ симетричан графику квадратне функције $y = (x + a)^2 - b$, у односу на y -осу.

20. Које је најмање решење једначине $\sin(5x - \pi/6) = 0$ изражено позитивним целим бројем степени?
- 6°;
 - 36°;
 - 42°;
 - 78°;
 - 90°.
21. Колико реалних нула има полином $p(x) = (x^2 + 4x + 5)(x^2 + 6x + 10)(x^2 + 8x + 17)$?
- 0;
 - 1;
 - 2;
 - 5;
 - 6.
22. Колико решења у скупу реалних бројева има једначина $\log(7 - x) = \sqrt{x - 8}$?
- 0;
 - 1;
 - 2;
 - 3;
 - 4.
23. Збир целих бројева који су решења неједначине $\frac{x+1}{3-x} \geq 0$ је:
- 2;
 - 3;
 - 5;
 - 6;
 - 8.
24. Колико целих бројева из интервала $[-5, 5]$ припада скупу решења неједначине $\frac{|2x|}{x^2+2x+1} > 0$?
25. Дата је неједначина $\frac{(x^2+4x+4)x^2}{x-10} \geq 0$. Одредити:
- најмањи цео број;
 - најмањи природан број;
- који је решење те неједначине.
26. Докажи да је вредност израза $x^2 + x + 1$ позитивна за све реалне вредности x .
27. Решити неједначину $\frac{x^2+2x+5}{x^2+4x+4} > 0$.
28. У једној пицерији сервирају пицу од сира и парадајза. Поред тога гост може саставити сопствену пицу са додатним прилозима. На располагању су још четири различита додатна прилога: маслине, шунка, печурке и пармезан. Пера жели да поручи пицу са два или три различита додатна прилога. Колико различитих комбинација Пера има на располагању?
29. Пера воли да прави воћни смути. На располагању има четири врсте воћа: јабуку, банану, лимун и малине. Смути може да направи од најмање две врсте воћа. Колико различитих укуса смутија Пера може да направи од овог воћа?
30. Колико је одстојање између две паралелне праве $x + 2y + 3 = 0$ и $x + 2y - 3 = 0$?

31. Координатне осе на правој $4x - 3y - 24 = 0$ одсецају дуж дужине:

- a) 5;
- b) 6;
- c) 8;
- d) 10;
- e) 12.

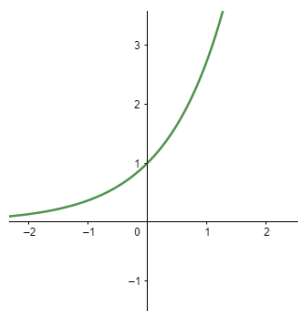
32. Који од следећих аритметичких низова имају за члана број 75?

- a) $a_n = 3 + 4n$;
- b) $a_n = -3 + 4n$;
- c) $a_n = 5 + 10n$;
- d) $a_n = 11 + 75n$;
- e) $a_n = 71 + 10n$.

33. Функције са леве стране придружи одговарајућим графицима на десној страни тако што ћеш слово које стоји испред функције написати на линију поред графика.

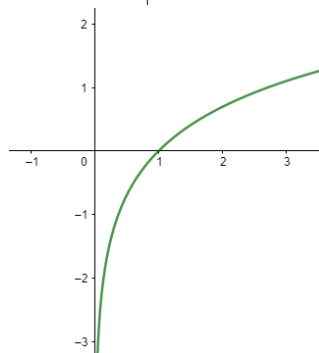
a) $y = x^3$

1)



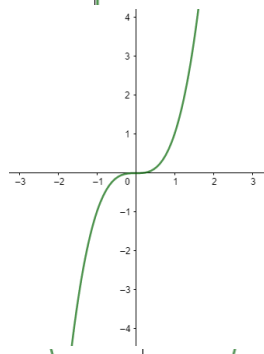
б) $y = e^x$

2)



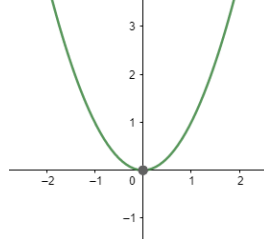
в) $y = x^2$

3)

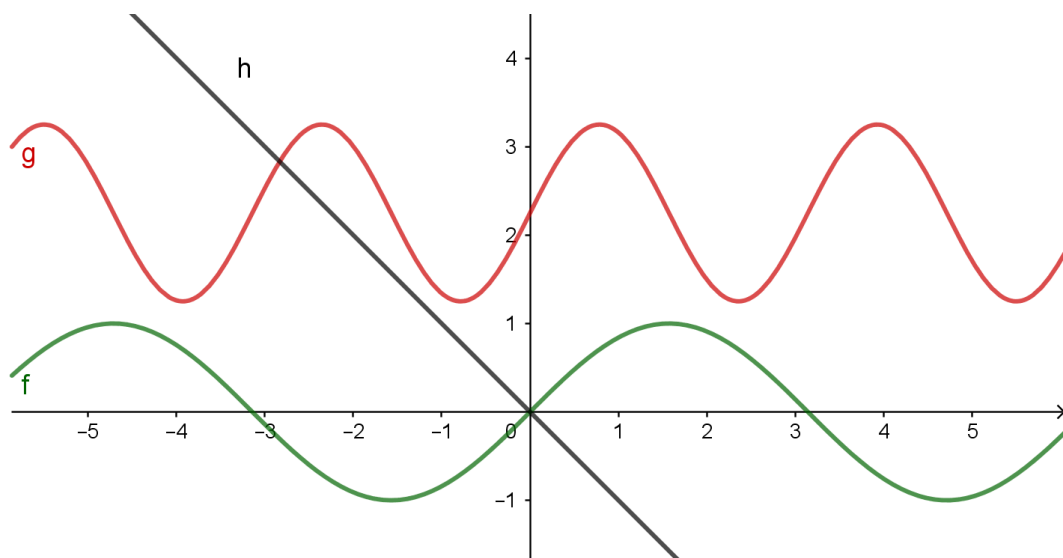


г) $y = \ln x$

4)

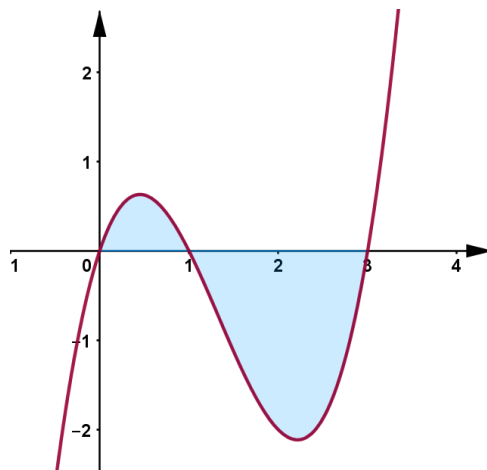


34. На следећој слици дати су графици функција $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sin 2x + \frac{9}{4}$ и $h(x) = -x$.



- a) Колико нула има функција $f(x)$ у интервалу $[-\pi, \pi]$?
- b) Колико нула има функција $g(x)$ у интервалу $[-2\pi, 2\pi]$?
- c) Колико решења има једначина $\sin x = \sin 2x + \frac{9}{4}$?
- d) Колико решења има једначина $\sin 2x + \frac{9}{4} = -x$?
35. Одредити пресек графика функције $f(x) = 3^x + 4$:
- a) са x -осом;
- b) са y -осом;
- c) са правом $y = 5$;
- d) са графиком функције $g(x) = 3^x + 5$.
36. Највећа вредност функције $f(x) = (2 \sin^2(3x + 5) - 10)^2$ за $x \in \mathbb{R}$ је:
- a) -9;
- b) 16;
- c) 49;
- d) 100;
- e) 144.
37. Који од следећих интеграла има највећу вредност? Одговорити без рачунања интеграла уз кратко образложење.
- a) $\int_0^2 (x^2 - 4) \sin^2(\pi x) dx$;
- b) $\int_0^{2\pi} (2 + \cos x)^3 dx$;
- c) $\int_0^\pi \sin^{100} x dx$;
- d) $\int_0^\pi (3 - \sin x)^6 dx$;
- e) $\int_0^{8\pi} 108(\sin^3 x - 1) dx$.

38. На следећој слици приказан је део графика функције $f(x) = x(x - 1)(x - 3)$.



Записати израз за израчунавање површине фигуре ограничене графиком и x -осом (плаво осенчена фигура).

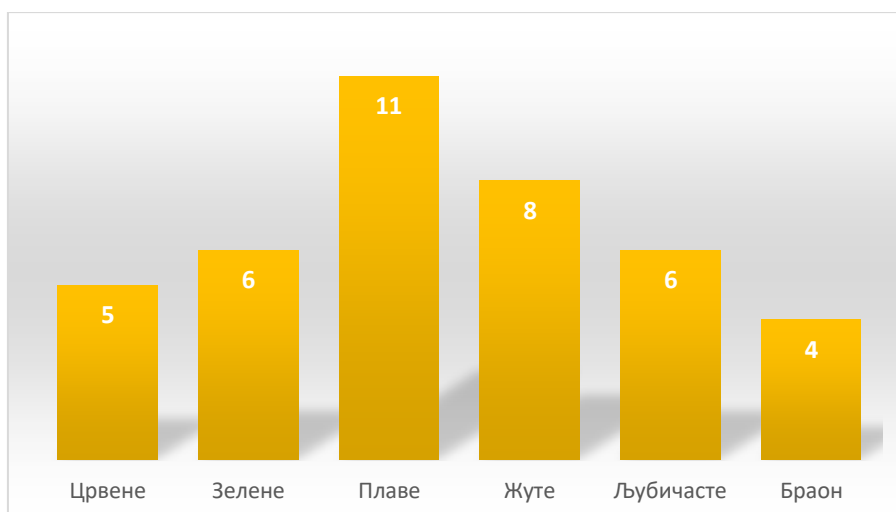
39. За функцију $f(x)$ и њен одређени интеграл на интервалу $(0,3)$ важи:

$$\int_0^2 f(x)dx + 3 \int_2^3 f(x) = 10;$$

$$4 \int_0^2 f(x)dx - \int_2^3 f(x)dx = 14.$$

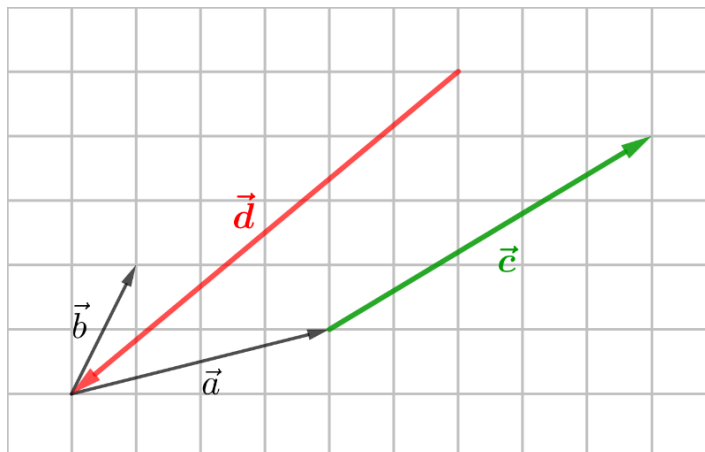
Одредити колико је $\int_0^3 f(x)dx$.

40. Ана извлачи из кесе једну бомбону, без гледања. Број бомбона по бојама у кеси приказан је на следећем графикону.



Колика је вероватноћа да ће Ана извући зелену бомбону?

41. Записати векторе \vec{c} и \vec{d} користећи векторе \vec{a} и \vec{b} као базу.



6. РАДИОНИЦА

Циљ радионице је да се наставницима укаже на важне моменте приликом конструкције и избора задатака за часове и тестове.

Учесници ће бити у прилици да у групама, уз упутства и формуларе, заједно са ауторима семинара, креирају задатке који подстичу функционално мишљење. О задацима као производима радионице ће се дискутовати у циљу добијања још корисних задатака који се могу клонирати и користити на часовима.

7. ЛИТЕРАТУРА

- [1] Општи стандарди постигнућа за крај општег средњег и средњег стручног образовања и васпитања у делу општеобразовних предмета за предмет математика, Приручник за наставнике, Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања, Београд, 2015.
- [2] Образовни стандарди за крај обавезног образовања за наставни предмет математика, Министарство просвете, Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања, Београд, 2010.
- [3] Приступ организовању наставе и учења , Интернет издање:
<https://digitalnaucionica.edu.rs/pristup-organizovanju-nastave/>
- [4] Радовић, Б. Тестови знања - Подсетник за наставнике, Интернет издање:
https://www.academia.edu/35309129/Biljana_Radović_TESTOVI_ZNANJA
- [5] Савовић, Б, Бјекић, Д., Најдановић Томић, Ј., Гламочак, С. Тестови и оцењивање у настави, Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања, Интернет издање:
<https://seo.edu.rs/тестови-и-оцењивање-у-настави>
- [6] ПИСА - Математичка писменост, Интернет издање: <https://pisa.ncvvo.hr/sto-pisa-ispituje/matematicka-pismenost/>