Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

19. јануар 2019.

Први разред – А категорија

1. Нека су AA_0, BB_0 и CC_0 висине $\triangle ABC$, а H његов ортоцентар. Ако су M и N средишта дужи AA_0 и CC_0, доказати да тачке M, N, B_0 и H леже на истој кружници.

2. Наћи све парове реалних бројева a и b такве да за све реалне бројеве x и y важи једнакост
$$\lfloor ax + by \rfloor + \lfloor bx + ay \rfloor = (a + b)\lfloor x + y \rfloor.$$
(За реалан број t, са $\lfloor t \rfloor$ означавамо највећи цео број који није већи од t.)

3. Доказати да се у правилном осмоуглу $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ дијагонале A_1A_6, A_3A_7 и A_5A_8 секу у једној тачки.

4. Наћи све природне бројеве n такве да су $n - 4$, $2n + 2$ и $4n + 1$ потпуни кубови.

5. У популарној игри „Миноловац“ на неким пољима табле $a \times b$ $(a, b \in \mathbb{N})$ налазе се мине, а на сваком преосталом пољу је уписан број њему суседних поља на којима су мине (под суседним пољима подразумевамо поља која имају бар једно заједничко теме). Испитати да ли постоје бројеви a и b и распоред мина на табли $a \times b$ такви да тачно 2019 поља немају мину и да је на свима њима уписан број:

a) 3;
b) 4;
c) 7.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

19. јануар 2019.

Други разред – А категорија

1. Одредити максималну вредност израза

$$|8x^2 - 2x - 3|$$

на интервалу $x \in [0, 1]$.

2. Постоји ли бесконачан низ природних бројева који су сви потпуни квадрати, и сваки члан тог низа почев од трећег је једнак збиру претходна два?

3. Кружница је уписана у једнакокраки трапез $ABCD$ и додирује основицу CD у тачки L, а краке BC и AD у тачкама K и M, редом. У којој размери права AL дели дуж MK?

4. Одредити све комплексне бројеве z и w такве да важи

$$|z|^2 + zw + \overline{w} = 2 + 6i \qquad \text{и} \qquad |w|^2 + \overline{zw} + z = 2 - 4i.$$

5. Назовимо *крстом* таблу сачињену од уније једне табле $a \times 1$ и једне табле $1 \times b$ које имају тачно једно заједничко поље ($a, b \in \mathbb{N}$). Скуп неких поља такве табле називамо *повезана област* ако се из сваког поља у том скупу може доћи до сваког другог поља крећући се само по суседним пољима унутар уоченог скупа (под суседним пољима подразумевамо поља која имају заједничку страницу). За задат природан број n, одредити број начина на које се бројеви $1, 2, \ldots, n$ могу уписати у неки крст са n поља (крст није унапред фиксиран), сваки број у тачно једном пољу, уз услов да за свако k, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, поља у којима су уписани бројеви $1, 2, \ldots, k$ чине повезану област.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

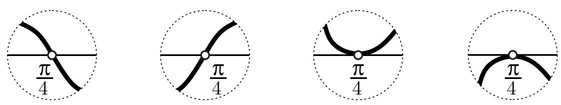
19. јануар 2019.

Трећи разред – А категорија

1. На једном од исечака доле приказан је део x-осе и графика функције

$$f(x)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x-2}{4x^2-7x+3}.$$

Који је то исечак?



2. У $\triangle ABC$ тачка D је средиште странице BC. Тачка P на дужи AD је таква да важи $CP=AB$. Права CP сече дуж AB у тачки Q. Доказати: $AQ=PQ$.

3. Нека су k, n и d природни бројеви. Означимо са A_d број k-торки $(a_1,a_2,\ldots,a_k)$ целих бројева таквих да важи

$$n\geqslant a_1\geqslant a_2\geqslant\ldots\geqslant a_k\geqslant 0 \quad \text{и} \quad a_1+a_2+\cdots+a_k=d.$$

Означимо са B_d број k-торки $(b_1,b_2,\ldots,b_k)$ ненегативних целих бројева таквих да важи

$$b_1+b_2+\cdots+b_k\leqslant n \quad \text{и} \quad b_1+2b_2+\cdots+kb_k=d.$$

Доказати:

$$A_d=B_d=B_{kn-d}.$$

4. Дати су различити природни бројеви $a_1,a_2,\ldots,a_{100}$. За $i=1,2,\ldots,100$, број b_i је добијен додавањем броју a_i највећег заједничког делиоца осталих 99 бројева. Колико најмање међу бројевима b_i може бити различитих?

5. a) Доказати да постоји бесконачно много природних бројева који се не могу представити у облику

$$p^q+q^r$$

за неке просте бројеве p, q и r.

b) Доказати да постоји само коначно много природних бројева који се не могу представити у облику

$$p_1^{p_2}+p_2^{p_3}+\cdots+p_{i-1}^{p_i}$$

за неки природан број i, $i>1$, и неке просте бројеве $p_1,p_2,\ldots,p_i$.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

19. јануар 2019.

Четврти разред – А категорија

1. У тетраедру $ABCD$ висина из темена D пада у унутрашњост $\triangle ABC$, а пљосни $\triangle DAB$, $\triangle DAC$ и $\triangle DBC$ заклапају с пљосни $\triangle ABC$ међусобно подударне диедарске углове. Ако важи $P(\triangle ABC) = 21$, $P(\triangle DAB) = 15$, $P(\triangle DAC) = 13$ и $P(\triangle DBC) = 14$, израчунати запремину тетраедра $ABCD$.

2. Означимо број цифара броја n у декадном запису са $\mathrm{brc}(n)$. Да ли постоји реална константа c таква да за сваки природан број n важи:

$$\mathrm{brc}(1) + \mathrm{brc}(2) + \cdots + \mathrm{brc}(n) < cn \quad ?$$

3. У некој земљи постоји 101 град. Свака два града су повезана највише једном аутобуском линијом, при чему су све аутобуске линије једносмерне. Из сваког града излази тачно 25 линија и у сваки улази тачно 25. Доказати да се из сваког града може стићи (уз преседања ако је потребно) у сваки други.

4. Дат је петоугао $ABCDE$ у ком важи $CD = AB + AE$. Нека симетрала $\measuredangle BAE$ сече BE у тачки P, нека је Q тачка на CD таква да важи $CQ = AB$, и нека су X и Y средишта дужи BC и DE, респективно. Нека је T тежиште у $\triangle APQ$ и нека YT сече AX у тачки Z. Наћи $\dfrac{AZ}{ZX}$ у функцији од AB и AE.

5. Нека су a, b, c, d ненегативни реални бројеви за које важи $a+b+c+d = 1$. Означимо

$$M = \frac{b^2 + c^2 + d^2 - bc - cd - db}{3}.$$

Доказати неједнакост

$$\sqrt{a+M} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} \leqslant 2.$$

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

19. јануар 2019.

Први разред – Б категорија

1. Од цифара $1, 9, 0, 1, 2, 0, 1, 9$ треба саставити четвороцифрен број дељив са 3 (сваку цифру смемо користити онолико пута колико пута је наведена). Који је:

a) највећи такав број;

b) четврти највећи такав број?

2. У месту Горње Зуце приликом пописа 3019. је било $\frac{5}{8}$ мушкараца, а од њих је 90% било млађих од 75 година, док је код женског становништва 96% било млађих од 75 година. На следећем попису 3029. установљено је да се укупан број становника повећао за 300, док је број особа са 75 и више година био исти као на претходном попису, али сада представља 7% укупног становништва. Колико је укупно становника имало Горње Зуце на претходном попису 3019?

3. Да ли постоји троугао са страницама a, b и c за које важи

$$a, b, c > 2019 \quad \text{и} \quad \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor < \lfloor c \rfloor \quad ?$$

(За реалан број t, са $\lfloor t \rfloor$ означавамо највећи цео број који није већи од t.)

4. Ако једна бела и две црне краве попасу сву траву на ливади за 5 недеља, а три беле и четири црне краве попасу сву траву на ливади за 2 недеље, за колико недеља ће сву траву на ливади попасти једна црна крава? Сматрати да краве исте боје пасу траву истом брзином, да је почетна количина траве на ливади увек иста, и да трава на ливади расте фиксном брзином све до тренутка кад је скроз поједена.

5. За правоугаоним столом је постављено осам столица, четири с једне стране и четири наспрам њих с друге стране. На колико начина је могуће распоредити осморо пријатеља за овим столом, а да притом Ана и Бане *не* седе једно наспрам другог, а Весна и Горан седе једно поред другог? (Познато је да сви пријатељи имају међусобно различита имена.)

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

19. јануар 2019.

Други разред – Б категорија

1. Доказати да је број
$$2013 \cdot 2015 \cdot 2017 \cdot 2019 + 16$$
потпун квадрат.

2. Одредити све вредности реалног параметра k такве да важи:
$$(\forall x \in \mathbb{R})(kx^2 - 4kx + k^2 + 2k - 3 > 0).$$

3. Два дрвета висине 5 и 10 метара су на једнаком растојању од бандере са уличном расветом. Ова два дрвета праве сенке дужине 5 и 15 метара. Колико је висока бандера?

4. Одредити све вредности реалног параметра a за које систем једначина
$$(x+y)^2 = 12;$$
$$x^2 + y^2 = 2(a+1)$$
има тачно два решења.

5. У популарној игри „Миноловац“ на неким пољима табле $a \times b$ $(a, b \in \mathbb{N})$ налазе се мине, а на сваком преосталом пољу је уписан број њему суседних поља на којима су мине (под суседним пољима подразумевамо поља која имају бар једно заједничко теме). Испитати да ли постоје бројеви a и b и распоред мина на табли $a \times b$ такви да тачно 2019 поља немају мину и да је на свима њима уписан број:

a) 8;
b) 7;
c) 6.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

19. јануар 2019.

Трећи разред – Б категорија

1. Наћи све целе бројеве n за које важи $0 \leqslant n \leqslant 90$ и

$$\sin 80^\circ + \sin 50^\circ - \sin 20^\circ = \sqrt{2} \sin n^\circ.$$

2. На краку AD трапеза $ABCD$ изабрана је тачка M. Доказати да друга заједничка тачка N кружница описаних око $\triangle ABM$ и $\triangle CDM$ припада краку BC.

3. Нека су a и b природни бројеви за које важи НЗД$(a, b) = 10$ и НЗД$(a, b+2) = 12$. Израчунати

$$\text{НЗД}(a, 2b) + \text{НЗД}(a, 3b).$$

4. За правоугаоним столом је постављено осам столица, четири с једне стране и четири наспрам њих с друге стране. На колико начина је могуће распоредити осморо пријатеља за овим столом, а да притом Ана и Бане седе једно наспрам другог, а Весна и Горан једно поред другог? (Познато је да сви пријатељи имају међусобно различита имена.)

5. Нека су a, b и c позитивни реални бројеви, $a, b, c \neq 1$. Ако важи

$$\log_a 2018 + \log_c 2018 = 2 \log_b 2018,$$

доказати:

a) $\log_a 2019 + \log_c 2019 = 2 \log_b 2019$;
b) $a^2 = (ac)^{\log_c b}$.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

19. јануар 2019.

Четврти разред – Б категорија

1. Колико има бројева са бар четири цифре који су дељиви са 9 и могу се саставити од цифара $1, 9, 0, 1, 2, 0, 1, 9$ (сваку цифру смемо користити онолико пута колико пута је наведена)?

2. Одредити све вредности реалног параметра m за које једначина

$$(m+1)x^2 - 3mx + 4m = 0$$

има два различита реална решења која су притом оба већа од -1.

3. Четвороугао $ABCD$ је истовремено и тетиван и тангентан, и притом за његове странице важи $AB - CD = BC - AD$. Доказати да је дијагонала BD пречник кружнице описане око четвороугла $ABCD$.

4. Одредити све вредности реалног параметра a за које једначина

$$x^3 - 3ax^2 + (2a^2+5)x - 2a^2 + 3 = 0$$

има 3 реална решења која чине аритметичку прогресију.

5. Означимо број цифара броја n у декадном запису са $\operatorname{brc}(n)$. Показати:

$$\operatorname{brc}(1) + \operatorname{brc}(2) + \cdots + \operatorname{brc}(\underbrace{99\ldots99}_{2019 \text{ пута}}) = 2019 \cdot \underbrace{99\ldots99}_{2019 \text{ пута}} - \underbrace{11\ldots11}_{2019 \text{ пута}} + 2019.$$

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.