ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

АКРЕДИТОВАНИ ПРОГРАМ:
345. ДРЖАВНИ СЕМИНАР О НАСТАВИ
МАТЕМАТИКЕ И РАЧУНАРСТВА
ДРУШТВА МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Компетенција: К1
Приоритети: 3

ТЕМА 12:

ДОДАТНА НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ У СЕДМОМ РАЗРЕДУ ОСНОВНЕ ШКОЛЕ

РЕАЛИЗАТОРИ ТЕМЕ:

др Војислав Андрић, професор (Ваљевска гимназија),
Иванка Томић, професор (Ваљевска гимназија)

БЕОГРАД,
10. 02. 2020.

ДОДАТНА НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ У СЕДМОМ РАЗРЕДУ ОСНОВНЕ ШКОЛЕ

др Војислав Андрић, Иванка Томић

„Логика ће вас одвести од А до В.
Машта ће вас одвести где год пожелите.“

Алберт Анштајн

1. УВОД

У богатој народној ризници постоји и пословица: „Ко у чуда верује, тај чуда и ствара“. Чудо је да је Србија земља са свега седам милиона становника, са просечним платама међу најмањима у Европи, са бруто националним дохотком и 30 пута мањим од најбогатијих, са школама које скоро неће прећи на једносменски рад ... већ годинама у европском и светском врху по резултатима које на међународним математичким и информатичким (а и на другим) такмичењима постижу млади људи. Још чудније је како то успевају, односно ко су ти људи који верују да се и у сиромаштву вредним, осмишљеним и креативним радом могу постићи резултати који у нашем образовању представљају изузетак и који својим дугогодишњим стрпљивим радом и невероватним ентузијазмом доприносе да с правом можемо рећи: „У 2019. години у Европи само су Руси били бољи од нас“.

Заслуге за то сигурно су персоналне, али не треба заборавити да су и системске, јер сви ти наши шампиони (јако обдарени и много вредни младићи и девојке) ипак нису самоникли, већ су продукт једног система који почива на додатном раду са талентованим ученицима у нашим основним и средњим школама, разгранатом систему такмичења и читавом низу других активности којима се популарише математика („Математички лист“, издаваштво, математички квиз, летње школе, математички турнири ...), а где се у врху те добитничке пирамиде налази Математичка гимназија са својим самогенеришућим системом рада са обдареним ученицима.

Мало је вероватно да ћемо ускоро на ИМО бити опет девети у свету и други у Европи, али је сигурно да имамо још много унутрашњих резерви и да систем рада са за математику заинтересованим и обдареним ученицима можемо значајно да унапредимо. Циљ овог рада је да укаже на неке од могућности унапређивања система које се генерално односе на саму базу добитничке пирамиде - додатни рад у области математике. Примери и модели који директно илуструју те могућности, конкретно се односе на седми разред основне школе.[1]

[1] Два су разлога зашто је изабран баш седми разред. Први је што је на нашем семинару првога дана веома комплексно третирана редовна настава у 7. разреду. Други је што је ДМС у оквиру своје издавачке делатности ученицима и наставницима понудило приручник за додатну наставу у 7. разреду и што је део идеја садржаних у тексту који следи, реализован у приручнику „Математика 7*“.

2. О ДОДАТНОЈ НАСТАВИ

2.1. ШТА ЈЕ ДОДАТНА НАСТАВА ?

Додатна настава је специфични облик наставног рада који се организује за напредније ученике који су потпуно свладали садржаје редовне наставе, а који имају склоности за науку или уметност и изражену жељу да стечена знања прошире и продубљују, али и обогаћују новим садржајима. Додатна настава је утемељена на одредбама члана 3. Закона о основама система образовања и васпитања у који недвосмислено дефинише право да ученик са изузетним способностима има право на образовање и васпитање које уважава његове посебне образовне и васпитне потребе. У том смислу у нашим школама се реализује додатна настава као посебан облик рада који подразумева идентификацију ученика за додатни рад, доношење програма додатног рада и плана реализације додатне наставе, као и мерење ефеката таквог рада.[2]

Закон о основама система образовања и васпитања у члану 76. дефинише и могућност реализације индивидуалног образовног програма (ИОП – 3) који подразумева индивидуални рад на проширивању и продубљивању садржаја са ученицима са изузетним способностима. Како се ова могућност додатно не финансира и како њена реализација тражи преобимну документацију, ИОП – 3 није заживео у нашим школама. То је заиста велика штета, јер би суштинско увођење ИОП – 3 са прецизним мерењем резултата таквог рада било значајан подстицај за ученика и велики мотив и права сатисфакција за наставника који реализују ИОП – 3 (поготову ако би министарство предвидело и стимулационе мере).

2.2. КАКО ВИДИМО ДОДАТНУ НАСТАВУ МАТЕМАТИКЕ?

Додатна настава математике, поред начела садржаних у општим поставкама додатне наставе, има и низ својих специфичности које проистичу из природе математике као науке, али и из других, углавном дидактичко.методичких посебности.

У том смислу додатна настава математике није само рад на одређеним групама задатака, нити само припрема за математичка такмичења. Додатна настава математике је много више од тога - комплексан облик наставног рада који подразумева сталну индивидуализацију редовне наставе и индивидуализацију домаћих задатака и низ других дидактичко-методичких захвата (одабир корисних текстова, рад са литературом, мали истраживачки рад, могуће студије, рад на потпуно новим наставним садржајима, коришћење интернета ...).

Додатна настава математике има задатак и да ученике оспособи за самоучење, па је зато њен саставни део обука о томе како се решавају математички проблеми, како се исписују решења задатака, како се пишу мали математички радови, како се користи математичка литература, како се користи интернет, како се формира сопствена математичка библиотека, како се прави лична документација ... Све наведено не мора бити предмет посебних часова, али мора бити вешто уклопљено у додатне активности, и реализује се у оквиру сталних настојања за унапређивање знања и вештина обдарених ученика.

[2] Детаљније видети на: http://pspasojevic.blogspot.com/2010/12/blog-post_1744.html

2.3. ДОДАТНА НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ И МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА

Већ је речено да додатна настава математике није исто што и припрема ученика за математичка такмичења. Додатна настава математике мора имати свој континуитет који подразумева уградњу календара и програма математичких такмичења у програм и план реализације додатне наставе. Али додатна настава математике мора почети, на почетку школске године и пре математичких такмичења и завршити се при крају школске године (по завршетку такмичења). Апсурдно су тврђења да ученици губе мотив оног тренутка када се неквалификују за наредне ступњеве такмичења. Јесу математичка такмичења снажан мотив за додатно бављење ученика математиком, али не и једини, јер знање и друге вештине које проистичу из реализације додатне наставе математике треба да буду добри разлози да стални рад. Пласман на математичким такмичењима не подразумева само знање математике, већ и психолошке предиспозиције, тренутну концентрацију, брзину реакције, крупне и ситне превиде ... па и срећу. Многи јако добри млади математематичари једноставно немају такмичарске карактеристике, али имају успеха при исказивању својих математичких знања и способности на другим плановима (математички есеји, студије случаја, мала истраживања, уопштавања ...).

3. МЕТОДИЧКИ ИЗАЗОВИ

Овај део рада посвећен је разним методичким захватима који имају задатак да математичке способности и математичку културу ученика подигну на виши ниво. Ови захвати су опште намене и значајно ће утицати не само на решавање једног конкретног задатка, већ на оспособљавање ученика за трајно бављење математиком (али и другим научним дисциплинама).

3.1. КАКО ЋУ РЕШИТИ МАТЕМАТИЧКИ ЗАДАТАК?

„Како ћу решити математички задатак?“ је књига коју је 1945. године написао, а 1957. године изменио и допунио чувени амерички математичар и методичар математике Ђерђ Поја [3] (Georg Polya 1887 - 1985). Књига је 1957. први пут, а 1966. године други пут објављена у Југославији, а издавач је била „Школска књига“ Загреб.

Књига „Како ћу решити математички задатак?“ је приручник за ученике и наставнике који се младим математичарима препоручује за детаљно проучавање предложеног модела решавања математичких задатака, пажљиву анализу датих примера и примену свега сазнатог у свом даљем самосталном раду.

Шта препоручује Ђерђ Поја?

Ђерђ Поја решавање математичког задатка посматра кроз четири међусобно повезане фазе: 1) разумевање задатка; 2) стварање плана за решавање задатка; 3) реализација плана и 4) провера и анализа решења. Детаљан алгоритам се може видети видети у литературри. [3, 4]

---

[3] Ђерђ Поја (Georg Polya, Будимпешта 1887 – Сало Алто – САД 1985) је мађарски математичар који је највећи део свог живота и плодног рада реализовао у САД.

[4] Ђерђ Поја се проблематиком решавања математичких проблема још детаљније бави у својој монографији „Математичко откриће“ (Хрватско математичко друштво 2003.)

ПРИМЕР 1: *Да ли је могуће да збир неколико реалних бројева буде* 10*, а да збир њихових квадрата буде мањи од* 1*?*

ПРИМЕР 2: *Да ли је могуће да да све висине троугла буду веће од* 2*, а да његова површина буде мања од* 2*?*

ПРИМЕР 3: *Мерни бројеви дужина страница троугла су три узастопна природна броја. Висина која одговара средњој по величини страници, дели ту страницу на одсечке x и y (x > y). Доказати да је* $x - y = 4$.

3.2. РЕШАВАЊЕ ПРОБЛЕМА ПО АНАЛОГИЈА

Решавање по аналогија је најчешћи начин решавања математичких задатака. Ако се једна идеја добро савлада, онда се у сличним ситуацијама једноставно примењује. Зато је у додатној настави неопходно неке идеје добро увежбати, при чему треба имати у виду чињеницу да затеви из задатка у задатак буду сложенији, чиме се избегава проста репродуктивност, која нема утицаја на напредовање ученика.

ПРИМЕР 4: *Шта је веће:* $\sqrt{10} + \sqrt{13}$ *или* $\sqrt{11} + \sqrt{12}$ *?*

ПРИМЕР 5: *Дати су изрази:* $a = \sqrt{3} + \sqrt{5}$ *и* $b = 4$*. Шта је веће a или b?*

3.3. ДОКАЗИВАЊЕ КОНТРА ПРИМЕРОМ

Доказни задаци су веома присутни у додатној настави. При том нам се чини да доказивање контра примером има посебан значај, јер оспособљава ученика за процену реалности неког „тврђења“, али и за процену тачности „сопствених теорема“ које су на овом узрасту прилично присутне. Дилеме које настају питањем „Да ли је тачно тврђење...“ или се решавају доказивањем постављене тезе или њеним оповргавањем. Најчешће, доказ подразумева да дато тврђење важи за све бројеве, фигуре, уопште математичке објекте, а оповргавање тврђења само конструкцију примера из кога се види да је дато тврђење нетачно.

ПРИМЕР 6: *Да ли је n-тоугао (n > 5) чије су све странице једнаке правилан?*

ПРИМЕР 7: *Да ли је n-тоугао (n > 5) чији су сви углови једнаки правилан?*

ПРИМЕР 8: *Да ли је број 1000 ... 0001 (88 нула) прост или сложен број?*

ПРИМЕР 9: *Тангентни трапез има основице* 19 *и 11. Колико има таквих трапеза? Може ли крак тог трапеза бити 20?*

3.4. ДИРЕКТАН ДЕДУКТИВНИ ДОКАЗ

Највећи број доказа у математици је директан, што значи да се при доказивању користи особина транзитивности импликације $(A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \ldots M \Rightarrow N, N \Rightarrow P) \Leftrightarrow (A \Rightarrow P)$. У додатној настави ученике треба оспособити за такву врсту доказивања и образлагања сваке импликације. Али, што је исто тако важно, и за коректно записивање таквог доказа и припадајућих образложења.

ПРИМЕР 10: *Докажи да је збир површина квадрата конструисаних над катетама правоуглог троугла једнак површини квадрата конструисаног над хипотенузом тог троугла. (Питагорина теорема).*

ПРИМЕР 11: *Докажи да је збир цифара броја* $2^{13} \cdot 3^4 \cdot 5^{11}$ *једнак* 9.

ПРИМЕР 12: *Нека је* x = 444...444 (11 *четворки*). *Докажи да је број* $x^2 - x - 2$ *дељив са* 270.

ПРИМЕР 13: *У квадрату ABCD, E је средиште странице CD, а F је подножје нормале из B на AE. Докажи да се странице троугла BEF задовољавају релације:* $BE : BF : EF = 5 : 4 : 3$.

ПРИМЕР 14: *Тачке B' и C' су подножја висина из темена B и C троугла ABC. Ако је тачка O центар описаног круга око троугла ABC, онда је B'C' нормално на AO. Докажи.*

3.5. ДОКАЗИВАЊЕ СВОЂЕЊЕМ НА ПРОТИВУРЕЧНОСТ

Са доказивањем свођењем на противуречност ученици се први пут сусрећу у настави математике управо у 7. разреду код доказивања да $\sqrt{2}$ није рационалан број. Међутим, чини се да ће доказивање свођењем на противуречност бити брзо заборављено, ако се не користи када год је то рационално. Како у додатној настави за то има пуно прилика, треба их користити и због краћег доказа, али и због илустрације оваквог начина доказивања као идеје која је корисна и јако ефикасна.[5]

ПРИМЕР 15: *Докажи да да је збир, разлика, производ и количник једног рационалног броја и једног ирационалног броја - ирационалан број (у случају множења и дељења рационалан број нијенула) .*

ПРИМЕР 16: *Две кружнице са центрима* O_1 *и* O_2 *имају заједниче тачке A и B. Права p која садржи тачку A, сече дате кружнице у тачкама M и N. Докажи да је* $\angle O1MB = \angle O2NB$.

3.6. МЕТОД РАЗЛИКОВАЊА СЛУЧАЈЕВА

Метод разликовања случајева је такође моћно средство и за доказивање тврђења и за решавање многих занимљивих задатака. Идеје да се посматрају случајеви парног или непарног броја, тачке која се налази у кругу, на кружници или изван круга, последњих цифара производа два узастопна броја ... и сличне, бар у додатној настави нису нове, али су врло употребљиве за решавање читавог низа задатака и тренирању интуиције када се ради о важном питању: Како домен задатка поделити на дисјунктне скупове у којима се дати задатак решава релативно једноставно?

ПРИМЕР 17: *Над страницом AB троугла ABC као пречником конструисана је кружница. Ако је теме C унутар круга онда је троугао тупоугли; ако је тачка C на кружници троугао је правоугли; ако је тачка C изван круга троугао је оштроугли. Докажи.*

ПРИМЕР 18: *Нека су мерни бројеви страница троугла редом a, b и c* ($a < b < c$). Ако је $a^2 + b^2 = c^2$, *троугао је правоугли; ако је* $a^2 + b^2 < c^2$, *троугао је тупоугли; ако је* $a^2 + b^2 > c^2$, *троугао је оштроугли. Докажи.*

[5] Не заборавити доказ да је скуп простих бројева бесконачан (као први доказ у коме је коришћено свођење на противуречност.

<u>ПРИМЕР 19:</u> Постоји ли квадрат природног броја чији декадни запис садржи n једнаких цифара, при чему је $n \geq 2$.

<u>ПРИМЕР 20:</u> Одреди све природне бројеве x и y такве да је $1! + \ldots + x! = y^2$.

<u>ПРИМЕР 21:</u> Све тачке равне обојене су са једном од две боје. Конструисати једнакостранични троугао чија су сва темена исте боје.

3.7. КОНСТРУКТИВИСТИЧКИ ПРИСТУП ЗАДАЦИМА

Највећи број задатака који се решавају у редовној настави математике је садржан у захтевима: одреди, израчунај, упрости, докажи, скицирај, нацртај, конструиши ... Наведени захтеви указују на извесну егзистенцију резултата израчунавања, својства које се доказује, објекта који се конструише. Мало је оних који се баве постојањем решења и специфичним захтевима везаним за решења. Мислимо да бар додатну наставу математике треба обогатити и увести и задатке у којима ће се тражити одговори на следећа питања:

1. Да ли уопште дати задатак има или нема решења (у оба случаја треба доказ)?
2. Да ли је број решења коначан или бесконачан (у оба случаја треба доказ)?
3. Ако је број решења коначан, одреди колико их има и одреди сва решења?
4. Ако је број решења бесконачан да ли се та решења могу описати (заједничким својством, формулом или на неки други начин)?
5. Да ли постоје решења која задовољавају неке посебне тражене услове?

Суштина ових питања је конструктивност која се очекује, тј. трагање за математичким објектима који задовољавају услове задатка без сазнања да ли стакви објекти уопште постоје. То трагање је анализа датих услова за коју је неопходна синтеза многобројни знања и идеја.

<u>ПРИМЕР 22:</u> Постоји ли троугао у коме је једна висина једнака збиру друге две висине?

<u>ПРИМЕР 23:</u> Може ли број дијагонала конвексног многоугла бити потпун квадрат неког природног броја?

<u>ПРИМЕР 24:</u> Дате су дужи a, b и c. Конструисати тетивни трапез коме су a и b основице, a c је крак.

3.8. ГЕНЕРАЛИЗАЦИЈА ПРОБЛЕМА

Уопштавање проблема је методички захват који најчешће није пропорционалан узрасту ученика, али који не треба занемарити у потпуно јасним ситуацијама. У том смислу су веома веома важна питања која наставник поставља, јер добрим вођењем ученик може ефикасно и поступно доћи до жељеног резултата.

<u>ПРИМЕР 25:</u> Шта је веће 2^{300} или 3^{200}? Може ли се дати проблем уопштити?

<u>ПРИМЕР 26:</u>   Дат је једнакостранични троугао. Може ли се дати троугао поделити на: а) 4; б) 6; в) 7; г) 8 једнакостраничних троуглова који могу, али не морају бити подударни? Уопшти дати проблем?

<u>ПРИМЕР 27:</u>   Колико делилаца има број 360? Колико делилаца има број p^{α}, где је p прост број и α неки ненегативан цео број? Колико делилаца има природан број $n = p^{\alpha} \cdot q^{\beta} \cdot r^{\gamma}$, где су p, q и r прости бројеви и α, β и γ ненегативни цели бројеви?

3.9. КРЕАТИВНОСТ НА ДЕЛУ

Психолошка истраживања показују да се креативност не може научити. Али и да се коректним и квалитетним радом стваралачке способности могу усавршити. Додатна настава математике у седмом разреду је добра прилика и за креативо понашање ученика, али и за унапређивање стваралачких особина обдарених, јер садржаји рада обилују лепим идејама које треба упознати и на сличан начин размишљати при решавању нових задатака.

<u>ПРИМЕР 28:</u> Дати су бројеви 1, 3, 4 и 6. Користећи сваки од датих бројева тачно једном, уз помоћ симбола рачунских операција и заграда, напиши бројевни израз чија је вредност 24.

<u>ПРИМЕР 29:</u> У једнакокрако-правоуглом троуглу АВС (са правим углом код темена А) дата је тачка М, тако да је $\angle AMB = 105^{\circ}$ *и* $\angle BMC = 120^{\circ}$. *Ако је* $BM = 2$, *одреди* MC.

<u>ПРИМЕР 30:</u> На тениском турниру учествује 2020 тенисера по систему победник иде даље, а поражени испада из даљег такмичења. Колико мечева треба одиграти да би се добио победник овог турнира?

3.10. ЈЕДАН ЗАДАТАК – ВИШЕ РЕШЕЊА

Више познатих математичара наглашава да је боље један задатак решити на више начина него једну исту идеју репродуковати у решавању више задатака. Многи аутори сматрају да је способност деце да задатак реше другачије него што им је показано или сасвим оригинално (што значи да задатак никада нису видели) несумњиви доказ њихове обдарености и креативности. Зато је код презентације решења неког задатка неопходно увек чути и приказати све идеје (поготовз ако су различите) које воде ка решењу. То ће обезбедити не само лепоту решења, већ и мотивацију ученика да задатак покушају да сагледају и из другог, неуобичјеног и неочекиваног угла.

<u>ПРИМЕР 31:</u> На тениском турниру учествује 2020 тенисера по систему победник иде даље, а поражени испада из даљег такмичења. Колико мечева треба одиграти да би се добио победник овог турнира?

<u>ПРИМЕР 32:</u> Нека су a, b, c, x, y, z *позитивни реални бројеви такви да је* $a + x = b + y = c + z = 1$. *Докажи да је* $ay + bz + cx < 1$.

3.11. МАЛЕ МАТЕМАТИЧКЕ СТУДИЈЕ

Рад на неком математичком задатку се не мора завршити његовим решење, тежњом да се задатак реши на више начина или инсистирањем на уопштавању задатка. Добрим вођењем ученик се може упутити и на даљи рад на задатку, разматрању и других ситуација и посматрању нових могућности. Примери који следе су добра илустрација за такве методичке захвате чији резултат су праве мале математичке студије које су почетни проблем решиле, али и разоткриле многе друге појединости о којима при креацији задатка није било ни речи.

<u>ПРИМЕР 33:</u> Колико има правих које дати троугао деле на две фигуре једнаких површина?

<u>ПРИМЕР 34:</u> Да ли се дати квадрат може поделити на 2020 мањих квадрата, који могу, али не морају бити подударни?

3.12. ПРИМЕНА СТЕЧЕНИХ ЗНАЊА И УСВОЈЕНИХ ИДЕЈА

Кроз рад у додатној настави актуелизују се многе интересантне идеје. Неке од њих су директне примене стечених знања и усвојених идеја или комбинације тих знања и идеја. Због тога у раду са обдреним ученицима треба инсистирати на систематичном раду и формирању трајних знања (меморисању важних тврђења, идеја и проблема), јер из такве ризнице искустава је много изгледније очекивати примену, него ако је све то у некој магловитом сећању које се понекад извитопери у импровизацију и примену нејасних идеја и нетачних тврђења.

ПРИМЕР 35. *Нека су a и b мерни бројеви катета и c мерни број катете правоуглог троугла. Ако је n природан број и $n \geq 3$, онда је $a^n + b^n < c^n$. Докажи.*

ПРИМЕР 36. *Дат је четвороугао ABCD чије су странице AB и CD тачкама M и N, односно P и Q подељене на три једнака дела. Доказати да је површина четвороугла MNPQ једнака једној трећини површине четвороугла ABCD.*

ПРИМЕР 37. *Дат је конвексан четвороугао ABCD чија је површина* 50. *Странице AB и CD су деоним тачкама подељене су на пет једнаких, а одговарајуће деоне тачке повезане су дужима, тако да је четвороугао на тај начин подељен на пет трака. Колика је површина средње траке?*

3.13. ДЕКОМПОЗИЦИЈА ПРОБЛЕМА

Декомпозиција проблема је методички захват којим се ученици упућују на потупно растављање датог непознатог задатка на низ већ познатих задатака. Успостављање таквог низа није једноставна, али је логична. Делови низа низу увек потпуно познати, али се у ходу могу решити, јер декомпозиција датог задатка, најчешће подразумева декомпозицију проблема на које је растављен почетни задатак. Ако су припремни задаци од раније познати, онда је декомпозиција једноставнија. Вештина приказивања сложенијих проблема који се декомпонују је у методичком распореду припремних задатака и њихово поступно презентирање је практично кључ сваке декомпозиције.

ПРИМЕР 38. *Из скупа првих 10 природних бројева треба изоставити један број, тако да се преосатали бројеви могу поделити у два дисјунктна подскупа тако да је производ бројева у једном подскупу једнак производу бројева у другом подскупу.*

ПРИМЕР 39. *Конструиши једнакостранични троугао чија је површина једнака збиру површина датог четвороугла и датог петоугла.*

3.14. КАКО ЋУ НАПИСАТИ РЕШЕЊЕ МАТЕМАТИЧКОГ ЗАДАТКА?

Неколико реченица и о начину записивања решења задатака код решавања домаћих, контролних и писмених задатака, исписивању задатака на математичким такмичењима, решавању наградних и конкурсних задатака за „Математички лист“...

Пре исписивања решења на папиру за вежбање треба направити потребне скице решења, неопходне цртеже, план доказивања, односно израчунавања. При том треба водити рачуна:

- да при решавању математичких задатака нико не брани кратка и јасна текстуална објашњења;
- да запис буде исписан читљивим рукописом тако да слова и бројеви буду јасни, недвосмислени и прихватљиве – нормалне величине;
- да цртежи буду јасни и прегледни и нацртани прибором, јер се тако избегава импровизација и лоши закључци због недовољно добро нацртане слике;
- да су новоуведени математички објекти означени и коректно обележени;
- да су мисли изложене у низу једна испод друге (можда због лакшег праћења и нумерисане), а не разбацане лево и десно, горе и доле по целом папиру и да се при том не зна редослед закључивања;
- да је свака изложена чињеница аргументована и да јасно видљиво одакле следи;
- да провериш да ли је добијено решење задатка једино, или можда има и других решења који задовољавају услове задатка;
- да се познате теореме не морају доказивати, али да се на њих треба позивати;
- да се тачно искаже шта јесте, а шта није решење;
- да се јасно означе начини на које је задатак решен (ако је предложено више решења једног задатка).

Ево и неколико примера коректно исписаних решења задатака, при чему је вођено рачуна да буду заступљени и алгебарски и геометријски и логичко комбинаторни проблеми:

ПРИМЕР 40. *Очигледно је:* $2^2 = 4 = 2 + 2$; $3^2 = 9 = 2 + 7$; $4^2 = 16 = 3 + 13$. *Да ли се квадрат сваког природног броја већег од један може приказати као збир два проста броја*?

РЕШЕЊЕ:

(1) Тврђење за које се претпоставља да је тачно назива се хипотеза.

(2) Хипотеза овог задатка је: квадрат сваког природног броја већег од један може приказати као збир два прост броја,

(3) Циљ је да се потврди хипотеза, тј. докаже да она важи за све природне бројеве веће од 1, или да се пронађе бар један природан број за који хипотеза не важи и на тај начин оповргне хипотеза.

(4) За $5^2 = 25 = 2 + 23$, хипотеза важи;

(5) За $6^2 = 36 = 5 + 31$, хипотеза важи;

(6) За $7^2 = 49 = 2 + 47$, хипотеза важи;

(7) За $8^2 = 64 = 3 + 61$, хипотеза важи;

(8) За $9^2 = 81 = 2 + 79$, хипотеза важи;

(9) За $10^2 = 100 = 3 + 97$, хипотеза важи;

(10) За $11^2 = 121 = 2 + 119$, хипотеза не важи, јер је 121 непаран број, па један од сабирака и простих бројева мора бити паран. Дакле, један од сабирака је 2, други је 119, а он није прост, јер је једнак $7 \cdot 17$.

(11) Хипотезу оповргавају и други случајеви. На пример: $17^2 = 289 = 2 + 287$, а 287 није прост, јер је једнак $7 \cdot 41$; $23^2 = 529 = 2 + 519 = 2 + 3 \cdot 173$.

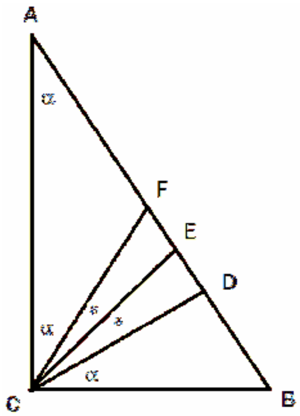
Овакав начин доказивања да неко тврђење не важи у свим ситуацијама се често користи и назива се доказивање контрапримером, јер контрапример оповргава постављену хипотезу (наравно, ако је она погрешна).

<u>ПРИМЕР 41.</u> У правоуглом троуглу ABC (∠ACB је прав) важи BC < CA. Нека су D, E и F тачке на хипотенузи AB тако да је CD висина, CE симетрала правог угла, а CF тежишна дуж. Ако је један од углова ∠BCD, ∠DCE, ∠ECF и ∠FCA два пута већи од неког другог од њих, израчунај углове датог троугла.

РЕШЕЊЕ: Из услова задатка следе следеће претпоставке:

(1) Троугао *ABC* је правоугли.
(2) Прав угао је код темена *C*.
(3) Однос катета је: *BC < CA.*
(4) Тачке *D, E* и *F* припадају хипотенузи.
(5) Дуж *CD* је висина која одговара хипотенузи.
(6) Дуж *CE* је симетрала правог угла.
(7) Дуж *CF* је тежишна дуж.
(8) Један од углова ∠*BCD*, ∠*DCE*, ∠*ECF* и ∠*FCA* два пута већи од неког другог од њих.

На основу датих услова конструише се одговарајућа слика:



(9) Нека је ∠CAB = α.
(10) Како је дуж *CD* хипотенузина висина (што следи из 5) троугао *BCD* је правоугли и ∠*BCD* је такође једнак α.
(11) Како је дуж *CF* хипотенузина тежишна дуж то *AF = BF = CF* (што следи из 7),
(12) троугао *ACF* је једнакокрак и ∠*ACF* је такође једнак α.
(13) Како је *CE* симетрала правог угла (што следи из 6) то је ∠*ACE* = ∠*BCE* = 45^o.

(13) Тада је ∠*ECF* = $45^o - \alpha$ и ∠*ECD* = $45^o - \alpha$.
(14) Нека је ∠*ECF* = $45^o - \alpha$ = ∠*ECD* = δ..
(15) Из услова (8) следе две могућности: $\alpha = 2\delta$ или $\delta = 2\alpha$.
(16) У првом случају је $2\delta + \delta + \delta + 2\delta = 6\delta = 90^o$, па је $\delta = 15^o$ и $\alpha = 30^o$, а углови троугла су тада 30^o, 60^o и 90^o.
(17) У другом случају је $\alpha + 2\alpha + 2\alpha + \alpha = 6\alpha = 90^o$, па је $\alpha = 15^o$ и углови троугла су тада 15^o, 75^o и 90^o.

<u>ПРИМЕР 42.</u> Аца је на табли написао 60 *бројева, не обавезно различитих. Бора је за свака два написана броја израчунао њихов производ. Показало се да међу тим производима има тачно* 600 *негативних бројева. Колико је нула могло бити међу бројевима које је написао Аца?*

РЕШЕЊЕ: Из услова задатка следе следеће претпоставке:

(1) На табли је написано 60 бројева.
(2) Међу њиховим производима је 600 негативних.

Следе закључуци:

(3) Негативни производ се добија само ако је један чинилац позитиван, а други негативан.

(4) Ако је број негативних производа 600, а позитивних чинилаца x, онда је негативних чинилаца $600/x$, а преостало су нуле и при том су и x и $600/x$ природни бројеви.

(5) Како је написано тачно 60 бројева, то је $x < 60$ и $600/x < 60$.

(6) Значи да је $10 < x < 60$, при чему $x + 600/x \leq 60$.

(7) Делиоци броја 600 који испуњавају добијене услове су из скупа $\{15, 20, 24, 25, 30, 40\}$, јер 12 и 50 имају збир 62, па не долазе у обзир.

(8) Дакле позитивних и негативних бројева може бити у паровима (15, 40), (20, 30), (24, 25) (25, 24), (30, 20), (40, 15).

(9) То значи да је 15 + 40 = 55, 20 + 30 = 50 и 24 + 25 = 49 бројева различитих од нуле.

(10) Дакле бројева једнаких нули може бити: 60 – 55 = 5, 60 – 50 = 10 или 60 – 49 = 11.

ПРИМЕР 43: *Докажи да је* $\sqrt{7+\sqrt{7-\sqrt{7}}} > 3$.

ПРИМЕР 44: *Нека су AB и BC две суседне странице правилног деветоугла уписаног у круг чији је центар тачка O. Ако се са M означи средиште странице AB, а са N средиште полупречника OX који не нормалан на BC, докажи да* $\angle OMN = 30^{\circ}$.

*

Ако се примери који су коришћени за илустрацију наведених методичких поступака детаљније анализирају, постаје јасно да сваки непознати математички проблем не садржи поруку којом се методичком идејом долази до решења, да се методичке идеје комбинују и да је неопходно прилично искуство да би се један методички захват применио. Зато ученике треба упутити у те идеје, а ствар њихове креативности је како ће дати проблем решити и записати. Да ли ће при том конструисати погодне примере егзистенције, или примере који доказују да дато тврђење није тачно, или ће проблем решити на више начина, или ће комбинацијом и применом стечених знања и усвојених идеја проблем решити оригинално ... је ствар њихове обдарености и креативности, коју треба да погодном мотивацијом пробудимо, каналишемо и негујемо.

4. НЕКА ДИДАКТИЧКА ПИТАЊА

4.1. НАСТАВНИ ПРОГРАМ

Један од могућих избора наставних садржаја додатне наставе који представља синтезу програма наставе и учења (са могућим проширењима и продубљењима) и програма математичких такмичења је:

Површине (наставни садржаји из 6. разреда)	Површина троугла
	Површина четвороугла
Реални бројеви	Квадрат рационалног броја
	Квадрат рационалног броја
	Квадрат збира и збир квадрата
	Разлика квадрата
	Квадратни корен рационалног броја
	Ирационални бројеви
	Квадратни корен реалног броја

Питагорина теорема	Разни докази Питагорине теореме
	Примена Питагорине теореме на троугао
	Примена Питагорине теореме на четвороугао
	Херонова формула
	Примена Питагорине теореме у конструктивним задацима
Степени	Степени
	Шта је веће?
	Метод последње цифре
Цели алгебарски изрази	Полиноми и операције са њима
	Полиноми – једнакости, једначине и примене
	Полиноми – неједнакости, неједначине и прим.
	Примена полинома на дељивост
	Алгебарски разломци
	Палиндроми
	Пропорционалност
Многоугао	Значајне тачке троугла
	Многоугао
	Правилни многоугао
Круг	Централни и периферијски угао круга
	Неке значајне теореме о троуглу
	Конструктивни задаци
	Тетивни четвороугао
	Тангентни четвороугао
	Обим и површина круга
Диофантове једначине	Решавање ДЈ коришћењем производа
	Решавање ДЈ коришћењем количника
	Решавање ДЈ коришћењем збира
	Решавање ДЈ коришћењем парности
	Решавање ДЈ коишћењем особина дељивости
	Решавање ДЈ коришћењем неједнакости
	Питагорини бројеви
Логичко-комбинаторни проблеми	Комбинаторика
	Дирихлеов принцип
Припрема за математичка такмичења	Припремни задаци за школско такмичење
	Припремни задаци за општинско такмичење
	Припремни задаци за окружно такмичење
	Припремни задаци за државно такмичење

4.2. НАСТАВНИ ПЛАН

Наставни план реализације додатне наставе зависи од координације са планом редовне наставе. Дајемо један од могућих планова, уз напомену да сваки наставник може свој план реализације додатне наставе прилагодити сопственим условима и наставним приликама:

Септембар	1.	Површина троугла
	2.	Површина четвороугла
	3.	Пропорције, проценти и примене
Октобар	4.	Квадрат рационалног броја
	5.	Квадрат збира и збир квадрата
	6.	Разлика квадрата
	7.	Квадратни корен рационалног броја
	8.	Ирационални бројеви
	9.	Квадратни корен реалног броја
	10.	Припремни задаци за школско такмичење

Новембар	11.	Школско такмичење
	12.	Разни докази Питагорине теореме
	13.	Примена Питагорине теореме на троугао
	14.	Примена Питагорине теореме на четвороугао
	15.	Херонова формула
	16.	Примена Питагорине теореме у конструктивним задацима
	17.	Припремни задаци за општинско такмичење
Децембар	18.	Општинско такмичење
	19.	Степени
	20.	Шта је веће?
	21.	Метод последње цифре
	22.	Значајне тачке троугла
	23.	Комбинаторика
	24.	Дирихлеов принцип
Јануар	25.	Многоугао
	26.	Правилни многоугао
Фебруар	27.	Полиноми – операције са полиномима
	28.	Полиноми – једнакости, једначине и примене
	29.	Припремни задаци за окружно такмичење
Март	30.	Окружно такмичење
	31.	Полиноми – неједнакости, неједначине и примене
	32.	Примена полинома на дељивост
	33.	Алгебарски разломци
	34.	Увод у Диофантове једначине
	35.	Припремни задаци за државно такмичење
Април	36.	Државно такмичење
	37.	Решавање Диофантових једначина коришћењем производа
	38.	Централни и периферијски угао круга
	39.	Решавање Диофантових једначина коришћењем количника
	40.	Неке значајне теореме о троуглу
	41.	Решавање Диофантових једначина коришћењем збира
Мај	42.	Конструктивни задаци
	43.	Решавање Диофантових једначина коришћењем парности
	44.	Тетивни четвороугао
	45.	Решавање Диофантових коришћењем особина дељивости
	46.	Тангентни четвороугао
	47.	Решавање Диофантових једначина коришћењем неједнакости
Јун	48.	Обим и површина круга
	49.	Питагорини бројеви

4.3. НЕКЕ ПЕДАГОШКЕ ДИЛЕМЕ

Чини се да је овако амбициозан програм додатне наставе у седмом разреду немогуће реализовати. Ово је тачно, само по условом да се предвиђа 45 часова додатне наставе (+ 4 часа за такмичења) за једну школску годину (што је у просеку један и по час недељно). Међутим, мишљења смо да се индивидуализацијом редовне наставе и вредним самосталним радом ученика може превазићи проблем бројности часова додатне наставе и да се рационалним коришћењем расположивог времена у редовној настави много тога може урадити и ван часова додатног рада. Наводимо и још неке педагошке дилеме карактеристичне за додатну наставу математике:

А) Индивидуализација редовне наставе и домаћих задатака

Редовна настава математике предвиђа преко 70 часова увежбавања наставних садржаја. То је добра прилика да се око половине тих часова индивидуализује у корист задатака напредног нивоа, а друга половина посвети задацима везаним за задатке који значајно проширују и продубљују актуелну наставну материју. Ово од наставника тражи повишену припрему, али је корист од таквог начина рада огромна, јер са 4 - 5 припремљена задатка по једном часу (200 – 300 одабраних задатака на нивоу целе школске године), може постићи велики додатни ефекат. Ако се овоме додају и диференцирани домаћи задаци, по сличном принципу индивидуализације захтева, онда додатни ефекти могу бити и већи.

Б) Самосталан рад ученика

Потребан услов за реализацију претходног облика рада и генерално успешну додатну наставу је озбиљан, вредан и систематичан рад самосталан рад ученика. Обдарени ученици без труда уложеног у рад на додатним садржајима достижу само просечан ниво. Мање талентовани ученици и поред евидентно уложеног рада постижу ограничене домете. Зато они који и желе и могу више морају пуно самостално радити, и то не само на редовним часовима и кроз домаће задатке, већ и кроз мала математичка „истраживања“, рад на тексту, коришћење литературе и интернета ... Уосталом сам термин додатни рад, говори о додатном ангажовању и ученика и наставника.

Мала математичка „истраживања“ су могућност да се ученици приликом решавања задатака баве решавањем задатака на више начина, малим студијама проблема, уопштењима задатака, декомпозицијом проблема, претраживањем по интернету ... Циљ таквог рада је индивидуално напредовање ученика, које ће сигурно имати позитивне трансфере на знања и идеје, па и на успех ученика на такмичењима.

Самосталан рад ученика могућ је и на тексту који је направио сам наставник, тексту који је фотокопиран из Математичког листа или добијен са интернета. На овај начин се ученик оспособљава да самостачно учи, савладава одређене теоријске поставке, примењује научено на дате задатке ...

У наставку овог текста налази се детаљно упутство везано за математичку литературу за додатну нставу математике у седмом разреду. Ученицима треба пренети информације о литератури и сајтовима које могу користити и начину како се користи математичка литература и интернет.

Интернет и његове добробити су такође евидентни, јер омогућују нове изворе информација и поспешују интерактивни рад између ученика и наставника. У том смислу, могућности савремених IT комуникација су практично неограничене, јер ученик и наставник могу путем е-маилова и мобилних телефона размењивати задатке, резултате, упутства, решења, текстове и друге корисне информације које не траже обезбеђивање посебних термина у претрпане колске програме.

В) Мотивација ученика

Време у коме живимо препуно је изваншколских изизазова у сфери коришћења слободног времена. У таквој ситуацији није лако дете од 13 – 14 година усмерити на континуиран, систематичан и скоро свакодневни рад на доградњи својих математичких знања. Позитивну мотивацију ученика ученика видимо у троуглу наставник, родитељ, друштво (школа и шира друштвена заједница). Наставник има могућност да похваљује и награђује (не само оценом), храбри, подстиче ... И прати успоне и кризе и реагује на промене ритма, еуфорију и разочарења.

Г) Улога родитеља

Родитеље најчешће интересује само оцена, односно резултат на такмичењима. И за једно и за друго спремни су да преврну сео свет, небирајући средства. Ситауација се мора преокренути у корист моралне подршке, умерености, неоптерећивања деце нереалним очекивањима. Породица може много тога урадити на плану набавке литературе, награђивања ученика за уложени труд, постигнуто напредовање и евентуалне резултате, јер није све у освојеним наградама на математичким такмичењима.

Д) Мотивација наставника

Наставник је несумњиво најважнији фактор свеукупне наставе, па и додатног рада. Наставник организује индивидуализацију увежбавања и домаћих задатака, обавља допунску наставу, комуницира са учеником и ван официјелних облика (задаци, резултати, упутства, решења, текстови, линкови ...). Наставник је тај који мотивише и усмерава, храбри и не завршава додатну наставу, онда када се за ученике заврши такмичарска активност. За све то наставник мора бити системски награђен (разни облици друштвених признања и награда), али и материјално стимулисан. Ми, како је то већ поменуто, ту стимулацију видимо у посебном финансирању ИОП-а 3 (на основу постигнутих резултата на такмичењима и конкурсима), али и на стварању школских, општинских ... фондова из којих ће се једнако награђивати и ученици и наставници.

Ђ) Улога шире друштвене заједнице

Друштво математичара Србије у својим активностима награђује ученике и наставнике (књиге, дипломе, медаље, мајице ...) за успехе у решавању задатака из „Математичког листа“ и за резултате постигнуте на такмичењима. Последњих неколико година награде за најбоље ученике и наставнике су и у бесплатним учешћима у нашим летњим школама. Министарство и донатори обезбеђују средства за припреме и учешће наших екипа на мешународним такмичењима. Није много, али није ни мало. Може и више, али се у систем награђивања ученика и наставника морају значајније укључити школе, локална самоуправа и привредни субјекти. Спремности за то има, остаје само да се нађу прави људи и прави путеви да се то и реализује.

4.4. ЛИТЕРАТУРА ЗА ДОДАТНУ НАСТАВУ

Период седмог разреда представља оно време у математичком образовању ученика у коме се са нижег нивоа математичке строгости, прелази на нешто виши (зашто не и највиши) ниво закључивања, доказивања, образлагања идеја и решавања проблема. То је период у коме ученик поред уџбеника и збирке задатака за редовну наставу, нешто интензивије него раније користи и друге изворе информација, а пре свега допунску литературу и интернет. То је и период у коме има смисла да формира и сопствену математичку библиотеку коју ће сврсисходно користити у циљу додатног, самосталног проширивања и продубљивања својих математичких видика.

Аутори овог предавања ученицима и наставницима искрено препоручују неке наслове као додатну литературу која је доступна у нашем математичком окружењу:

- „Математика 7* - Приручник за додатну наставу математике у 7. разреду основне школе“ је најновије издање Друштва математичара Србије. Књига садржи 44 наставне теме, 211 решених примера и тачно 1000 задатака за младе математичаре (са резултатима или упутствима или комплетним решењима) и погодна је за континуирани додатни рад ученика од септембра до јуна.
- Збирка задатака „1100 задатака с математичких такмичења у Србији“ која садржи задатке са свих нивоа такмичења ученика осовних школа (од школских такмичења до балканских математичких олимпијада) у последњих десет година. Ова серија излази од 1995. године и поред последњег издања које обухвата период 2009 – 2018., добро би било обрадити и период 1995. – 2008. Издавач ових занимљивих и корисних књига је Друштво математичара Србије.
- Друштво математичара Србије у својој познатој едицији „Материјали за младе математичаре“, поред претходно препоручене свеске 54, има и збирке: „Припремни задаци за математичка такмичења ученика 7. и 8. разреда (свеска 36 – аутори Љубомир Вуковић, Драган Ђорић и Павле Младеновић) и „Математика Х = 1236“ (свеска 57 - аутор Војислав Андрић). У згодне материјале

спадају и две књиге задатака са такми-чења „Кенгур без граница“ које је такође издало ДМС (приређивачи: Марија Станић и Драган Стевановић)..

- У књижарама Завода за уџбенике се још увек може наћи и „Збирка задатататака из математике за оне који желе и могу више“ за 7. разред чији наслов довољно говори о њеној намени и кругу читалаца. Добро би било проучити и књиге истог наслова за 5. и 6. разред. Аутори ових књига су Вера Јоцковић, Владимир Мићић, Ђорђе Дугошија и Војислав Андрић.
- Енциклопедију разноврсних задатака од којих су многи погодни за додатни рад у 7. разреду представља „Математископ 3“ – збирка задатака чији је издавач истоимена издавачка кућа из Београда. Аутор ове књиге је Владимир Стојановић, који је написао и друге вредне књиге за обдарене ученике (између осталих и збирку задатака која садржи преко хиљаду задатака са иностраних математичких такмичења основаца).
- Богату ризницу литературе за ученике 7. разреда садрже и „Архимедесови материјали за младе математичаре“ који кроз многобројне свеске обрашују разне теме. За ученике 7. разреда чини се да су најупотребљивије: „Пар – непар“ (аутори Богољуб Маринковић и Драгана Стошић Миљковић), Дирихлеов принцип, Питагорини бројеви ...
- Врло употребљиве и корисне су и „Кругове“ књиге „Неједнакости за ученике основних школа“ (аутор Иванка Томић) и „Диофантове једначине“ (аутор Војислав Андрић)
- У списку литературе коришћене у припреми овог предавања дате су и друге вредне књиге које се могу користити у употпуњавању знања ученика 7. разреда.

Математичка библиотека ученика треба да садржи и књиге које су коришћене у претходним разредима али и електронске књиге и линкове којих на интернету има све више[6]:

- http://diofant.org/internet%20biblioteka.htm је електронска адреса велике математичке библиотеке – правог интернет богатства, које садржи систематизоване библиотеке са капиталним књигама за све (ученике, наставнике, љубитеље математике ...) који желе да квалитетно уче математику.
- http://kvant.mccme.ru. је електронска адреса часописа „Квант“ који од 1970. године излази у Русији и који садржи низ тема и проблема за младе математичаре и велике могућности претраживања (по бројевима, ауторима, темама ...)
- http://www.problems.ru је база са преко 15.000 задатака (са решењима) из свих области елементарне математике. База је диференцирана по разредима (од 5 до 11) и нивоима (од 1 до 10) и веома је згодна за самосталан рад ученика, јер се кретањем по одређеним нивоима може поступно напредовати.

4.5. МАТЕМАТИЧКИ ЛИСТ ЗА УЧЕНИКЕ ОСНОВНИХ ШКОЛА

Математички лист за ученике основних школа излази од 1966. године. У неким годинама је излазио шест, а у неким годинама, као и у последње време, пет пута годишње. У току је LIV година излажења.

Математички лист је часопис који је намењен свим ученицима основних школа од трећег до осмог разреда и садржи задатке за увежбавање и проверу знања ученика (на три нивоа), али и по неколико примера контролних вежби и писмених задатака за сваки разред. Осим тога у листу се објављују занимљиви чланци и конкурсни задаци везани за поједине математичке и информатичке теме. Значајан део Математичког листа посвећен је задацима са разних математичких такмичења и

[6] Овде се наводе само три линка, па се корисницима приручника препорчује да своју електронску математичку библиотеку стално допуњују

математичких квизова, али и одбраним, конкурсним и наградним задацима за обдарене ученике. Занимљиво је да наградни задатак садржи и насловна страна листа, а постоје и задаци за родитеље и шаховски задаци.

Овај часопис је за обдарене ученике важан, не само због великог броја занимљивих и нестандардних задатака, већ и због могућности да се решења тих задатака шаљу редакцији (редовном поштом или мејлом), прегледају и награђују. Посебност ових задатака је и да се најкраћа, најелегантнија, најоригиналнија решења објављују у Математичком листу и да њихово решавање и презентирање представља најбољи начин да се учени-ци увежбају у коректном записивању решења.

Појединачни бројеви Математичког листа (а има их преко 300, од првог па на даље) су скенирани и преко сајта Друштва математичара Србије (https://dms.rs/matematicki-list) су доступни свим заинтересованим љубитељима математике. Тих три стотине часописа су невиђено благо, које делимичним или систематичним проучавањем може постати сазнајна својина младих математичара. Математички лист је, такође, део распо-ложивог математичког материјала који циљно није много коришћен у конципирању овог Приручника. Зато аутор Приручника наставницима, а нарочито младим љубитељима математке, искрено препоручује Математички лист за читање, уживање, решавање проблема, континуирану сарадњу и улазак у велики и дивни свет математичких тајни.

5. ЛИТЕРАТУРА [7]

[1.] Војислав Андрић: Математика X = 1236,
Друштво математичара Србије, Београд 2019.

[2.] Војислав Андрић: Диофантове једначине,
„Круг“, Београд, 2006.

[3.] Љубомир Вуковић, Драган Ђорић, Павле Младеновић:
Припремни задаци за за математичка такмичења за ученике 7. и 8. разреда, Друштво математичара Србије, 2006.

[4.] Група аутора: 1100 задатака са математичких такмичења,
Друштво математичара Србије, Београд 2018.

[5.] „Квант“ – Часопис за младе математичаре и физичаре (на руском језику), Руска академија наука, Москва, (1970. – 2019.)

[6.] Богољуб Маринковић, Драгана Стошић – Миљковић: Пар – непар,
„Архимедес“, Београд, 2013.

[7.] Владимир Мићић, Вера Јоцковић, Ђорђе Дугошија, Војислав Андрић
Збирка задатака из математике за 7. разред за оне који могу и желе више, Завод за уџбенике Београд, 2009.

[8.] Математички лист за ученике основниш школа,
Друштво математичара Србије, Београд, 1966. – 2019.

[9.] Ђура Пауниħ: Правилни Полигони
Друштво математичара Србије, Београд 2006.

[10.] Војислав Петровић: Тетивни и тангентни четвороуглови,
Друштво математичара Србије, Београд 2005.

[11.] Ђерђ Поја: Како ћу решити математички задатак
„Школска књига“, Загреб, 1966.

[7] Класификација извршена према азбучном редоследу презимена аутора

[12.] Ђерђ Поја: Математичко откриће
„Хрватско математичко друштво“, Загреб, 2003.

[13.] В. В. Прасолов: Задачи по планиметриии
„Наука“, Москва, 1986.

[14.] И. Х. Сивашински: Неравенства в задачах,
„Наука“, Москва, 1967.

[15.] Марија Станић: „Кенгур без граница“ (2007. – 2017.),
Друштво математичара Србије, Београд, 2017.

[16.] Драган Стевановић, Ђорђе Стевановић: „Кенгур без граница“
(1998. – 2017.), Друштво математичара Србије, Београд, 2018.

[17.] Владимир Стојановић: Математископ 3
„Математископ“, Београд, 2000.

[18.] Владимир Стојановић: Математика - Иностранa такмичења основаца,
„Математископ“, Београд, 2010.

[19.] Иванка Томић: Неједнакости за ученике основних школа,
„Круг“, Београд, 1999.

[20.] Никола Чепинац: Геометрија за 7. разред основне школе,
Завод за уџбенике, Београд, 1960.

[21.] Judita Cofman: What to Solve?
„Clarendon press“, Oxford, 1990.

[22.] И. Ф. Шаригин, Р. К. Годин: Сборник задач по геометрии,
„Астрель“, Москва, 2001.

6. „ДОМАЋИ ЗАДАТАК“

1. Збир цифара природног броја n је 2019. Може ли збир цифара броја $n + 1$ бити: а) 2020; б) 2019; в) 4; г) 1138?

2. Постоји ли Питагорин троугао чији је обим: а) квадрат неког природног броја; б) куб неког природног броја?

3. Дат је скуп природних бројева $A = \{1, 2, 3 ... 9, 10\}$. Из скупа A изостављен тачно један број и на тај начин добијен скуп B. Може ли се скуп B поделити на два дисјунктна подскупа B_1 и B_2 тако да је производ бројева у једном и другом скупу једнак?

4. Број 676 је и палиндром и потпун квадрат. Да ли у скупу природних бројева има коначно или бесконачно много бројева који су и палиндроми и потпуни квадрати?

5. Да ли је могуће да збир неколико реалних бројева буде 100, а да збир њихових квадрата буде мањи од 1?

6. Постоје ли природни бројеви m и n такви да су бројеви $m^2 + n$ и $n^2 + m$ потпуни квадрати природних бројева?

7. Постоје ли 11 узастопних природних бројеви таквих да је збир квадрата првих шест бројева једнак збиру квадрата других пет бројева?

8. Збир цифара четвороцифреног броја m, је двоцифрен број n. Може ли збир цифара природног броја n бити 7?

9. Постоје ли различити природни бројеви *a, b,* и *c* такви да је вредност израза $\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right)$ такође природан број?

10. Постоји ли квадрат природног броја чији декадни запис *xxxx ... xxxx* садржи *n* једнаких цифара, при чему је $n \geq 2$.

11. Да ли је број палиндрома који су потпуни квадрати коначан или бесконачан?

12. Постоји ли природан број *n* такав да је и $\sqrt{n\sqrt{n\sqrt{n}}}$ природан број?

13. Постоје ли природни бројеви *x, y* и *z*, такви да је $x^2 + y^3 = z^4$?

14. Постоје ли природни бројеви *x, y* и *z*, такви да је $5^x + 5^y = z^2$?

15. Познато је да је $5^3 - 5^2 = 10^2$. Да ли једначина $5^x - 5^y = z^2$ има коначно или бесконачно решења?

16. Постоје ли природни бројеви *x* и *y*, такви да је $x! + y! = 2019201920192019$?

17. Постоји ли троугао чије су све странице веће од 100, а површина троугла мања од 1?

18. Четвороугао *ABCD* није квадрат. Може ли четвороугао *ABCD* бити и тангентни и тетивни?

19. Постоји ли конвексни *n*-тоугао ($n > 5$) чији су унутрашњи углови 70°, 75°, 80° и 85°?

20. Постоји ли троугао у коме је једна висина једнака збиру друге две висине?

21. Постоји ли троугао чије су тежишне дужи 9, 12 и 15?

22. Колико има правих који дати троугао ABC деле на две фигуре једнаких површина?

23. Колико има правих који дати паралелограм деле на две фигуре чије се површине односе као 3 : 5?

24. Постоји ли природан броја *n*, такав да је троугао чије странице имају дужину $n - 1$, n и $n + 1$, тупоугли?

25. Постоји ли троугао у коме су пречник кружнице уписане у троугао *ABC* $2r$ и дужине страница *a, b* и *c* троугла су четири узастопна природна броја?

26. Многоугао има 361 страницу. Могу ли сви његови унутрашњи углови имати цео број степени?

27. Може ли се у поља квадрата 3 x 3 распоредити 9 различитих природних бројева тако да је производ бројева у свакој врсти, колони и дијагонали једнак?

28. Из скупа природних бројева $M = \{1, 2, \ldots, n-1, 2n\}$, изабрано је $n + 1$ бројева. Да ли се може направити избор бројева, тако да међу изабраним бројевима не постоје два од којих је један дељив другим?

29. Може ли се дати квадрат поделити на 2020 мањих квадрата?

30. Путници Жарко, Лека, Тика и Раша треба да се превезу са једне на другу страну реке чамцем који може да превезе само две особе. Жарко реку превесла за 1 минут, Лека за 2 минута, Тика за 5 минута, а Раша за 10 минута. Могу ли се сви превести са једне на другу обалу реке за 17 минута, ако кад год су два путника у чамцу увек весла спорији путник ?

31. Да ли је могуће на шаховској табли распоредити 32 скакача тако да се они међусобно не нападају?