ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

АКРЕДИТОВАНИ СЕМИНАР:

345

ДРЖАВНИ СЕМИНАР О НАСТАВИ
МАТЕМАТИКЕ И РАЧУНАРСТВА
ДРУШТВА МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Компетенција: К1
Приоритети: 3

ТЕМА 11

ФОРМИРАЊЕ И СТРУКТУРИСАЊЕ БРОЈЕВНИХ СИСТЕМА

Реализатори теме:

др МИЛОСАВ МАРЈАНОВИЋ
др ЗОРАН КАДЕЛБУРГ

БЕОГРАД
08. – 09. 02. 2020.

ФОРМИРАЊЕ И СТРУКТУРИСАЊЕ БРОЈЕВНИХ СИСТЕМА

др Милосав М. Марјановић, др Зоран Каделбург

1. Увод

Прелиставајући *Еуклидове Елементе* видимо да су бројеви тема која је далеко најзаступљенија. Од 13 књига овог класичног дела: 5, 7, 8, 9, 10. и 12. готово су у потпуности посвећене бројевима као теми. (Видети, нпр, Euclid's Elements of Geometry, Edited and provided with a modern English translation by Richard Fitzpatrick). У *Елементима* су (позитивни) реални бројеви конципирани као класе еквиваленције размера истородних магнитуда A и B: $A : B \sim C : D$, кад је испуњен услов

$$(\forall m)(\forall n)\; mA > \; (=, <)\; nB \text{ ако и само ако је } mC > \; (=, <)\; nD.$$

Користећи савремени језик математике, можемо рећи да се претпоставља егзистенција скупа $\mathbb{N}_0$ природних бројева и његово дејство на скуп M магнитуда.

Задивљује логичка прецизност *Елемената* коју није имала математика у оквиру других великих класичних цивилизација, али је сама дефиниција броја, а поготову извођење операција на магнитудама, а не на самим бројевима, чинило ову теорију сложеном што је такође спутавало њен даљи развој све до доба Ренесансе.

Декартов (René Descartes, 1596–1650) модел бројевне (полу)праве, где су магнитуде представљене интервалима а њихове дужине релативно јединична дуж као реални бројеви и где се операције множења и дељења изводе као конструкције четврте пропорционале, био је велики корак у поједностављењу Еудоксове теорије. Значајан подстицај овом поједностављењу била је Виетова (Francois Viéte, 1540–1601) словна алгебра (*logistica speciosa*) па се каже да где је Виет стао Декарт је наставио. Напоменимо да је Виетова алгебра још увек реторичка док је код Декарта скоро у потпуности формирана као савремена симболичка алгебра.

Ово поједностављено схватање реалних бројева постепено је улазило и у школске програме па се у савременој школи обрађују системи природних бројева, позитивних рационалних бројева (разломци), затим рационалних и реалних бројева. Та је обрада врло непотпуна и врло неуједначена од земље до земље. Сви ми, старији мање, млађи више, можемо се сећати наших дана проведених у основној школи и учења природних бројева у току прва четири разреда. Постоје велике разлике како су ти садржаји обрађивани у различитим периодима, па сад скицирајмо шта се постиже вежбама у којима су аритметички садржаји уплетени у свакодневне ситуације.

Аритметика се ослања на феноменологију коју чине колекције објеката које опажамо у простору око нас. У дидактици математике за те објекте кажемо да су *скупови на опажајном нивоу.* Почетна тема аритметике је *бројање* које чини *правилно рецитовање назива бројева* (до 10) и *пребројавање* скупова чији је број објеката највише 10. Тако се формира почетни *блок бројева до* 10, у оквиру кога се осмишљавају *операције сабирања и одузимања.* Ово осмишљавање врши се путем примера али да кажемо шта је битно у тим примерима користићемо језик теорије скупова. Наиме, казаћемо да *адитивну схему* чини пар дисјунктних скупова и да је прати *задатак сабирања* кад се зна број елемената ових скупова а тражи се број елемената њихове уније. Ту исту схему прати *задатак одузимања* кад се зна број елемената уније и једног од тих скупова а тражи се број елемената другог од њих.

Ово значење операција је перманентно па и збирови $10 + 1$, $10 + 2$, ... , $10 + 10$ имају наведени смисао. Обележавајући их краће са 11, 12, ... , 20 (и наводећи називе ових бројева) формира се *блок бројева до* 20. Главни дидактички задатак у овом блоку је формирање *таблице сабирања*.

Збир $20 + 10$ означавамо краће са 30 и овај број читамо *тридесет*, збир $30 + 10$ означавамо са 40 и читамо *четрдесет*, ... , збир $90 + 10$ пишемо краће 100 и читамо *сто*. Ове бројеве називамо *десетице прве стотине*. Збирове десетица и једноцифрених бројева, нпр, $20+7$, $40+2$, $70+8$, ... , пишемо краће 27, 42, 78, ... и читамо *двадесет седам*, *четрдесет два*, *седамдесет осам*, ... па тако поред десетица осмишљавамо и остале бројеве из *блока бројева до* 100.

Први главни дидактички задатак у оквиру овог блока је осмишљавање операција *множења* и *дељења*. Па, да бисмо издвојили битно у низу примера намењених осмишљавању ових операција опет ћемо користити језик теорије скупова и казаћемо да *мултипликативну схему* чини колекција од l дисјунктних скупова исте бројности m. Кад су дати бројеви l и m а тражи се број n елемената уније ових скупова, тада тај број означавамо са $l \cdot m$ и тада кажемо да ову схему прати *задатак множења*. Кад су уз ову схему дати n и l а тражи се m, кажемо да је то *задатак дељења* који називамо *партиција* (*расподела*), а кад су дати n и m а тражи се l, кажемо да је то *задатак дељења* који се назива *квотиција* (*количовање*).

Други главни дидактички задатак у овом блоку је формирање *таблице множења* и *таблице дељења са остатком*: бројева до 19 са 2, до 29 са 3, ... , до 89 са 9. Ове таблице такође улазе у трајни усмени фонд.

Узимајући производе $2 \cdot 100$, $3 \cdot 100$, ... , $9 \cdot 100$, $10 \cdot 100$ и казујући да се краће пишу као 200, 300, ... , 900, 1000 и како се читају, уводимо *стотине прве хиљаде*. Збирови ових стотина и највише двоцифрених бројева, нпр, $300 + 25$, $500 + 94$, $700 + 3$, ... кажемо да се краће пишу као 325,, 594, 703, ... и кажемо како се читају и тако формирамо *блок бројева до* 1000. Слично радимо даље са производима $2 \cdot 1000$, $3 \cdot 1000$, ... , $10 \cdot 1000$ итд, ширећи тако још даље блокове бројева. Овим путем сваки природни број добија јединствени *цифарски запис*, а ови записи служе да се преко њих искажу алгоритми извођења аритметичких операција. Све у свему, природни бројеви су фундамент целокупне математике и без обзира на елементарност начина обраде који је прилагођен деци раног школског узраста, ове садржаје не смемо нипошто потценити.

Постоје математичари звани Натуралисти (међу њима су били велики класични математичар Поенкаре (Henri Poincaré, 1854–1912) и немачки математичар Кронекер (Leopold Kronecker, 1821–1891) и други) који су сматрали да су природни бројеви директни продукт човековог ума. Кронекер каже „Бог је створио природне бројеве, све друго је дело човека“. С друге стране постоје математичари, звани Формалисти, који узимају природне бројеве као конструкције које се проводе на логичкој основи. То је, на пример, случај кад излагање природних бројева почиње ab ovo – Пеановим аксиомама (Giusepe Peano, 1858–1939).

Ми смо овде усмерени на издвајање својстава бројевних система која, кад су изражена алгебарски, преносе се из једног система у његово проширење. Овај пренос сагледавамо као случај који обухвата *Пикоков принцип перманенције* (George Peacock, 1791–1858) кад се односи на оквир једног бројевног система и његовог проширења.

2. Систем природних бројева с нулом

Наш циљ у овом предавању је приказ оперативних својстава (тј. својстава операција и релације поретка) бројевних система. То је тема коју су ови аутори третирали у својим радовима:

[1] Milosav M. Marjanović, Zoran Kadelburg, *Structuring Systems of Natural, Positive Rational and Rational Numbers*, The Teaching of Mathematics, 2019, Vol. XXII, 1, pp. 1–16.

[2] ___________, *Number Systems Characterized by Their Operative Properties*, The Teaching of Mathematics, 2019, Vol. XXII, 2, pp. 52–57.

[3] Milosav M. Marjanović, *Generalized Associative and Commutative Laws*, The Teaching of Mathematics, 2019, Vol. XXII, 2, pp. 71–76.

Први и најважнији корак у овом нашем истраживању био је издвајање основних оперативних својстава система $\mathbb{N}_0$ природних бројева с нулом, а која су исписана у следећој листи:

(i) $(\forall k)(\forall l)\, k+l=l+k$

(ii) $(\forall k)(\forall l)(\forall m)\,(k+l)+m=k+(l+m)$

(iii) $(\exists 0)(\forall k)\, k+0=k$

(iv) $(\forall k)(\forall l)\, kl=lk$

(v) $(\forall k)(\forall l)(\forall m)\,(kl)m=k(lm)$

(vi) $(\exists 1)(0<1 \text{ и } (\forall k)\, k\cdot 1=k)$

(vii) $(\forall k)(\forall l)(\forall m)\, k(l+m)=kl+km$

(viii) $(\forall k)(\forall l)\,(k<l \iff (\exists m>0)\, k+m=l)$

(ix) $(\forall k)(\forall l)\,(k<l \text{ или } k=l \text{ или } l<k)$

(x) $(\forall k)(\forall l)(\forall m)$
$(k<l \iff k+m<l+m)$

(xi) $(\forall k)(\forall l)(\forall m>0)$
$(k<l \iff km<lm)$

Листа 1

Примећује се да смо ми ову листу формирали редукујући својства која изражавају аксиоме уређеног поља. Па, ако систем природних бројева са 0 гледамо као структуру $(\mathbb{N}_0,+,\cdot,<)$, где је $\mathbb{N}_0$ скуп природних бројева, „+“ и „·“ операције сабирања и множења, а „<“ релација поретка, биће сва својства са *Листе 1* задовољена.

Уопштавајући, нека уређену четворку $(S,+,\cdot,<)$ чине непразни скуп S, бинарне операције „+“ и „·“ и релација поретка „<“ (где не пишемо индекс S да их разликујемо од операција и релације у скупу $\mathbb{N}_0$) и нека задовољавају својства наведена на *Листи 1*, тада такву структуру зваћемо *уређено полупоље.* Као примере уређеног полупоља можемо навести систем природих бројва са 0, целих бројева, позитивних рационалних бројева са 0, рационалних и реалних бројева, а доказаћемо да важи следеће тврђење.

Теорема 1. *Систем природних бројева са 0 је најмање уређено полупоље*, тј. свако уређено полупоље садржи копију изоморфну полупољу природних бројева са 0.

Доказ. Заиста, нека је $(S,+,\cdot,<)$ произвољно уређено полупоље. Дефинишимо индуктивно низ N^* у S, узимајући $a_0=0_S$, $a_1=1_S$ и, претпостављајући да је a_n дефинисан, нека је $a_{n+1}=a_n+1_S$. Докажимо да је $a_{n+m}=a_n+a_m$. Ова релација је тачна кад је $m=1$; претпоставимо да је и релација $a_{n+(m-1)}=a_n+a_{m-1}$ тачна (ово је индукцијска претпоставка). Тада је

$$a_{n+m}=a_{n+(m-1)+1}=a_n+a_{m-1}+1_S=a_n+a_m,$$

а што је требало доказати.

Докажимо такође да је $a_{n\cdot m} = a_n \cdot a_m$. За $m = 1$ имамо $a_{n\cdot 1} = a_n = a_n \cdot 1_S = a_n \cdot a_1$. Претпоставимо $a_{n\cdot(m-1)} = a_n \cdot a_{m-1}$. Имамо

$$a_{n\cdot m} = a_{n(m-1)+n} = a_{n(m-1)} + a_n = a_n \cdot a_{m-1} + a_n \cdot 1_S = a_n(a_{m-1} + 1_S) = a_n \cdot a_m.$$

Доказали смо да је ова једнакост тачна за свако m.

Како је, за свако n, низ N^* растући, то $n < m$ повлачи $a_n < a_m$ па је пресликавање $n \mapsto a_n$ једнозначно. Дакле, N^* је изоморфна копија система $\mathbb{N}_0$. ■

3. Конструкција даљих бројевних система

У овом делу предавања бавимо се проширењем система природних бројева с нулом, најпре до система ненегативних рационалних бројева (у којем су неограничено изводљиве операције множења и дељења (осим дељења нулом)), а затим до система свих рационалних бројева (у којем су изводљиве све четири основне рачунске операције (осим дељења нулом)).

Као што је познато, могућ је и другачији приступ – да се најпре уведе систем целих бројева (у којем су изводљиве операције сабирања и одузимања), па да се затим тај систем прошири до система свих рационалних бројева. Ми ћемо ићи првим поменутим путем, јер он одговара историјском редоследу, а користи се и у нашим програмима (разломци се уче у петом, а негативни бројеви у шестом разреду основне школе).

3.1. Систем ненегативних рационалних бројева

Полазимо, дакле, од система $(\mathbb{N}_0, +, \cdot, <)$ природних бројева с нулом и његових својстава датих у *Листи 1.* Најпре уводимо два додатна знака, ‘‘$-$’’ и ‘‘$:$’’, која дефинишу „делимичне“ операције на скупу $\mathbb{N}_0$, на следећи начин:

(1) Ако је $k + l = m$, тада се l назива *разликом* бројева m и k, што се означава са $l = m - k$;

(2) Ако је $kl = m$ и $k \neq 0$, тада се l назива *количником* бројева m и k, што се означава са $l = m : k$.

Изводи се низ својстава овако уведених операција; овде наводимо следећа:

(3) а) $(k + l) - l = k$, $(k - l) + l = k$; б) $(k \cdot l) : l = k$, $(k : l) \cdot l = k$.

(4) а) $k = l \iff k + m = l + m$. б) *Ако $m \neq 0$, онда* $k = l \iff k \cdot m = l \cdot m$.

(5) $k(l - m) = kl - km$.

(6) *Адитивни и мултипликативни неутрални елементи су једнозначно одређени.*

(7) $k \cdot 0 = 0$. (8) $k : l < (=, >)\ m : n$ *ако и само ако* $kn < (=, >)\ lm$.

(9) $k(l : m) = (kl) : m$. (10) $(k : l) : m = k : (lm)$.

(11) $k : (l : m) = (km) : l$. (12) $(k : l) : (m : n) = (kn) : (lm)$.

(13) *За свако* $m > 0$, $k : l = (mk) : (ml)$. (14) $(k : l) \cdot (m : n) = (km) : (ln)$.

(15) $(m \pm n) : k = m : k \pm n : k$. (16) $(k : l) \pm (m : n) = (kn \pm lm) : (ln)$.

(17) $k - l < (=, >) m - n \iff k + n < (=, >) l + m$. (18) $(k - l) - m = k - (l + m)$.

(19) $(k + l) - m = k + (l - m)$. (20) $k - (l - m) = (k + m) - l$.

(21) $(k-l)+m=(k+m)-l$. (22) $(k-l)+(m-n)=(k+m)-(l+n)$.
(23) $(k-l)-(m-n)=(k+n)-(l+m)$. (24) $(k-l)(m-n)=(km+ln)-(kn+lm)$.

Илустрације ради, докажимо својства (6), (7), (12), (15) и (17), а за све друге овде изостављене доказе видети наше напред наведене чланке.

(6) Ако би 0_1 и 0_2 била два адитивна неутрална елемента, имали бисмо да је $0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2$. Доказ у мултипликативном случају је сличан.

(7) $k+(k\cdot 0) \overset{\text{(vi)}}{=} (k\cdot 1)+(k\cdot 0) \overset{\text{(vii)}}{=} k(1+0) \overset{\text{(iii)}}{=} k\cdot 1 \overset{\text{(vi)}}{=} k$, па на основу (6) следи $k\cdot 0=0$.

(12) $(k:l):(m:n) \overset{(10)}{=} k:(l(m:n)) \overset{(9)}{=} k:((lm):n) \overset{(11)}{=} (kn):(lm)$.

(15) Нека је $(m+n):k=x$; тада је $m+n=kx$. Означимо још $m:k=y$, $n:k=z$; тада је $m+n=ky+kz=k(y+z)$, и како је $kx=k(y+z)$, добијамо на основу (4) (због $k\neq 0$) да је $x=y+z$. Доказ у случају знака минус је сличан.

(17) Означимо $k-l=x$, $m-n=y$; тада је $k=l+x$, $m=n+y$, $k+n=(l+x)+n=(l+n)+x$, $l+m=l+(n+y)=(l+n)+y$. Сада важи $x=y \overset{(3)}{\iff} (l+n)+x=(l+n)+y \iff k+n=l+m$.

Слично, $x<y \overset{\text{(x)}}{\iff} (l+n)+x<(l+n)+y \iff k+n<l+m$.

Наведена својства, између осталог, сугеришу увођење следеће релације у скуп односа природних бројева:

$$(k:l)\sim(m:n) \iff kn=lm \qquad (l,n>0).$$

Лако се показује да је ово једна релација еквиваленције.

Дефиниција 1. *Скуп ненегативних рационалних бројева* $\mathbb{Q}_+$ је скуп класа претходно уведене релације еквиваленције. Краткоће ради, елементе тог скупа означаваћемо, на пример, као $k:l$ (уместо $[k:l]$).

Инспирисани претходним својствима (15), (14) и (8), операције сабирања и множења, као и релацију поретка у скупу $\mathbb{Q}_+$ уводимо помоћу:

$$(k:l)+(m:n)=(kn+lm):(ln),$$
$$(k:l)\cdot(m:n)=(km):(ln),$$
$$k:l<m:n \quad \text{ако је} \quad kn<lm.$$

Доказује се коректност ових дефиниција, тј. да оне не зависе од изабраних представника класа еквиваленције. На пример, у случају сабирања, претпоставимо да је $k:l=k':l'$ и $m:n=m':n'$, тј. $kl'=k'l$ и $mn'=m'n$. Тада је

$$(kn+lm)l'n'=(kl')nn'+(mn')ll'=(k'l)nn'+(m'n)ll'=(k'n'+l'm')ln,$$

и зато $(kn+lm):(ln)$ и $(k'n'+l'm'):(l'n')$ припадају истој класи еквиваленције.

Разлика и количник два елемента из $\mathbb{Q}_+$ се дефинишу слично као у $\mathbb{N}_0$. Притом важи

$$(k:l)-(m:n)=(kn-lm):(ln) \quad \text{и} \quad (k:l):(m:n)=(kn):(lm),\ \ m>0.$$

Структура $(\mathbb{N}_0,+,\cdot,<)$ се природно утапа у нову структуру $(Q_+,+,\cdot,<)$ идентификујући природан број k с односом $k:1$, при чему се лако проверава да ово утапање чува операције и релацију поретка.

Ако је $k : l$, $l > 0$ позитиван рационалан број, види се да важи $(k : l) \cdot (l : k) = (kl) : (lk) = 1 : 1$. На тај начин, сваки позитиван елемент из Q_+ има *мултипликативни инверз*, за који се проверава да не зависи од избора представника класе. Користићемо ознаку $(k : l)^{-1}$ за мултипликативни инверз $l : k$ елемента $k : l$.

Користећи сада слова $q, r, s, t, \ldots$ за означавање елемената скупа $\mathbb{Q}_+$, наводимо листу својстава операција и релације поретка у систему $(Q_+, +, \cdot, <)$

(i) $(\forall q)(\forall r)\, q + r = r + q$

(ii) $(\forall q)(\forall r)(\forall s)\, (q + r) + s = q + (r + s)$

(iii) $(\exists 0)(\forall q)\, q + 0 = q$

(iv) $(\forall q)(\forall r)\, qr = rq$

(v) $(\forall q)(\forall r)(\forall s)\, (qr)s = q(rs)$

(vi) $(\exists 1)(0 < 1 \ i \ (\forall q)\, q \cdot 1 = q)$

(vii) $(\forall q \neq 0)(\exists r)\, qr = 1$

(viii) $(\forall q)(\forall r)(\forall s)\, q(r + s) = qr + qs$

(ix) $(\forall q)(\forall r)\, (q < r \iff (\exists s > 0)\, q + s = r)$

(x) $(\forall q)(\forall r)\, (q < r \ или \ q = r \ или \ r < q)$

(xi) $(\forall q)(\forall r)(\forall s)$
$(q < r \iff q + s < r + s)$

(xii) $(\forall q)(\forall r)(\forall s > 0)$
$(q < r \iff qs < rs)$

Листа 2

Илустрације ради, наводимо доказе неких својстава из *Листе 2*.

(ii) Нека је $q = k : l$, $r = m : n$ и $s = i : j$. Тада важи:

$$(q + r) + s = ((kn + lm) : (ln)) + (i : j) = ((knj + lmj) + lni) : (lnj),$$
$$q + (r + s) = (k : l) + ((mj + ni) : (nj)) = (knj + (lmj + lni)) : (lnj),$$

одакле следи тражена једнакост.

(vii) За $q \neq 0$, $qq^{-1} = 1$ следи на основу дефиниције мултипликативног инверза q^{-1}.

(viii) Нека је $q = k : l$, $r = m : n$ и $s = i : j$. Тада важи:

$$\begin{aligned} q(r + s) &= (k : l)((m : n) + (i : j)) = (k : l)((mj + ni) : (nj)) \\ &= (kmj + kni) : (lnj), \\ qr + qs &= (k : l)(m : n) + (k : l)(i : j) = (km : ln) + (ki : lj) \\ &= (kmlj + klni) : (llnj) \overset{(13)}{=} (kmj + kni) : (lnj), \end{aligned}$$

одакле следи да су десне стране претходних једнакости еквивалентне истом односу.

(xi) Нека су $k : l$, $m : n$, $i : j$ елементи скупа $\mathbb{Q}_+$ $(l, n, j > 0)$. Тада, користећи дефиниције операција и релације поретка у $\mathbb{Q}_+$, као и основна својства система $\mathbb{N}_0$, добијамо:

$$\begin{aligned} k : l < m : n \iff kn < lm &\overset{(xi)}{\iff} knjj < lmjj \\ &\overset{(iv),(v),(x)}{\iff} (nj)(kj) + (nj)(li) < (lj)(mj) + (lj)(ni) \\ &\overset{(vii)}{\iff} (nj)(kj + li) < (lj)(mj + ni) \\ &\iff (kj + li) : (lj) < (mj + ni) : (nj) \\ &\iff (k : l) + (i : j) < (m : n) + (i : j). \end{aligned}$$

Када се својство (vii) искључи из *Листе 2*, системи $\mathbb{N}_0$ и $\mathbb{Q}_+$ имају исти скуп основних својстава. Зато су и сва својства која се из њих изводе такође идентична. То показује да је за ово проширење испуњен захтев Пикоковог принципа перманенције.

Наводимо нека нова својства структуре $(\mathbb{Q}_+, +, \cdot, <)$ која следе из претходне листе.

(25′) *За свако $q \in \mathbb{Q}_+$, $q \neq 0$, мултипликативни инверз је једнозначно одређен.*

(26′) *Ако је $q, r \in \mathbb{Q}_+$ и $q > 0$, тада једначина $qx = r$ има јединствено решење у $\mathbb{Q}_+$.* (Другим речима, у структури $\mathbb{Q}_+$ је дефинисано дељење, искључујући дељење нулом.)

(27′) *Кадгод је $r > 0$, количник бројева q и r из $\mathbb{Q}_+$ се може изразити као $q : r = qr^{-1}$.*

(28′) $qr = 0$ *ако и само ако је* $q = 0$ *или* $r = 0$.

Докажимо својства (26′) и (28′).

(26′) Како је $q(q^{-1}r) = (qq^{-1})r = 1 \cdot r = r$, то је $q^{-1}r$ решење једначине $qx = r$. Обратно, ако је $qx = r$, тада је $q^{-1}(qx) = q^{-1}r$, што повлачи да је $x = q^{-1}r$.

(28′) Импликација ($q = 0$ или $r = 0$) $\implies$ $qr = 0$ је доказана у (7) у случају природних бројева, па се преноси у $\mathbb{Q}_+$. Да бисмо показали да важи и обратно, претпоставимо, нпр, да је $r \neq 0$. Због (7′), 0 је решење (по q) једначине $qr = 0$. Како је, према (26′), решење те једначине јединствено, следи да је $q = 0$.

3.2. Систем рационалних бројева

У следећем кораку се на аналоган начин уводи скуп $\mathbb{Q}$ рационалних бројева. Када будемо користили оперативна својства система $\mathbb{Q}_+$, означаваћемо са (1'), (2'), ... својства (1), (2), ... система $\mathbb{N}_0$, примењена на елементе система $\mathbb{Q}_+$ (која важе на основу Пикоковог принципа).

Посматрајмо скуп свих формалних разлика $q - r$ елемената скупа $\mathbb{Q}_+$. Инспирисани својством

(17') $k - l < (=, >) m - n \iff k + n < (=, >) l + m$,

дефинишимо релацију „$\sim$“ у том скупу помоћу

$$q - r \sim s - t \quad \text{ако је} \quad q + t = r + s.$$

1. $\sim$ *је релација еквиваленције.*

Једино је потребно проверити транзитивност. Претпоставимо да је $q - r \sim s - t$ и $s - t \sim u - v$, тј. да је $q + t = r + s$ и $s + v = t + u$. Тада, додајући v обема странама прве једнакости, а r обема странама друге, добијамо $q + t + v = r + s + v$ и $r + s + v = r + t + u$. Дакле, $q + t + v = r + t + u$ па скраћујући са t добијамо $q + v = r + u$, тј. $q - r \sim u - v$.

Дефиниција 2. *Скуп $\mathbb{Q}$ рационалних бројева је скуп класа еквиваленције претходне релације.*

Као и у случају скупа $\mathbb{Q}_+$, елементе скупа $\mathbb{Q}$ ћемо једноставно означавати, на пример, са $q - r$.

Из дефиниције релације $\sim$ непосредно следи:

2. *За све q, r и s из $\mathbb{Q}_+$ важи*

$$q - r \sim (q + s) - (r + s).$$

На основу претходног,

ако је $q \geqslant r$ важи $q - r \sim (q - r) - 0$ и означимо $\alpha_{qr} = q - r$ и $\beta_{qr} = 0$;

ако је $q < r$, важи $q - r \sim 0 - (r - q)$ и означимо $\alpha_{qr} = 0$ и $\beta_{qr} = r - q$.

Тада се $q - r$ у првом случају, а $r - q$ у другом случају зову *апсолутна вредност* елемента $q - r$. Према **2**. је $q - r \sim \alpha_{qr} - \beta_{qr}$ и $\alpha_{qr} - \beta_{qr}$ се зове *стандардни представник* класе $q - r$.

Лако се види да важи

3. $(q - r) - s = (q - s) - r \quad (q \geqslant r + s)$.

Сада показујемо да је стандардни представник класе јединствено одређен. Наиме, важи

4. *Ако је $q - r \sim s - t$, тада је $\alpha_{qr} = \alpha_{st}$ и $\beta_{qr} = \beta_{st}$.*

Када је $q \geqslant r$, из $q + t = r + s$ следи да је $q = (r + s) - t$ и $q - r = ((r + s) - t) - r \overset{\mathbf{3.}}{=} ((r + s) - r) - t \overset{(3')}{=} s - t$. Дакле, $\alpha_{qr} = \alpha_{st}$ и јасно $\beta_{qr} = \beta_{st}$. А ако је $q < r$, следи да је $r = (q + t) - s$ и $r - q = ((q + t) - s) - q = ((q + t) - q) - s = t - s$. Дакле, $\beta_{qr} = \beta_{st}$ и јасно $\alpha_{qr} = \alpha_{st}$.

Инспирисани својствима (17'), (22') и (24'), релација поретка и операције се у скупу $\mathbb{Q}$ уводе помоћу:

$$
\begin{gathered}
q - r < s - t \quad \text{ако је} \quad \alpha_{qr} + \beta_{st} < \beta_{qr} + \alpha_{st}, \\
(q - r) + (s - t) = (\alpha_{qr} + \alpha_{st}) - (\beta_{qr} + \beta_{st}), \\
(q - r) \cdot (s - t) = (\alpha_{qr}\alpha_{st} + \beta_{qr}\beta_{st}) - (\alpha_{qr}\beta_{st} + \beta_{qr}\alpha_{st}).
\end{gathered}
$$

Коректност ових дефиниција следи из јединствености стандардних представника одговарајућих класа.

Елемент $0 - 0$ је стандардни представник своје класе. За $q - r \in \mathbb{Q}$ важи

$$(q - r) + (0 - 0) = (\alpha_{qr} + 0) - (\beta_{qr} + 0) = \alpha_{qr} - \beta_{qr} = q - r.$$

Дакле, видимо да је $0 - 0$ *адитивни неутрални елемент.*

За класе $q - r$ и $r - q$ је $\alpha_{qr} = \beta_{rq}$ и $\alpha_{rq} = \beta_{qr}$. Зато је

$$(q - r) + (r - q) = (\alpha_{qr} - \beta_{qr}) + (\alpha_{rq} - \beta_{rq}) = (\alpha_{qr} + \alpha_{rq}) - (\beta_{rq} + \beta_{qr}) = 0 - 0,$$

и видимо да је $r - q$ *адитивни инверз* за $q - r$. Тај инверз ћемо означити са $r - q = (q - r)^{-}$.

Елемент $(1 - 0) \in \mathbb{Q}$ има форму стандардног представника и игра улогу *мултипликативног неутралног елемента.* Заиста,

$$(q - r) \cdot (1 - 0) = (\alpha_{qr} \cdot 1 + \beta_{qr} \cdot 0) - (\alpha_{qr} \cdot 0 + \beta_{qr} \cdot 1) = \alpha_{qr} - \beta_{qr} = q - r.$$

Приметимо да је пресликавање $q \mapsto q - 0$ утапање скупа $\mathbb{Q}_{+}$ у $\mathbb{Q}$, које чува операције и релацију поретка.

Сада можемо да наведемо оперативна својства система $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$.

(i) $(\forall a)(\forall b)\, a+b=b+a$

(ii) $(\forall a)(\forall b)(\forall c)\,(a+b)+c=a+(b+c)$

(iii) $(\exists 0)(\forall a)\, a+0=a$

(iv) $(\forall a)(\exists b)\, a+b=0$

(v) $(\forall a)(\forall b)\, ab=ba$

(vi) $(\forall a)(\forall b)(\forall c)\,(ab)c=a(bc)$

(vii) $(\exists 1)(0<1 \text{ и } (\forall a)\, a\cdot 1=a)$

(viii) $(\forall a\neq 0)(\exists b)\, ab=1$

(ix) $(\forall a)(\forall b)(\forall c)\, a(b+c)=ab+ac$

(x) $(\forall a)(\forall b)\,(a<b \iff (\exists c>0)\, a+c=b)$

(xi) $(\forall a)(\forall b)\,(a<b \text{ или } a=b \text{ или } b<a)$

(xii) $(\forall a)(\forall b)(\forall c)$
$(a<b \iff a+c<b+c)$

(xiii) $(\forall a)(\forall b)(\forall c>0)$
$(a<b \iff ac<bc)$

Листа 3

Другим речима, поново је задовољен принцип перманенције, а добијено је ново својство (iv) егзистенције адитивног инверзног елемента.

Наводимо као илустрацију доказе неких од својстава са *Листе 3*.

(vi) Нека су $q-r$, $s-t$, $u-v$ елементи скупа $\mathbb{Q}$. Тада важи

$$\begin{aligned}
((q-r)(s-t))(u-v) &= ((\alpha_{qr}\alpha_{st}+\beta_{qr}\beta_{st})-(\alpha_{qr}\beta_{st}+\beta_{qr}\alpha_{st}))(\alpha_{uv}-\beta_{uv})\\
&= (\alpha_{qr}\alpha_{st}\alpha_{uv}+\beta_{qr}\beta_{st}\alpha_{uv}+\alpha_{qr}\beta_{st}\beta_{uv}+\beta_{qr}\alpha_{st}\beta_{uv})\\
&\quad -(\alpha_{qr}\alpha_{st}\beta_{uv}+\beta_{qr}\beta_{st}\beta_{uv}+\alpha_{qr}\beta_{st}\alpha_{uv}+\beta_{qr}\alpha_{st}\alpha_{uv}),\\
(q-r)((s-t)(u-v)) &= (\alpha_{qr}-\beta_{qr})((\alpha_{st}\alpha_{uv}+\beta_{st}\beta_{uv})-(\alpha_{st}\beta_{uv}+\beta_{st}\alpha_{uv}))\\
&= (\alpha_{qr}\alpha_{st}\alpha_{uv}+\alpha_{qr}\beta_{st}\beta_{uv}+\beta_{qr}\alpha_{st}\beta_{uv}+\beta_{qr}\beta_{st}\alpha_{uv})\\
&\quad -(\beta_{qr}\alpha_{st}\alpha_{uv}+\beta_{qr}\beta_{st}\beta_{uv}+\alpha_{qr}\alpha_{st}\beta_{uv}+\alpha_{qr}\beta_{st}\alpha_{uv}),
\end{aligned}$$

и тврђење следи из својстава система $\mathbb{Q}_+$.

(x) Нека су $q-r$ и $s-t$ елементи система $\mathbb{Q}$ за које важи $q-r<s-t$, тј. $q+t<r+s$. Узмимо $u=r+s$, $v=q+t$. Тада је

$$(q-r)+(u-v)=(q+u)-(r+v)=(q+(r+s))-(r+(q+t))=((q+r)+s)-((q+r)+t)\overset{\mathbf{2.}}{=}s-t.$$

Обратно, нека је $(q-r)+(u-v)=s-t$ и $0-0<u-v$, тј. $q+u+t=r+v+s$ и $v<u$. Из $(q+u+t)-v=(r+v+s)-v$ или $((q+t)+u)-v=((r+s)+v)-v$, примењујући $(3')$ и $(19')$, следи да је $(q+t)+(u+v)=r+s$. Дакле, према (ix) из *Листе 2*, важи $q+t<r+s$, тј. $q-r<s-t$.

(xiii) Нека су $q-r$, $s-t$ и $u-v$ елементи система $\mathbb{Q}$, при чему је $0-0<u-v$. Тада је $\alpha_{uv}>0$, $\beta_{uv}=0$, па важи

$$\begin{aligned}
q-r<s-t &\iff \alpha_{qr}-\beta_{qr}<\alpha_{st}-\beta_{st} \iff \alpha_{qr}+\beta_{st}<\beta_{qr}+\alpha_{st}\\
&\iff (\alpha_{qr}+\beta_{st})\alpha_{uv}<(\beta_{qr}+\alpha_{st})\alpha_{uv}\\
&\iff \alpha_{qr}\alpha_{uv}+\beta_{st}\alpha_{uv}<\beta_{qr}\alpha_{uv}+\alpha_{st}\alpha_{uv}\\
&\iff \alpha_{qr}\alpha_{uv}-\beta_{qr}\alpha_{uv}<\alpha_{st}\alpha_{uv}-\beta_{st}\alpha_{uv}\\
&\iff (\alpha_{qr}-\beta_{qr})(\alpha_{uv}-0)<(\alpha_{st}-\beta_{st})(\alpha_{uv}-0)\\
&\iff (\alpha_{qr}-\beta_{qr})(\alpha_{uv}-\beta_{uv})<(\alpha_{st}-\beta_{st})(\alpha_{uv}-\beta_{uv})\\
&\iff (q-r)(u-v)<(s-t)(u-v).
\end{aligned}$$

И у овом случају се добијају нека нова својства.

(29′) *За свако* $a \in \mathbb{Q}$, *адитивни инверз је јединствено одређен.*

(30′) *Ако* $a, b \in \mathbb{Q}$, *тада једначина* $a + x = b$ *има јединствено решење у* $\mathbb{Q}$. *(Другим речима, у структури* $\mathbb{Q}$ *је дефинисано одузимање.)*

(31′) *Разлика бројева* a *и* b *из* $\mathbb{Q}$ *се може изразити као* $a - b = a + b^-$.

(32′) *Нека су* x^- *и* 1^- *адитивни инверзи за* x *и* 1, *респективно. Тада је* $x^- = 1^- \cdot x$.

Докажимо ово последње својство. Из

$$x + 1^- \cdot x = 1 \cdot x + 1^- \cdot x = (1 + 1^-)x = 0 \cdot x = 0$$

и из (30′) следи да је $1^- \cdot x$ адитивни инверз за x.

Скуп свих $a \in \mathbb{Q}$ за које важи $0 < a$ означавамо са $\mathbb{Q}^+$ и зовемо *скуп позитивних рационалних бројева.* Слично се уводи скуп $\mathbb{Q}^-$ *негативних рационалних бројева.* На основу својства (ix) важи:

$$a < 0, \quad \text{или} \quad a = 0, \quad \text{или} \quad 0 < a.$$

Дакле, скуп $\mathbb{Q}$ је дисјунктна унија $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-$.

5. (а) *Производ два позитивна или два негативна броја је позитиван број.*

(б) *Производ позитивног и негативног броја је негативан број.*

Заиста, ако је $q > 0$ и $r > 0$, онда је $qr > 0$ и

$$(q - 0)(r - 0) = (qr - 0), \qquad (0 - q)(0 - r) = (qr - 0),$$

па је (а) доказано. Такође,

$$(q - 0)(0 - r) = (0 - qr),$$

па важи и (б).

6. *Ако* $a, b, c \in \mathbb{Q}$ *и* $c < 0$, *онда важи* $a < b \iff bc < ac$.

Нека је $a = \alpha_{qr} - \beta_{qr}$, $b = \alpha_{st} - \beta_{st}$ и $c = \alpha_{uv} - \beta_{uv}$, где је $\alpha_{uv} = 0$ и $\beta_{uv} > 0$. Тада важи

$$\begin{aligned}
a < b &\iff \alpha_{qr} - \beta_{qr} < \alpha_{st} - \beta_{st} \iff \alpha_{qr} + \beta_{st} < \beta_{qr} + \alpha_{st} \\
&\iff (\alpha_{qr} + \beta_{st})\beta_{uv} < (\beta_{qr} + \alpha_{st})\beta_{uv} \\
&\iff \alpha_{qr}\beta_{uv} + \beta_{st}\beta_{uv} < \beta_{qr}\beta_{uv} + \alpha_{st}\beta_{uv} \\
&\iff \beta_{st}\beta_{uv} - \alpha_{st}\beta_{uv} < \beta_{qr}\beta_{uv} - \alpha_{qr}\beta_{uv} \\
&\iff (\alpha_{st} - \beta_{st})(0 - \beta_{uv}) < (\alpha_{qt} - \beta_{qr})(0 - \beta_{uv}) \\
&\iff (\alpha_{st} - \beta_{st})(\alpha_{uv} - \beta_{uv}) < (\alpha_{qr} - \beta_{qr})(\alpha_{uv} - \beta_{uv}) \\
&\iff bc < ac.
\end{aligned}$$

4. Својство минималности уведених система

Подсетимо се да смо у одељку 1 показали да је систем природних бројева с нулом најмање уређено полупоље, тј. да свако уређено полупоље садржи копију изоморфну полупољу $\mathbb{N}_0$. Сада ћемо доказати одговарајућа својства за структуре $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}_+$ и $\mathbb{Q}$.

Назовимо структуру $(S, +, \cdot, <)$:

1° *уређеним полупољем с адитивним инверзом* ако задовољава својства набројана у *Листи 1*, као и додатно својство $(\forall a)(\exists b)\ a + b = 0$.

2° *уређеним полупољем с мултипликативним инверзом* ако задовољава својства набројана у *Листи 2.*

3° *уређеним пољем* ако задовољава својства набројана у *Листи 3.*

Теорема 2. *Структура целих бројева $(\mathbb{Z}, +, \cdot, <)$ је најмање уређено полупоље с адитивним инверзом.*

Притом се скуп $\mathbb{Z}$ дефинише као $\mathbb{Z} = \mathbb{N}_0 \cup \mathbb{N}^-$, где је $\mathbb{N}^- = \{\, n^- \mid n \in \mathbb{N}\,\}$.

Доказ. Нека је $(S, +, \cdot, <)$ произвољно уређено полупоље с адитивним инверзом и нека је $f\colon \mathbb{N}_0 \to S$, $f(n) = a_n$ пресликавање дефинисано у доказу теореме 1. То пресликавање можемо продужити до пресликавања $g\colon \mathbb{Z} \to S$ на следећи начин:

$$g(z) = \begin{cases} a_z, & \text{за } z \geqslant 0, \\ -a_{-z}, & \text{за } z < 0. \end{cases}$$

Докажимо да је пресликавање g инјективно и да „чува“ операције ‘‘$+$’’ и ‘‘$\cdot$’’ и релацију ‘‘$<$’’.

1° Нека $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ и нека је $g(z_1) = g(z_2)$. Јасно је да постоје само две могућности: $z_1, z_2 \geqslant 0$ или $z_1, z_2 < 0$. У првом случају имамо да је $a_{z_1} = a_{z_2}$, и, како је пресликавање $f\colon \mathbb{N} \to S$ инјективно, следи да је $z_1 = z_2$. У другом случају, из $-a_{-z_1} = -a_{-z_2}$ следи да је $a_{-z_1} = a_{-z_2}$, па је $-z_1 = -z_2$ и $z_1 = z_2$. Дакле, g је инјективно пресликавање.

2° Покажимо да $g(z_1 + z_2) = g(z_1) + g(z_2)$ важи за све $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$. Ова релација тривијално важи ако је $z_1 = 0$ или $z_2 = 0$. Даље разликујемо следеће случајеве:

(а) $z_1, z_2 > 0$. Тада $g(z_1 + z_2) = a_{z_1+z_2} = a_{z_1} + a_{z_2} = g(z_1) + g(z_2)$.

(б) $z_1 > 0$, $z_2 < 0$, $z_1 + z_2 \geqslant 0$. Тада:

$$g(z_1 + z_2) = a_{z_1+z_2} = a_{z_1-(-z_2)} = a_{z_1} - (a_{-z_2}) = g(z_1) + g(z_2).$$

(в) $z_1 > 0$, $z_2 < 0$, $z_1 + z_2 < 0$. Тада:

$$g(z_1 + z_2) = -a_{-(z_1+z_2)} = -a_{(-z_2)-z_1} = -(a_{-z_2} - a_{z_1}) = a_{z_1} + (-a_{-z_2}) = g(z_1) + g(z_2).$$

(г) $z_1, z_2 < 0$. Тада:

$$\begin{aligned} g(z_1 + z_2) &= -a_{-(z_1+z_2)} = -a_{(-z_1)+(-z_2)} = -(a_{-z_1} + a_{-z_2}) = -a_{-z_1} + (-a_{-z_2}) \\ &= g(z_1) + g(z_2). \end{aligned}$$

3° Покажимо сада да $g(z_1 \cdot z_2) = g(z_1) \cdot g(z_2)$ важи за све $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$. Поново је случај $z_1 = 0$ или $z_2 = 0$ тривијалан. Позматрајмо следеће могуће случајеве:

(а) $z_1, z_2 > 0$. Тада је $g(z_1 \cdot z_2) = a_{z_1 \cdot z_2} = a_{z_1} \cdot a_{z_2} = g(z_1) \cdot g(z_2)$.

(б) $z_1 > 0$, $z_2 < 0$ (тј. $z_1 \cdot z_2 < 0$). Тада имамо

$$g(z_1 \cdot z_2) = -a_{-(z_1 \cdot z_2)} = -a_{z_1 \cdot (-z_2)} = -(a_{z_1} \cdot a_{-z_2}) = a_{z_1} \cdot (-a_{-z_2}) = g(z_1) \cdot g(z_2).$$

(в) $z_1, z_2 < 0$ (тј. $z_1 \cdot z_2 > 0$). Тада важи следеће:

$$g(z_1 \cdot z_2) = a_{z_1 \cdot z_2} = a_{(-z_1)\cdot(-z_2)} = (-a_{-z_1}) \cdot (-a_{-z_2}) = g(z_1) \cdot g(z_2).$$

4° Најзад, покажимо да $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ и $z_1 < z_2$ повлачи $g(z_1) < g(z_2)$.

Из $z_1 < z_2$ следи да $z_1 + m = z_2$ важи за неко $m > 0$. Како је под 2° доказано да је $g(z_2) = g(z_1) + g(m)$, то је $g(z_1) < g(z_2)$, због $g(m) > 0$.

Дакле, доказали смо да је $g[\mathbb{Z}]$ изоморфна копија скупа $\mathbb{Z}$. ∎

Теорема 3. *Структура $(\mathbb{Q}_+, +, \cdot, <)$ ненегативних рационалних бројева је најмање уређено полупоље с мултипликативним инверзом.*

Доказ. Нека је $(S, +, \cdot, <)$ произвољно уређено полупоље с мултипликативним инверзом и нека је $f\colon \mathbb{N}_0 \to S$, $f(n) = a_n$ пресликавање дефинисано у доказу теореме 1. Дефинишимо пресликавање $h\colon \mathbb{Q}_+ \to S$ помоћу

$$h(k/l) = a_k : a_l, \qquad \text{за } k, l \in \mathbb{N},\ l > 0.$$

Показаћемо да је пресликавање h инјективно и да „чува“ операције ‘‘+’’ и ‘‘·’’ и релацију ‘‘<’’.

1° Нека су $k_1/l_1, k_2/l_2 \in \mathbb{Q}_+$ такви да је $h(k_1/l_1) = h(k_2/l_2)$. Тада је $a_{k_1} : a_{l_1} = a_{k_2} : a_{l_2}$, па следи да је $a_{k_1} \cdot a_{l_2} = a_{k_2} \cdot a_{l_1}$, дакле $a_{k_1 l_2} = a_{k_2 l_1}$. Ово значи да је $k_1 l_2 = k_2 l_1$ и најзад $k_1/l_1 = k_2/l_2$. Дакле, пресликавање h је инјективно.

2° За произвољне елементе k_1/l_1, k_2/l_2 из $\mathbb{Q}_+$ важи следеће:

$$\begin{aligned} h(k_1/l_1 + k_2/l_2) &= h((k_1 l_2 + k_2 l_1)/(l_1 l_2)) = a_{k_1 l_2 + k_2 l_1} : a_{l_1 l_2} \\ &= (a_{k_1} a_{l_2} + a_{k_2} a_{l_1}) : (a_{l_1} a_{l_2}) = (a_{k_1} : a_{l_1}) + (a_{k_2} : a_{l_2}) = h(k_1/l_1) + h(k_2/l_2). \end{aligned}$$

3° За све k_1/l_1, $k_2/l_2 \in \mathbb{Q}_+$ имамо да је

$$\begin{aligned} h((k_1/l_1) \cdot (k_2/l_2)) &= h((k_1 k_2)/(l_1 l_2)) = a_{k_1 k_2} : a_{l_1 l_2} = (a_{k_1} a_{k_2}) : (a_{l_1} a_{l_2}) \\ &= (a_{k_1} : a_{l_1}) \cdot (a_{k_2} : a_{l_2}) = h(k_1/l_1) \cdot h(k_2/l_2). \end{aligned}$$

4° Нека су k_1/l_1 и k_2/l_2 елементи скупа $\mathbb{Q}_+$, такви да је $k_1/l_1 < k_2/l_2$. Тада је $k_1 l_2 < k_2 l_1$, и следи да је $a_{k_1 l_2} < a_{k_2 l_1}$. Даље, $a_{k_1} a_{l_2} < a_{k_2} a_{l_1}$, и најзад $a_{k_1} : a_{l_1} < a_{k_2} : a_{l_2}$, тј. $h(k_1/l_1) < h(k_2/l_2)$.

Тиме је доказано да је $h[\mathbb{Q}_+]$ изоморфна копија скупа $\mathbb{Q}_+$. ∎

Теорема 4. *Структура рационалних бројева $(Q, +, \cdot, <)$ је најмање уређено поље.*

Доказ. Нека је $(S, +, \cdot, <)$ произвољно уређено поље и нека је $g\colon \mathbb{Z} \to S$ пресликавање коришћено у доказу теореме 2. Дефинишимо рпесликавање $j\colon \mathbb{Q} \to S$ помоћу

$$j(p/q) = g(p) : g(q), \qquad \text{за } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ q \neq 0.$$

Доказаћемо да је j инјективно пресликавање и да „чува“ операције ‘‘+’’ и ‘‘·’’ и релацију ‘‘<’’.

1° Нека су $p_1/q_1, p_2/q_2 \in \mathbb{Q}$ такви да је $j(p_1/q_1) = j(p_2/q_2)$. Тада је $g(p_1) : g(q_1) = g(p_2) : g(q_2)$. Или, другачије, $g(p_1) \cdot g(q_2) = g(p_2) \cdot g(q_1)$, што повлачи да је $g(p_1 q_2) = g(p_2 q_1)$. Ово значи да је $p_1 q_2 = p_2 q_1$, па је $p_1/q_1 = p_2/q_2$. Овим је доказано да је пресликавање j инјективно.

2° Следеће важи за свака два елемента p_1/q_1, p_2/q_2 из $\mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned} j(p_1/q_1 + p_2/q_2) &= j((p_1 q_2 + p_2 q_1)/(q_1 q_2)) = g(p_1 q_2 + p_2 q_1) : g(q_1 q_2) \\ &= (g(p_1) g(q_2) + g(p_2) g(q_1)) : (g(q_1) g(q_2)) \\ &= (g(p_1) : g(q_1)) + (g(p_2) : g(q_2)) = j(p_1/q_1) + j(p_2/q_2). \end{aligned}$$

3° Нека $p_1/q_1, p_2/q_2 \in \mathbb{Q}$; тада:

$$\begin{aligned} j((p_1/q_1)\cdot(p_2/q_2)) &= j((p_1p_2)/(q_1q_2)) = g(p_1p_2) : g(q_1q_2) = (g(p_1)g(p_2)) : (g(q_1)g(q_2)) \\ &= (g(p_1) : g(q_1))\cdot(g(p_2) : g(q_2)) = j(p_1/q_1)\cdot j(p_2/q_2). \end{aligned}$$

4° Нека су p_1/q_1 и p_2/q_2 елементи из $\mathbb{Q}$ за које важи $p_1/q_1 < p_2/q_2$. Тада је $p_1q_2 < p_2q_1$, што повлачи $g(p_1q_2) < g(p_2q_1)$. Следи да је $g(p_1)g(q_2) < g(p_2)g(q_1)$ и, најзад, $g(p_1) : g(q_1) < g(p_2) : g(q_2)$, тј. $j(p_1/q_1) < j(p_2/q_2)$.

Тако смо доказали да је $j[\mathbb{Q}]$ изоморфна копија скупа $\mathbb{Q}$. ■

5. Генералисани комутативни и асоцијативни закони

Кад пишемо $a+b$, тада овај израз има два значења – синтактичко, то је запис којим представљамо збир два броја, и семантичко, као број који представљамо тим записом (а који називамо бројевна вредност тог збира). Међутим кад пишемо $a+b+c$, тада овај запис називамо збир три броја (користећи овај термин са синтактичким значењем), али шта је његова бројевна вредност, тј. који број тим записом представљамо? Збирови $a+b$ и $b+c$ имају своју бројевну вредност, тј. њима такође означавамо бројеве, па је то случај и са збировима $(a+b)+c$ и $a+(b+c)$. *Асоцијативни закон*, као принцип аритметике, каже да су ова два броја једнака, тј. $(a+b)+c = a+(b+c)$. Било који од њих, рецимо $(a+b)+c$, можемо узети да одређује *бројевну вредност збира* $a+b+c$.

Да ли ће се вредност овог збира мењати пермутовањем његових чланова? Можемо да пермутујемо сабирке збира два броја. Рецимо биће $a+b = b+a$ или $(a+b)+c = c+(a+b)$ на основу *комутативног закона* за сабирање, који такође узимамо за принцип аритметике. Примењујући једном асоцијативни а други пут комутативни закон и тако редом, добијамо следећи низ једнакости

$$\begin{aligned} (a+b)+c &= a+(b+c) = a+(c+b) = (a+c)+b = (c+a)+b \\ &= c+(a+b) = c+(b+a) = (c+b)+a = (b+c)+a \\ &= b+(c+a) = b+(a+c) = (b+a)+c. \end{aligned}$$

Видимо да је $1\cdot 2\cdot 3 = 6$ пермутација слова a, b, c и за сваку пермутацију два начина њиховог асоцирања, па је то $6\cdot 2 = 12$ различитих израза које смо управо исписали.

Кад асоцирамо на све могуће начине збир четири броја $a+b+c+d$ имаћемо два начина уз збир $(a+b+c)+d$, један уз $(a+b)+(c+d)$ и опет два уз збир $a+(b+c+d)$. Укупно, то је 5 различитих асоцирања. Слова a, b, c, d можемо пермутовати на $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$ начина. Све у свему, то је $24\cdot 5 = 120$ различитих збирова па и не помишљамо да би их требало међусобно једначити како смо то радили у случају збира три броја. Доказаћемо да такве једнакости важе у општем случају збирова и производа n бројева.

Комутативни и асоцијативни закон често се виде да су формулисани у школским књигама за математику, где се не користе на битан начин па само служе као „декоративни“ детаљи. Пре него што докажемо њихова уопштења наведимо неколико примера збирова n бројева где се користе ова уопштења као део рутине која преовладава и где помисао да ту ипак треба нешто доказивати никад се не појављује.

1. Добро је позната прича о Гаусу (Carl Friedrich Gauss, 1777–1855), који је као ђак израчунао збир бројева од 1 до 100 тако што је спарио 1 и 100, 2 и 99, … , 50 и 51, па збирове ових парова, који су сви једнаки 101 помножио њиховим бројем 50 и добио $101 \cdot 50 = 5050$.

2. Питагорина формула за збир непарних бројева. Посматрајмо следећу квадратну слагалицу

$$\begin{array}{ccccc}
\bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \cdots & \bigcirc \\
\bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \cdots & \bigcirc \\
\bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \cdots & \bigcirc \\
 & \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots} & \\
\bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \cdots & \bigcirc
\end{array}$$

коју чини n кружића у n редова. Почињући с првим кружићем у првом реду, затим са следећа 3 који заједно с првим чине квадрат ... до крајњих $2n-1$ који са свим претходним чине комплетну слику, добија се збир $1+3+\cdots+(2n-1)$ кружића. Пошто у n редова имамо по n кружића, њихов број је и $n \cdot n$. Дакле, $1+3+\cdots+(2n-1) = n \cdot n$.

3. На Рјепинову платну Ментална аритметика (Repin, Mental Arithmetic) види се група дечака окупљених око свог учитеља, где усмено рачунају

$$(10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2) : 365.$$

Пратимо њихов могући ток мисли. Квадрирајући 10 и збирове $10+1$, $10+2$, $10+3$ и $10+4$, имаћемо $5 \cdot 100 + 20 + 40 + 60 + 80 + 1 + 4 + 9 + 16 = 500 + 200 + 30 = 730$ па је $730 : 365 = 2$. Други нешто бржи начин је квадрирање бројева $12-2$, $12-1$, 12, $12+1$, $12+2$. Здруживањем $144 - 2 \cdot 12 \cdot 2 + 4$ са $144 + 2 \cdot 12 \cdot 2 + 4$ и $144 - 2 \cdot 12 \cdot 1 + 1$ са $144 + 2 \cdot 12 \cdot 1 + 1$ имаћемо $5 \cdot 144 + 2(4+1) = 720 + 10 = 730$, па је опет $730 : 365 = 2$.

Рачунање на овај други начин је лакше али је образложење поступка суптилиније. Разлике схватамо као један број (па би их требало писати са заградама) и примењујемо правило $(a-b)+b = a$. Заиста, узимајући $a-b = x$ биће $a = x+b$ и $(a-b)+b = x+b = a$. У реалној школској настави прихвата се правило да се број не мења кад од њега одузмемо неки други број па затим тај исти број додамо.

Кад су природни бројеви у питању, зависност идеје броја од перцепције скупа има снажну интуитивну основу. Наиме, ради се о *Канторовом принципу инваријантности броја* (Georg Cantor, 1845–1918): број не зависи од природе елемената скупа, нити од било ког његовог структурисања (поретка елемената, начина њиховог груписања итд). За збирове солидну интуитивну основу представља генералисана адитивна схема као колекција n дисјунктних скупова, а то чини прихватљивим значење и својства збирова n природних бројева. Али та интуитивна основа не може послужити да се пренесе значење збира n бројева и својстава независности његове бројевне вредности од начина здруживања сабирака и размене њихових места. Кад су сабирци рационални или реални бројеви, рутина преовладава па се то прихвата у текућој настави без икакве сумње. Има више примера те врсте, рецимо то је геометријска прогресија кад су a_0 и q произвољни реални бројеви. За производе n бројева недостаје оваква интуитивна основа чак и кад се ради о природним бројевима.

Сад се ми усмеравамо на доказе генералисаног асоцијативног и комутативног закона за сабирање. Докази се ослањају на асоцијативни и комутативни закон за сабирање али би у свему био исти за множење при чему би се знак „$+$“ свуда замењивао знаком „$\cdot$“. Још општије, исти докази би важили за било коју бинарну операију „$*$“ која је комутативна и асоцијативна.

Бројевна вредност збира $a_1 + a_2 + a_3$ дефинише се као број $(a_1 + a_2) + a_3$ и тај број означавамо пишући $a_1 + a_2 + a_3$. Претпоставимо да је бројевна вредност збира $n - 1$ бројева дефинисана и да се означава са $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$. Тада *бројевна вредност збира n бројева* дефинише се као број $(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) + a_n$ и означава са $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Приметимо да у дефиниији бројевне вредности збира имамо један фиксирани редослед здруживања

$$\Big(\big((a_1 + a_2) + a_3\big) + a_4\Big) + a_5 + \cdots ,$$

али тај редослед није битан, јер ћемо управо доказати *уопштени асоцијативним закон*:

Теорема 5. *Вредност збира n бројева не зависи од начина здруживања његових сабирака.*

Доказ. Тврђење је тачно за збирове три броја. Претпоставимо да је тачно за збирове m бројева, где је $m < n$. Тада,

$$\begin{aligned}(a_1 + \cdots + a_{n-1}) + a_n &= ((a_1 + \cdots + a_{n-2}) + a_{n-1}) + a_n \\ &= (a_1 + \cdots + a_{n-2}) + (a_{n-1} + a_n) = \cdots = (a_1 + \cdots + a_{n-3}) + (a_{n-2} + a_{n-1} + a_n) \\ &= \cdots = a_1 + (a_2 + \cdots + a_n).\end{aligned}$$

Свако здруживање чланова збира $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ завршава се једним од финалних здруживања које смо горе навели, што доказује тврђење теореме. ■

Сад формулишемо и доказујемо уопштени комутативни закон:

Теорема 6. *Вредност збира n бројева не зависи од редоследа сабирака.*

Доказ. Тврђење је тачно за збирове три броја. Претпоставимо да је тачно за све збирове m бројева кад је $m < n$. Нека је *s бројевна вредност* збира $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ и нека је $a'_1, a'_2, \ldots, a'_{n-1}$ произвољна пермутација његових првих $n - 1$ чланова. Тада је, према индукцијској претпоставци,

$$\begin{aligned}s &= (a'_1 + \cdots + a'_{n-1}) + a_n = ((a'_1 + \cdots + a'_{n-2}) + a'_{n-1}) + a_n \\ &= (a'_1 + \cdots + a'_{n-2}) + (a'_{n-1} + a_n) = (a'_1 + \cdots + a'_{n-2}) + (a_n + a'_{n-1}) \\ &= (a'_1 + \cdots + a'_{n-2} + a_n) + a'_{n-1}.\end{aligned}$$

Према индукцијској петпоставци у последњем збиру у загради, a_n се може померати да буде између било која два сабирка или испред њих свих. Тако за све те пермутације вредност збира $a_1 + \cdots + a_n$ се не мења, а то је и требало доказати. ■

Ови докази могу се укључити у програме добрих средњих школа. Али будимо и мало скептични па кажимо да се школска математика такође учи дриловањем задацима.

Са садржајем који излажемо овде требало би да буду упознати сви који предају математику у школи, било да су предметни наставници, било учитељи. А биће кад се ови садржаји нађу у курсевима дидактике математике који ће служити продубљивању знања школске математике.