



ДРУШТВО МАТЕМАТИЧА СРБИЈЕ

АКРЕДИТОВАНИ СЕМИНАР:

345

ДРЖАВНИ СЕМИНАР О НАСТАВИ
МАТЕМАТИКЕ И РАЧУНАРСТВА
ДРУШТВА МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Компетенција: К1

Приоритети: 3

ТЕМА:

МОГУЋНОСТИ ПРИМЕНЕ ОБРАЗОВНОГ
СОФТВЕРА *GEOGEBRA* У ПРОЈЕКТНОЈ НАСТАВИ

РЕАЛИЗАТОРИ СЕМИНАРА:

др РАДОСЛАВ БОЖИЋ,
др ЂУРЋИЦА ТАКАЧИ

БЕОГРАД,
08. – 09. 02. 2020.

Савремене наставне методе

У савременој настави математике све је већи значај наставних метода које подразумевају што већу активност, а неретко и централну улогу ученика. Међу поменутих методама истиче се пројектна настава, али неизоставне су хеуристичка и проблемска настава, чија примена омогућава постепен прелаз са традиционалних наставних метода, као и припрему ученика за успешну реализацију пројектне наставе. Наведене наставне методе су тесно повезане са конструктивистичким приступом, који подразумева да ученик самостално креира, односно конструише знање, на основу информација којима располаже. За успешну примену било које од наведених наставних метода, неопходно је оспособити ученика и за колаборативни рад, односно за сарадњу током процеса учења. Такође, успешности примене савремених наставних метода у значајној мери доприноси и коришћење савремене технологије. У настави математике, већ дужи низ година, успешно се примењује образовни софтвер *GeoGebra*. Досадашња пракса, као и бројна истраживања, показала су да примена софтвера *GeoGebra* доприноси бољим постигнућима ученика, када су у питању различити математички садржаји. Својства овог образовног софтвера, међутим, омогућавају његову успешну примену и у решавању различитих проблема.

Конструктивизам

Традиционално виђење предавања, односно преношења знања, подразумева прављење копија знања наставника у умовима ученика. Међутим, бројна истраживања су показала да овакав начин преношења знања не даје увек добре резултате. Сама чињеница да су ученици присуствовали квалитетном предавању не мора да значи да су усвојили одговарајуће знање. Нарочито је изражен проблем краткотрајности стеченог знања и недовољне оспособљености ученика за примену истог. Један од приступа у настави, који у значајној мери доприноси бољем квалитету и трајности знања, као и оспособљавању ученика за примену знања, јесте конструктивистички приступ.

Конструктивизам као теорија учења подразумева да сваки ученик самостално конструише знање, те да је начин стицања знања јединствен за сваког ученика. Конструисање знања је процес у коме се знање формира на основу расположивих информација, а затим се континуирано тестира и надограђује, односно прилагођава потребама. С тим у складу, ученик неће конструисати било какво знање, већ оно које може да примени.

Иако се, на први поглед, може чинити другачије, улога наставника у конструктивистичком учењу је од изузетне важности. Како би омогућио ученицима конструисање квалитетног знања, неопходно је да их пажљиво води кроз сам процес конструкције знања – да им омогући да на што једноставнији начин усвоје нове појмове и њихове особине, да повеже градиво које је предмет изучавања са одговарајућим садржајима других предмета и да омогући ученицима да се упознају са применом наученог, те да им помогне у отклањању евентуалних потешкоћа, које могу настати током процеса учења. Будући да ученици конструишу знање на различите начине, неопходно је да наставник, кроз стални дијалог са ученицима, сагледа потребе ученика и да прати начин њиховог

размишљања, како би прилагодио свој приступ сваком од ученика, у оној мери у којој је то могуће.

Како би ученици конструисали квалитетно и трајно знање, неопходно је да за тим осете потребу. Потребу за новим знањем ће најбоље осетити уколико им је оно неопходно за решавање одређеног проблема који их је заинтересовао. Због тога је, ради стварања окружења погодног за конструктивистичко учење, потребно да наставник осмисли или одабере проблеме које ће ученици решавати, а који имају везе са реалношћу. Ово се постиже кроз добро организовану проблемску или пројектну наставу. Како би створио проблемску ситуацију која ће заинтересовати ученике, потребно је да наставник познаје њихова интересовања. Ово је још један од разлога због којих је неопходно постојање сталног дијалога између наставника и ученика. Креирањем проблемске ситуације посао наставника није завршен. Следећа улога наставника је правилно вођење ученика кроз процес решавања проблема, као и помоћ у одређеним ситуацијама. Помоћ им је најпотребнија у почетним фазама конструктивистичког учења, где се ученици први пут срећу са проблемским ситуацијама. Важно је оспособити ученике да самостално решавају проблеме, да препознају која су им знања потребна за решавање тих проблема, као и да траже одговарајући пут до неопходног знања.

Примена савремене технологије је веома значајна за успешно конструктивистичко учење. Она омогућава наставнику да организује квалитетнију наставу у конструктивистичком окружењу тако што се, коришћењем савремених наставних средстава и одговарајућег софтвера, постиже боља визуелизација и квалитетније представљање проблема, што омогућава ученицима да квалитетније конструишу менталну слику посматраног појма и да визуелизују своје активности. Са друге стране, технологија се користи као наставно средство и њена употреба не сме постати циљ. Дакле, технологију у настави треба користити онда када се процени да ће њена употреба унапредити квалитет наставе.

Ради што успешнијег конструисања знања, пожељна је размена идеја и мишљења међу ученицима. Због тога је важно да, осим дијалога између наставника и ученика, постоји и стални дијалог међу ученицима. Бројна истраживања су показала да вршњачко учење даје веома добре резултате када је конструисање знања у питању. Ради обезбеђивања одговарајућих услова за међусобну сарадњу и дијалог међу ученицима, често се примењује метода колаборативног учења.

Колаборативно учење

Колаборативно учење је метода сарадничког учења, где ученици, у малим групама, раде на остварењу заједничког циља, односно решавања проблема који је пред њих постављен. Током колаборативног учења акценат је на активностима ученика, а не на предавању наставника. Активности ученика нису увек исте. Оне се прилагођавају потребама конкретног проблема, односно задатка који група ученика треба да реши.

Колаборативно учење представља један вид проблемски орјентисане наставе, током које се ученици уводе у сложене проблеме, које затим заједнички анализирају и траже решења. Наставник поставља проблем и организује ученике који ће тај проблем заједнички решавати. Код оваквог решавања проблема неопходан је дијалог међу ученицима, како би се

успешније реализовале заједничке активности. Управо кроз међусобни разговор ученика долази до учења и стварања нових знања. Оваквим приступом код ученика се развија способност за решавање проблема, али и способност за доношење одлука. За разлику од класичног приступа, где се полази од теорије, а затим се учи примена, код колаборативног учења се пред ученике поставља проблем, а они, да би га решили, морају користити постојећа, али и тражити нова знања. Активно учење у решавању проблема подстиче ученике да траже нове информације и конструишу нова знања. Тражећи изворе информација неопходних за решавање одређеног проблема, ученици временом стичу способност да разликују битне информације од небитних. Ученици новостечено знање морају интегрисати са постојећим, али је неопходно и да реорганизују постојеће знање у складу са новим.

Колаборативно учење доприноси и оспособљавању ученика за тимски рад. Комплетан процес решавања проблема је веома сложен, а како би био успешан, неопходно је да тим добро функционише и да сарадња међу члановима групе буде што успешнија. Ученици, радећи у тиму, уче како да сагледају која знања поседују као тим (не мора нужно сваки од чланова тима поседовати исто знање), а до којих информација тек треба да дођу, како би конструисали нова знања, као и да сагледају на који начин да поделе улоге у тиму.

Да би све наведено успешно реализовали, ученици морају бити оспособљени за рад у групама и колаборативно учење. Процес колаборативног учења, због своје сложености, уколико није организован како треба, може бити веома конфузан и дезоријентисан. Због тога је веома битна улога наставника. Неопходно је да наставник, барем у почетку, води ученике кроз процес колаборативног учења, све док се они не оспособе за овакав начин рада и не схвате шта треба да постигну њиме. У почетним фазама се препоручује се примена такозваног кооперативног учења, које се такође заснива на заједничком раду ученика у малим групама, с тим да је улога наставника више изражена, односно, наставник има већу контролу над радом група него што је то случај код колаборативног учења. Такође је битно да наставник води рачуна о формирању група, како би се постигла њихова хетерогеност када је у питању знање ученика. Чланови хетерогених група су ученици са различитим нивоом знања и склоностима ка одређеном предмету, што омогућава да, уколико на одговарајући начин поделе улоге, сви ученици активно учествују у раду, те да ниједна група не заостаје због недостатка одговарајућег знања.

За разлику од класичне наставе, где се, углавном, ученици оспособљавају за решавање проблема применом шаблонских процедура, кроз колаборативно учење ученици се оспособљавају да сами праве шаблоне какви су им потребни за конкретан случај, а које ће, уз одређене измене и прилагођавања, моћи и убудуће да примењују у решавању сличних проблема. Бројна истраживања су показала да учењем у групи ученици достижу виши ниво знања, а информације до којих су дошли остају у сећању дуже него приликом индивидуалног учења. Поред наведених предности, примена колаборативног рада значајно доприноси развоју критичког мишљења, сарадње, одговорности према сарадницима и према заједничком раду. Будући да се, радећи у групи, ученици лакше сналазе у новим и непознатим ситуацијама, овај облик рада значајно доприноси отклањању треме и смањењу анксиозности.

Поред бројних предности, колаборативно учење има и одређене недостатке. Ови недостаци се углавном огледају у организационим потешкоћама. Организовање рада група,

координисање и надзирање истог захтева много труда, нарочито када се ради са великим бројем ученика. Важно је одржати рад групе, како не би дошло до одступања од садржаја, али је често потребно поунити празнине у времену, до којих долази када једна група брже заврши рад. Такође је захтеван посао прилагођавање плана рада колаборативном учењу, у смислу обезбеђивања адекватног простора, припремања часова, али је једнако захтевно и прилагођавање колаборативног учења програму наставе и учења. Код примене колаборативног учења, жељени резултати се не постижу брзо. Наставник мора бити стрпљив, јер је ученицима потребно одређено време да би се навикли на овакву наставну методу, али и спреман да унапређује колаборативни рад ученика отклањајући уочене недостатке.

Примена савремене технологије у многоне је допринела развоју колаборативног учења и његовој успешнијој имплементацији у наставни процес. Рачунари и телефони се могу користити као помоћна наставна средства у раду једне колаборативне групе, али и као средства комуникације међу члановима унутар групе. Примена савремене технологије омогућила је колаборативно учење на даљину, тј. сарадњу чланова колаборативне групе који се налазе на различитим местима.

Проблемска настава

Проблемска настава је истраживачког типа, што подразумева да се од ученика очекује да што више самостално истражују и траже нова решења одређеног проблема. Основни циљеви проблемске наставе су развој стваралачког мишљења ученика и конструисање квалитетног и трајног знања. Примена проблемске наставе се заснива на постојању проблема и проблемске ситуације и примени принципа постављања проблема.

Постављање проблема и стварање проблемске ситуације су неизоставни чиниоци проблемске наставе. Проблемом се може сматрати теоријска или практична тешкоћа која се не може савладати по унапред познатом шаблону, већ је за савладавање исте потребно истраживати и користити стваралачко мишљење. Да би ученици приступили решавању проблема, неопходно је заинтересовати их и подстаћи њихову креативност. То се постиже стварањем одговарајуће проблемске ситуације. Проблемска ситуација се може сматрати одговарајућом уколико је прилагођена знању, узрасту и способностима ученика. Постоји неколико начина стварања проблемске ситуације.

Први начин је да наставник прецизно постави проблем и захтева од ученика да се ангажују на његовом решавању. Предност овог начина у односу на остале јесте та што се на решавању јасно постављеног проблема могу ангажовати и ученици који не поседују велико математичко знање, али и они чије стваралачко мишљење није нарочито развијено. Главни недостатак је то што овај начин не подстиче додатно размишљање које је потребно за откривање проблема када он није јасно и прецизно постављен ученицима.

Други начин подразумева стварање проблемске ситуације у којој се очекује да ученици сами формулишу проблем, па да тек онда приступе његовом решавању. Оваква проблемска ситуација може бити исувише компликована за ученике чије стваралачко мишљење није нарочито развијено. Са друге стране, ученицима који воле да размишљају, овај начин може бити знатно интересантнији од првог јер, да би приступили решавању проблема, они најпре морају да открију и дефинишу сам проблем.

Постоји и начин који подразумева да наставник ствара ситуацију у којој је познат (или барем делимично познат) један проблем, а од ученика се очекује да, приликом анализе, открију нови проблем, који може бити предвиђен од стране наставника, али исто тако може бити непознат и самом наставнику. Последњи начин је најтежи и за наставника и за ученике, али зато знатно више подстиче креативност и стваралачко мишљење ученика него претходна два. Стога је његова примена пожељна у раду са ученицима са посебним склоностима за математику.

Кроз примену проблемске наставе, ученици се оспособљавају за сналажење у проблемској ситуацији, за препознавање проблема и за решавање проблема применом расположивих знања, вештина и стваралачког мишљења. Проблемска настава је захтеван наставни систем. Пракса је показала да је решавање проблема ученицима тешко, те да се и већина одличних ученика тешко сналази у проблемским ситуацијама. Један од могућих разлога томе јесте што се на часовима математике ретко примењује проблемска настава. Способност решавања проблемских задатака заправо представља способност примене научног градива у свакодневном животу, односно могућност решавања проблемских ситуација из свакодневног живота. Другим речима, проблемски задаци се могу избећи у школи, али не и у животу, тако да неспособљеност ученика за примену научног градива оставља далекосежне последице.

У већини случајева, када се примењује проблемска настава, проблеми су прилагођени ученицима који градиво савладавају на напредном нивоу постигнућа. Врло ретко се одређени математички проблеми прилагођавају средњем, а још ређе основном нивоу. Међутим, није само одличним ученицима потребно математичко знање у свакодневном животу. Због тога би било добро, у оној мери у којој је то могуће и онда када је то могуће, одређене математичке проблеме прилагодити основном и средњем нивоу постигнућа.

Да би се уопште могла примењивати проблемска настава приликом обраде одређене наставне јединице, ученици морају бити оспособљени за то, односно морају имати довољно предзнања које би применили у решавању проблема. Због тога је немогуће све наставне јединице обрадити на принципу проблемске наставе, већ се проблемска настава мора комбиновати са другим наставним методама. Комбиноване наставне методе, у којима би нарочито били изражени елементи проблемске наставе, значајно би допринели развоју стваралачког мишљења код мање успешних ученика. Не може се очекивати да ће сви ученици подједнако добро савладати одређене наставне јединице, али се квалитетним методама рада може постићи да се највећи број ученика оспособи да у свакодневном животу примени онај део градива који су успели да савладају. Такође, овакве наставне методе чине градиво занимљивијим, па би се многи ученици, који иначе избегавају учење математике, могли подстаћи и заинтересовати за овај предмет.

Улога наставника у проблемској настави се састоји у томе да, на почетку, створи проблемску ситуацију и подстакне ученике да реше проблем. Наставник, том приликом, мора указати ученицима на неке теоријске чињенице и, по потреби, упутити ученике како да одаберу потребне изворе информација, односно података, неопходних за решавање проблема. На крају, наставник мора са ученицима расправити о добијеним решењима, помоћи у одабиру најбољег решења и указати на могућност његове примене у ситуацијама из

свакодневног живота. Наставник мора бити спреман на то да ће неко од ученика доћи до решења или поставке проблема коју он није предвидео. У таквој ситуацији, наставник сам мора проценити ваљаност такве поставке и/или решења и указати ученику на потенцијалне грешке. Због свега наведеног, проблемска настава је захтевна и за наставника, а не само за ученике, па је неопходно и да наставник буде добро оспособљен за примену овакве наставне методе.

Пројектна настава

Пројектна настава је, као и проблемска, заснована на самосталној активности ученика и конструктивистичком учењу, а има за циљ учење кроз решавање реалних проблема. У већини случајева се реализује кроз колаборативни рад ученика. Бројне су сличности између проблемске и пројектне наставе, али постоје и одређене разлике. Највећи број теоретичара сматра да пројектна настава садржи елементе проблемске наставе, али да подразумева и одређене активности којих у проблемској настави нема.

Пројектна настава је најчешће мултидисциплинарна и може се организовати у оквиру више наставних предмета истовремено, што доприноси бољој корелацији наставних садржаја међу предметима и развоју међупредметних компетенција. Ова наставна метода неизоставно обухвата и извештај о реализацији пројекта, односно презентацију резултата рада ученика.

Реализација пројектне наставе одвија се у неколико фаза. Прва фаза подразумева избор теме пројекта, односно проблема на чијем ће решавању ученици радити. Важно је да проблем буде практичан и интересантан ученицима, како би, у што већој мери, били мотивисани за његово решавање. Због тога је пожељно да се, онда када је то могуће, избор проблема изврши у сарадњи са ученицима. Након избора теме пројекта, неопходно је формирати групе (тимове) ученика који ће заједнички радити на реализацији пројекта и поделити свакој групи одговарајући задатак. У овој фази проблем се рашчлањује и претвара у конкретне задатке за групе ученика, а целу фазу реализује наставник у сарадњи са ученицима.

У наредној фази неопходно је сачинити план решавања проблема. Овај план праве ученици на нивоу претходно формираних колаборативних група, док се улога наставника састоји у праћењу рада група и пружању подршке и помоћи тамо где је то потребно. У овој фази ће ученици одредити и начин презентације резултата пројекта.

Следећа фаза обухвата реализацију планираних активности. Ове активности реализују ученици по групама, а наставник усмерава њихов рад и помаже им онда када им је помоћ потребна и у оној мери у којој је то неопходно. Након тога, ученици сређују резултате свог рада, које ће касније презентовати. У овој фази се може очекивати да ће им помоћ наставника бити нешто потребнија него у претходној.

Завршне фазе обухватају презентовање резултата од стране ученика и евалуацију (оцењивање) рада ученика. Оцењивање врши наставник (односно наставници, уколико је више наставника заједнички учествовало у пројекту), али је од изузетне важности и оцена других ученика, којима су резултати презентовани, као и самоевалуација ученика који су реализовали презентоване активности.

Предности и недостаци пројектне наставе су сличне као и код проблемске. Додатна предност пројектне наставе је та што ће рад на пројектима током школовања у многоме олакшати каснији рад на пројектима са којима ће се ученици неминовно сретати у оквиру свог будућег занимања. Међупредметна сарадња, која је израженија код пројектне наставе, је предност, али уједно може проузроковати и додатне потешкоће у реализацији, у смислу ангажовања више наставника и прилагођавања програмима наставе и учења различитих предмета. Иако је првобитно пројектна настава замишљена као универзални начин рада, пракса је, као и бројна истраживања, показала да је, због уочених потешкоћа у реализацији, пројектну наставу пожељно комбиновати са другим наставним методама. Није препоручљиво да се комплетан образовно-васпитни рад организује на принципу пројектне наставе, али је пожељно да она заузме важно место у образовним системима, како би се побољшао квалитет знања ученика и њихова оспособљеност за примену истог.

***GeoGebra* у пројектној настави**

Новија истраживања у овој области показују да примена савремене технологије може значајно унапредити пројектну наставу. Будући да је, за успешну реализацију пројектне наставе, неопходно поставити проблем који ће заинтересовати ученике, у данашње време би било тешко и осмислити пројекат за чију реализацију није неопходна примена савремене технологије. Међутим, потребно је разликовати пројекте чија је тема непосредно у вези са технологијом од пројеката у којима се технологија користи само као једно од средстава неопходних за реализацију пројекта. У другом случају, а у складу са конструктивистичким принципима, технологију треба користити само у оној мери у којој је то неопходно за успешну реализацију пројекта.

Када је у питању пројектна настава у математици, односно пројекти за чију је реализацију неопходно математичко знање, примена образовног софтвера *GeoGebra* може у многоме допринети успешној реализацији пројекта. Овај образовни софтвер се може користити у различитим фазама реализације пројекта, зависно од тога где је потребно применити одређено математичко знање. Својства програма *GeoGebra*, као што су могућност рада са променљивим параметрима, тродимензионални приказ и многа друга, омогућавају ученицима бољу визуелизацију одређених садржаја, али и могућност посматрања и анализирања различитих објеката истовремено, што олакшава изучавање нових појмова и њихових особина. Поред математичких компетенција, као и осталих међупредметних компетенција које се развијају кроз пројектну наставу, примена софтвера *GeoGebra*, без обзира на тему пројекта, посебно доприноси развоју дигиталне компетенције код ученика, као и компетенције за рад са подацима и информацијама. У наредним примерима приказане су неке од могућности примене образовног софтвера *GeoGebra* у пројектној и проблемској настави, односно неке од могућих тема за пројекте у чијој би реализацији примена овог софтвера била веома корисна.

Примена функција у реалним проблемима

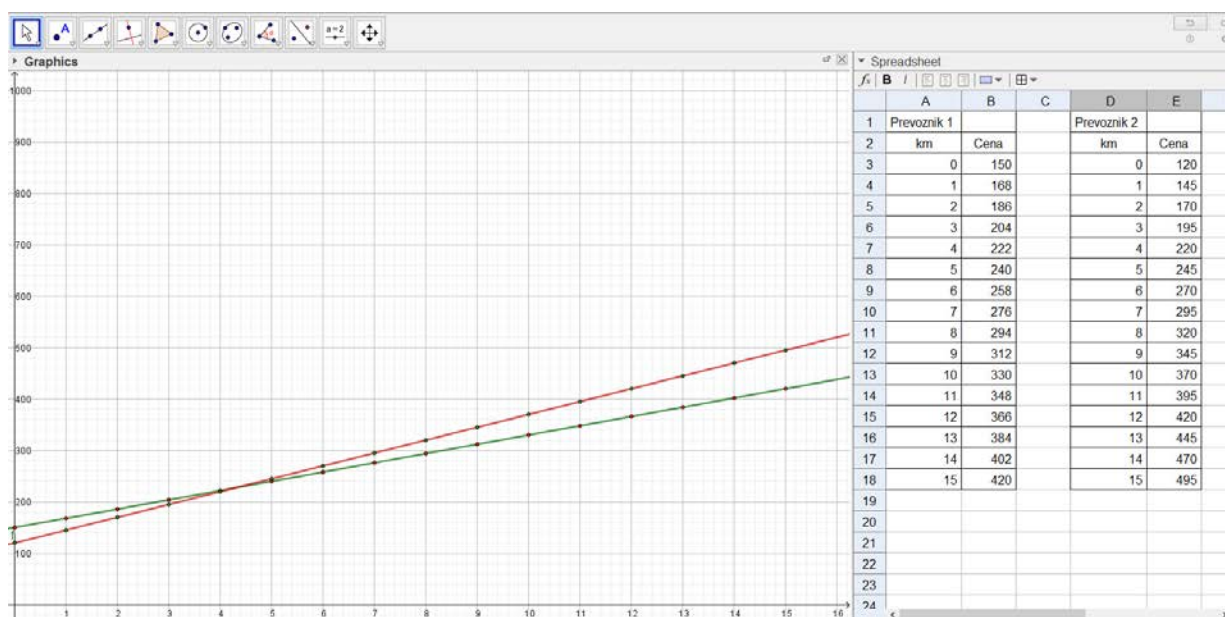
Реалне функције имају широку примену у математичком моделирању, а самим тим и у решавању бројних проблема у разним научним дисциплинама, односно у моделирању

реалних проблема. Могуће је осмислити различите теме пројеката, за чију ће реализацију бити неопходно применити знање из области функција.

У осмом разреду основне школе се изучава линеарна функција и њене особине. Постоје бројни проблеми који се могу решавати применом линеарне функције. Већина ових проблема је једноставна и у њиховом решавању могу учествовати и ученици који имају потешкоћа у савладавању математичког градива. У зависности од интересовања ученика, могуће је осмислити различите проблеме, током чијег ће решавања ученици одредити зависност међу величинама, која ће касније бити дефинисана као линеарна функција. Са друге стране, могуће је прво упознати ученике са линеарном функцијом и њеним особинама, а затим, кроз пројекат, помоћи ученицима да се упознају и са њеном применом.

Уколико ученицима није позната линеарна функција, примена образовног софтвера *GeoGebra* им може помоћи код приказивања зависности међу посматраним величинама. Након што се упознају са линеарном функцијом, овај софтвер им може помоћи да се детаљније упознају са њеним особинама. Овде нарочито долазе до изражаја динамичка својства програма *GeoGebra*, која омогућавају ученицима да променљиве параметре дефинишу помоћу клизача и да, на тај начин, посматрају утицај параметара на особине функције, односно да, у кратком временском року, испитају особине више линеарних функција, код којих се разликују вредности параметара.

Рад са параметрима може, на пример, бити од користи када ученици примењују линеарну функцију како би изразили зависност цене вожње таксијем од пређеног растојања. У том случају, „старт“ ће бити дефинисан помоћу слободног члана, док ће цена по пређеном километру бити дефинисана помоћу коефицијента уз линеарни члан. Дефинишући ове цене помоћу параметара, ученици могу, користећи графички приказ програма *GeoGebra*, анализирати и поредити цене различитих превозника. Такође, могу истовремено, у оквиру програма *GeoGebra*, приказати и табеларну репрезентацију посматране зависности, што ће им, уз графички приказ, у многоме олакшати решавање проблема. Пример оваквог коришћења програма *GeoGebra* од стране ученика приказан је на Слици 1.



Слика 1. Примена линеарне функције у решавању проблема

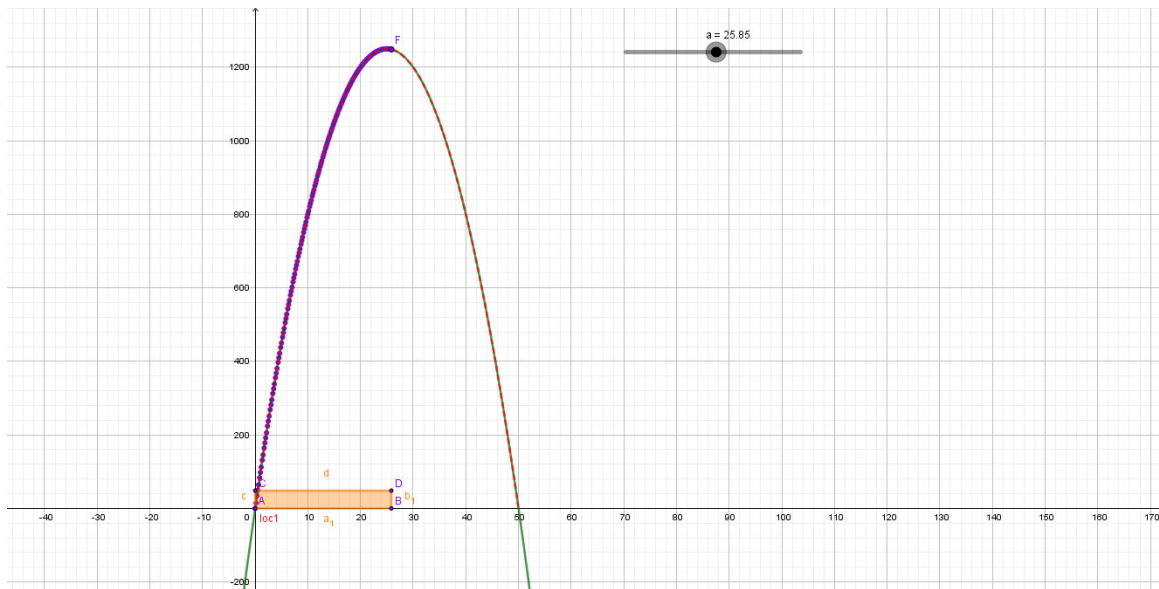
Користећи образовни софтвер *GeoGebra* на овај начин, ученици могу детаљније изучавати особине линеарне функције, али и дискутовати о томе на ком скупу има смисла дефинисати функцију у зависности од природе проблема који моделирају. Пројекте везане за примену линеарне функције могуће је реализовати и са ученицима првог разреда средње школе. Теме пројеката могу бити одабране тако да се реализују само у оквиру наставе математике (иако ће, по потреби, ученици примењивати знања других научних дисциплина), али и кроз сарадничку наставу, односно у сарадњи са наставницима других предмета, као што је физика, економска група предмета (у школама у којима се ови предмети изучавају) и други.

Поред линеарне, у средњошколској настави математике могуће је реализовати пројекте у којима би ученици решавали проблеме применом других функција. У другом разреду средње школе могуће је одабрати теме пројеката, тако да ученици, кроз њихову реализацију, изучавају особине квадратне, експоненцијалне, логаритамске и тригонометријских функција.

У једном од успешно реализованих пројектних задатака од ученика је тражено да пронађу примере примене квадратне функције у реалним проблемима. Пројекат је реализован са ученицима другог разреда Гимназије „Светозар Марковић“ у Новом Саду. Ученици, на почетку реализације, нису били упознати са особинама квадратне функције, тако да је један од циљева био да, кроз заједнички рад, детаљније изуче квадратну функцију и њене особине, односно очекивано је да развију одговарајуће математичке компетенције, али и да, кроз изучавање примене квадратне функције, развијају компетенцију за решавање проблема, као и дигиталну, компетенцију за рад са подацима и информацијама, те компетенције за сарадњу и комуникацију.

Пројекат је реализован ван учионице, а у школи су презентовани резултати. Ученици су се, на нивоу група, договарали о начину реализације. Будући да су на располагању имали обимну литературу, како писану, тако и електронску (путем интернета), лако су дошли до информација које су им биле потребне (у вези са особинама квадратне функције). Нашли су и велики број интересантних примера примене квадратне функције, а најчешће су обрађивали примере у којима је, применом квадратне функције, решаван проблем максимизације површине.

У готово свим групама које су обрадиле овакав пример, ученици су користили образовни софтвер *GeoGebra*. Претходно су, у оквиру наставе математике, били упознати са коришћењем овог програма, а имали су на располагању и помоћ наставника када им је била потребна. Неки су ограничено користили својства програма *GeoGebra* (само за цртање графика и израчунавање одговарајућих вредности), док су неки детаљно изучавали проблем, користећи различита својства овог програма. На Слици 2 приказан је динамички радни лист, креиран у *GeoGebra* окружењу, у оквиру којег је једна група ученика анализирао проблем максимизације површине простора правоугаоног облика, ограда са три стране, где је дужина ограде унапред задата. У решавању овог проблема, користили су динамичка својства образовног софтвера *GeoGebra*, као и особину „локус“, која им је помогла да одреде график функције површине у зависности од дужине простора.



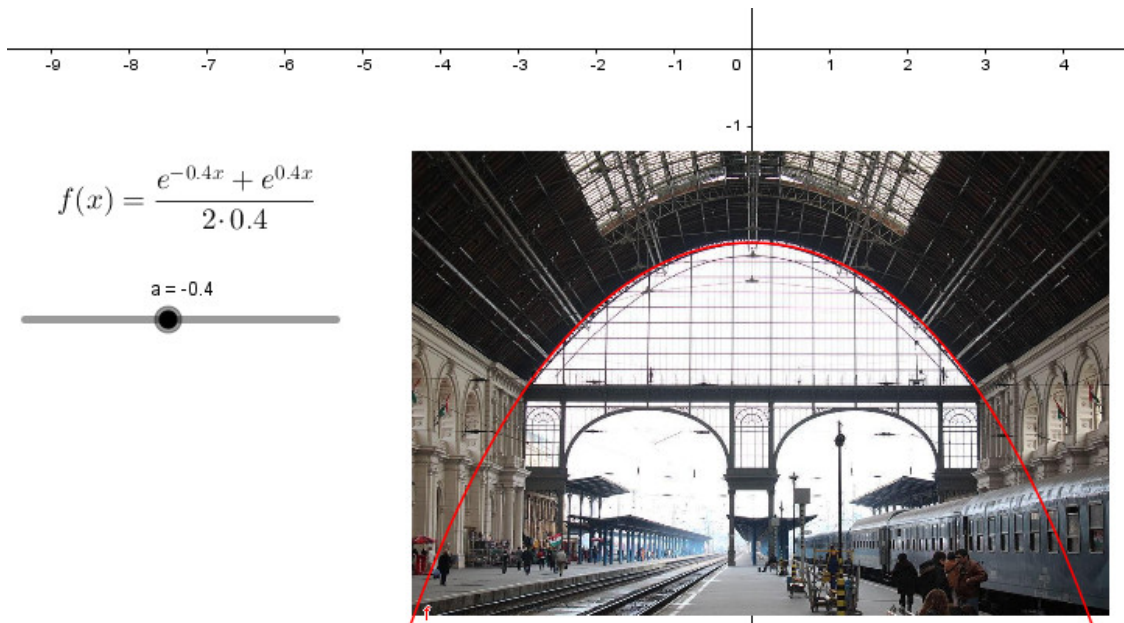
Слика 2. Примена квадратне функције у решавању проблема

Ланчаница или парабола?

Функције имају веома важну примену и у архитектури. Једна од интересантних тема пројекта за ученике средњих школа могла би се односити на моделирање лукова у архитектури помоћу реалних функција. Ученици који су добијали сличне истраживачке задатке, неретко су долазили до погрешног закључка да већини лукова у архитектури одговара облик параболе (график квадратне функције), док се, у ствари, ради о ланчаници (график функције $f(x) = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}$, где је a реалан параметар). Иначе, честа је дилема да ли неком луку одговара парабола или ланчаница, па је за очекивати да ће, уз одговарајућу мотивациону причу, ученицима бити интересантно да се позабаве оваквим проблемом.

Примена динамичких својстава образовног софтвера *GeoGebra* могу бити веома корисна у реализацији оваког пројекта. Наиме, истовремени приказ ланчанице и параболе, као графика одговарајућих функција, у *GeoGebra* окружењу, а уз коришћење неопходних параметара, претходно дефинисаних помоћу клизача, може помоћи ученицима да одреде која од кривих одговара посматраном луку. Померање клизача, односно промена вредности параметара, омогућава прецизно одређивање аналитичког израза одговарајуће функције. Пример примене програма *GeoGebra* у решавању проблема ланчанице дат је на Слици 3.

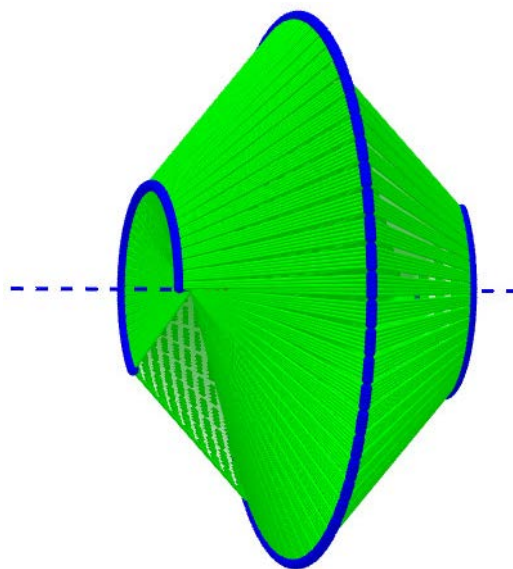
За очекивати је да ће реализација оваког пројекта допринети развоју, не само математичких и дигиталних компетенција, него и естетичке компетенције ученика. Пројекат се може реализовати и ван оквира наставе математике, у сарадњи са наставницима ликовне културе или са наставницима стручних предмета у области грађевинарства и архитектуре, у одговарајућој средњој стручној школи. Што се тиче математичких компетенција, изучавање оваквих садржаја доприноси бољем упознавању особина функција, као и сличности и разлика између функција. Такође, очекиван је и допринос оспособљавању ученика за примену знања из области функција у решавању различитих проблема.



Слика 3. Анализа проблема ланчанице у *GeoGebra* окружењу

Ротациона тела

Пракса је, као и бројна ранија истраживања, показала да ученици, како основне, тако и средњих школа, имају потешкоће у савладавању градива у области стереометрије. Нарочит проблем им представљају особине ротационих тела. Ученици најчешће имају потешкоће када је потребно да замисле и прикажу тело настало ротацијом неке фигуре. Тродимензионални приказ образовног софтвера *GeoGebra* омогућава да се, на једноставан начин, прикаже и анализира било које ротационо тело. Корисник овог програма може посматрати ротацију одређене фигуре и настанак геометријског тела, а касније, померајући тродимензионални приказ у *GeoGebra* окружењу, посматрати настало тело и његове елементе из различитих углова. Пример рада у *GeoGebra* 3Д окружењу дат је на Слици 4.



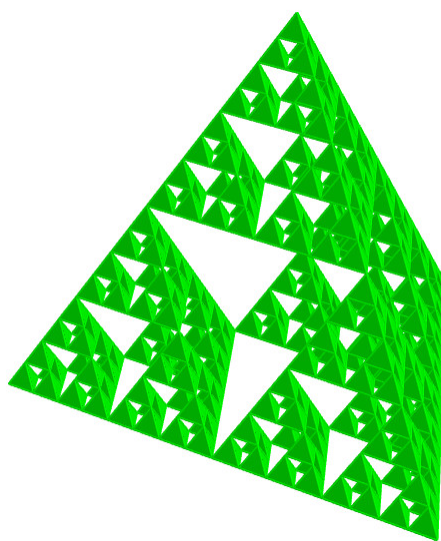
Слика 4. Ротација фигуре у *GeoGebra* 3Д окружењу

Ову тему је такође могуће обрадити кроз пројекат или кроз проблемску наставу. Штавише, за очекивати је да ће колаборативни рад омогућити да и ученици, који иначе имају значајне потешкоће у савладавању овог дела градива, боље разумеју настанак и особине ротационих тела. Ову тему је пожељно реализовати у оквиру наставе математике и њена успешна реализација највише доприноси развоју математичких компетенција и дигиталне компетенције. Међутим, може се очекивати да ће рад на решавању оваквих и сличних проблема допринети и развоју способности просторног резоновања ученика. Пројекат на ову тему успешно је реализован са ученицима трећег разреда Гимназије „Светозар Марковић“ у Новом Саду, који су имали задатак да, по групама, изучавају тела настала ротацијом различитих фигура, да их прикажу у *GeoGebra* 3Д окружењу и да опишу настанак и елементе добијених тела, као и да изведу формуле за површину и запремину и да направе моделе. Тему је могуће прилагодити и ученицима осмог разреда основне школе.

Фрактали

Фрактали су структуре чији делови представљају умањене копије целине. Можемо их срести у природи – пахуље снега, лишће папрати, шаре на крзнима животиња и многи други примери. У последње време је нарочито популарна фрактална уметност – дигитална уметност која се бави представљањем фрактала. Представљање фрактала је засновано на математици. Бројни математики садржаји, а нарочито садржаји из геометрије, нашли су примену у овој уметности.

Фрактална уметност је готово незамислива без примене савремене технологије, односно одговарајућег софтвера. Образовни софтвер *GeoGebra* такође омогућава представљање фрактала на различите начине. За представљање фрактала у *GeoGebra* окружењу највише се користе опције за конструкцију фигура, као и динамичка својства програма. На Слици 5 приказан је тетраедар Сјерпинског, који представља пример фракталне уметности, креиран у *GeoGebra* 3Д окружењу.



Слика 5. Тетраедар Сјерпинског у *GeoGebra* 3Д окружењу

За очекивати је да би фрактална уметност била веома интересантна ученицима свих узраста. Такође се може очекивати да би рад са фракталима додатно мотивисао ученике који иначе нису мотивисани за изучавање математичких садржаја. Због тога би било пожељно осмислити одговарајуће теме везане за фрактале и реализовати их у оквиру пројектне наставе. Могуће је осмислити велики број пројектних задатака, таквих да ученици креирају фрактале на различите начине. У томе би им примена образовног софтвера *GeoGebra* била од велике помоћи. Овакви пројекти би могли бити реализовани у сарадњи са наставницима ликовне културе, али и предмета као што су хемија и биологија (фрактали у природи). Реализација оваквих пројеката би допринела развоју естетичке и дигиталне компетенције, али и математичких компетенција, као и компетенција за сарадњу и комуникацију.

У наведеним примерима приказане су само неке од бројних могућности примене образовног софтвера *GeoGebra* у реализацији пројектне наставе. Иако би одређени пројекти могли бити реализовани и без примене софтвера, *GeoGebra* значајно олакшава ученицима њихову реализацију и подстиче их да додатно истражују и откривају нова знања. На тај начин, примена програма *GeoGebra* нарочито доприноси развоју математичких, али и многих других, раније поменутих, међупредметних компетенција.

Литература

Божић, Р. (2019). *Методичка обрада функција са параметрима уз помоћ рачунара (докторска дисертација)*. Универзитет у Новом Саду, Природно-математички факултет, Нови Сад.

Božić, R., Takači, Đ., & Stankov, G. (2019). Influence of dynamic software environment on students' achievement of learning functions with parameters. *Interactive Learning Environments*. DOI: [10.1080/10494820.2019.1602842](https://doi.org/10.1080/10494820.2019.1602842)

Chan Lin, L-J. (2008). Technology integration applied to project-based learning in science. *Innovations in Education and Teaching International*, 45(1), 55-65.

Курник, З. (2002). Проблемска настава. Загреб: *Математика и школа 15*, стр. 196-202.

Обрадовић, М. & Пофук, Љ. (2007). Проблемска настава. *Настава математике*, бр. 233, Друштво математичара Србије, стр. 12-16.

Tomaschko, M., Kocadere, S. A., & Hohenwarter, M. (2018). Opportunities for participation, productivity, and personalization through geogebra mathematics apps. In A. Ali Khan & S. Umair, (Eds.), *Handbook of research on mobile devices and smart gadgets in K-12 education* (pp. 45-56). IGI Global.

Вилотијевић, М. & Вилотијевић, Н. (2016). *Модели развијајуће наставе 1*. Београд: Универзитет у Београду, Учитељски факултет.

Вилотијевић, М. & Вилотијевић, Н. (2016). *Модели развијајуће наставе 2*. Београд: Универзитет у Београду, Учитељски факултет.