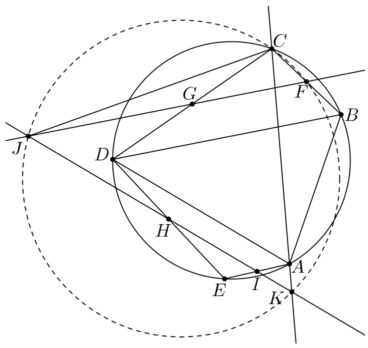
Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Решења задатака

Први разред – А категорија

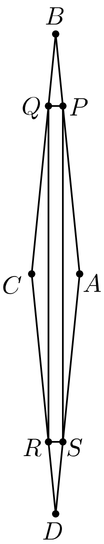
1. Дата једначина нема решења у скупу целих бројева. Посматрајмо једначину по модулу 7. У том случају десна страна једначине је конгруентна са 4. Показаћемо да лева страна никад није конгруентна са 4 по модулу 7. С обзиром на $6 \equiv -1 \pmod 7$ и $8 \equiv 1 \pmod 7$, лева страна је по модулу 7 конгруентна са $z^3 - x^3$. Приметимо, $0^3 = 0$, $(\pm1)^3 = \pm1$, $(\pm2)^3 = \pm8 \equiv \pm1 \pmod 7$ и $(\pm3)^3 = \pm27 \equiv \mp1 \pmod 7$; дакле, потпуни кубови по модулу 7 могу бити конгруенти само са -1, 0 и 1, па следи да $z^3 - x^3$ може по модулу 7 бити конгруентно са 0, 1, 2, -1 и -2, те не може бити конгруентно са 4. Тиме је задатак решен.



Ок 2019 1А 2

2. Како је IH средња линија у $\triangle AED$, следи $IH \parallel AD$, Слично, $FG \parallel BD$. Дакле, $\measuredangle IJF = \measuredangle ADB$. Како је петоугао $ABCDE$ тетиван, следи $\measuredangle ADB = \measuredangle ACB$. Свеукупно имамо $\measuredangle KJF = \measuredangle IJF = \measuredangle ACB = \measuredangle KCF$. Дакле, четвороугао $KFCJ$ је тетиван, тј. тачка K се налази на кружници описаној око $\triangle FCJ$.

3. Због $\{x\} \in [0,1)$, јасно је да сва решења x могу бити само у интервалу $[2019, 4038)$. Уведимо смену $x = 2019 + t$. Тада важи $\{x\} = \{t\}$, па се почетна једначина своди на $t = 2019\{t\}$, где $t \in [0, 2019)$. Из записа $t = \lfloor t \rfloor + \{t\}$ добијамо $\lfloor t \rfloor = 2018\{t\}$, тј. $\{t\} = \frac{\lfloor t \rfloor}{2018}$. Како $\lfloor t \rfloor$ може узимати вредности $0, 1, 2, \ldots, 2018$, за сваку од ових могућности добићемо једнозначно одређену вредност $\{t\}$, са изузетком случаја $\lfloor t \rfloor = 2018$: наиме, тада би следило $\{t\} = \frac{2018}{2018} = 1$, што је немогуће због захтева $0 \leqslant \{t\} < 1$. Према томе, закључујемо да добијена једначина има укупно 2018 решења по t (и то су: 0, $1 + \frac{1}{2018}$, $2 + \frac{2}{2018}$, $3 + \frac{3}{2018}$, $\ldots$, $2017 + \frac{2017}{2018}$), па и полазна једначина има укупно 2018 решења.



Ок 2019 1А 4

4. Одговор је потврдан. Нека је, на пример, четвороугао $ABCD$ ромб са теменима $A(1, 0)$, $B(0, 50)$, $C(-1, 0)$ и $D(0, -50)$. Нека су тачке P и Q добијене у пресеку праве $y = 49$ са ромбом $ABCD$ (где је P десно од Q), а тачке R и S у пресеку праве $y = -49$ са ромбом $ABCD$ (где је R лево од S). Тада је $PQRS$ правоугаоник и за збир његових дијагонала важи $PR + QS > 2PS = 2 \cdot 98 = 196$, али $AC + BD = 2 + 100 = 102 < 196$.

5. Побеђује први играч. Он треба у првом потезу да упише број 673 у угаоно поље (притом приметимо, $673 = \frac{2019}{3}$). Други играч тада мора да упише свој број, рецимо x, у неко од поља b или c (уколико то не учини, тада би његов број био у истој врсти, колони или дијагонали са уписаним бројем 673, па би први играч у следећем потезу могао комплетирати збир 2019 уписивањем броја $2 \cdot 673 - x$ на треће поље; приметимо, ако је x неки од дозвољених бројева са списка, тада је и број $2 \cdot 673 - x$ дозвољен). Први играч потом треба да на незаузето од поља b и c упише број $2 \cdot 673 - x$. После овог потеза, где год да други играч упише свој наредни број, рецимо y, он ће бити у истој врсти, колони или дијагонали са уписаним бројем 673, па ће први играч (уписивањем броја $2 \cdot 673 - y$ на треће поље) моћи да комплетира збир 2019 и победи.

673		
		b
	c	

Ок 2019 1А 5

Други разред – А категорија

1. Да би лева страна била дефинисана, мора важити $\sin x, \cos x \geqslant 0$ и $\cos x - \sqrt{\cos x} \neq 0$ (а то се своди на $\cos x \neq 0$ и $\cos x \neq 1$). Након постављања ових услова, једначина се своди на $\sin x - \sqrt{\sin x} = \cos x - \sqrt{\cos x}$, тј. $\sin x - \cos x = \sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos x}$, и коначно

$$(\sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos x})(\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}) = \sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos x}.$$

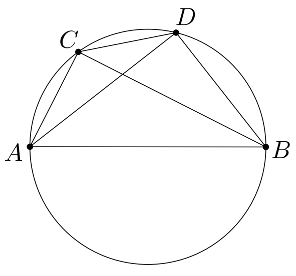
Претпоставимо прво $\sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos x} = 0$. Одатле следи $\sin x = \cos x$, тј. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, али због услова $\sin x, \cos x \geqslant 0$, преостаје само $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Претпоставимо сада $\sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos x} \neq 0$. Тада се скраћивањем горња једнакост своди на $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} = 1$. Означимо $a = \sqrt{\sin x}$ и $b = \sqrt{\cos x}$. Тада преостаје $a + b = 1$, при чему бројеви a и b испуњавају $0 < a, b < 1$ (неједнакости су строге због $\cos x \neq 0, 1$, а онда и $\sin x \neq 1, 0$). Међутим, онда важи $a + b > a^4 + b^4 = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, контрадикција.

Дакле, коначна решења чине само она добијена у првом случају, тј. $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ за $k \in \mathbb{Z}$.

2. Темена ма ког правоугаоника задовољавају наведени услов. Докажимо да није могуће одабрати 5 тачака са описаном особином. Претпоставимо супротно. Нека је AB најдужа дуж у скупу свих дужи чије су крајње тачке међу 5 уочених тачака. Тада три преостале тачке морају бити на кружници чији је пречник AB, те се бар две од њих налазе на истом луку $\widehat{AB}$. Нека је распоред тачака на луку $A - C - D - B$. Тада важи $\measuredangle ACD = \measuredangle ACB + \measuredangle BCD = 90^\circ + \measuredangle BCD > 90^\circ$, па је $\triangle ACD$ тупоугли, контрадикција.

Из наведеног следи да је тражени број тачака једнак 4.



Ок 2019 2А 2

3. Одговор: такви бројеви постоје. Међу свим разломцима мањим од π чији су имениоци не већи од 2019, нека је $\frac{m}{n}$ највећи. Између $\frac{m}{n}$ и π нема ниједног разломка $\frac{b}{a}$ за $a \leqslant 2019$. Другим речима, између $\frac{am}{n}$ и $a\pi$ нема ниједног целог броја b, одакле следи $\lfloor \frac{am}{n} \rfloor = \lfloor \frac{a}{\pi} \rfloor$ за све $a = 1, 2, \ldots, 2019$. Дакле, бројеви m и n испуњавају услове из поставке.

4. У случају да је један од a, b, c једнак 0, лако видимо да и преостала два морају бити 0, што даје једно решење. Претпоставимо сада да су a, b, c позитивни. Из прве једначине следи $\sqrt{b} > 1$ (у супротном би лева страна била мања од a), и слично из друге и треће $\sqrt{c} > 1$ и $\sqrt{a} > 1$. Не умањујући општост, узмимо $a = \max\{a, b, c\}$. Из друге једначине имамо $a = b(\sqrt{c} - 1) \leqslant a(\sqrt{c} - 1)$, одакле следи $c \geqslant 4$ (стога и $a \geqslant c \geqslant 4$). Из прве једначине имамо $c = a(\sqrt{b} - 1) \geqslant c(\sqrt{b} - 1)$, одакле следи $b \leqslant 4$. Међутим, сада из тога и $b = c(\sqrt{a} - 1) \geqslant 4(\sqrt{4} - 1) = 4$ следи да се у последњој неједнакости мора достићи једнакост, тј. $a = b = c = 4$.

Дакле, систем има два решења: $a = b = c = 0$ и $a = b = c = 4$.

5. Одаберимо k такмичара из првог предмета и распоредимо их у различите учионице. Затим међу преосталим ученицима одаберимо k такмичара из другог предмета и распоредимо их у различите учионице. Настављајући овај поступак укупно m пута, тј. за сваки од m предмета (где услов да се из сваког предмета такмичи mk ученика гарантује да ћемо у сваком кораку имати довољно преосталих ученика да бисмо направили тражени избор), добијамо тражени размештај.

Трећи разред – А категорија

1. Како је на поменутом интервалу cos опадајућа функција, из тога и познате неједнакости $\sin t < t$ добијамо $\cos(\sin x) > \cos x$. Из исте неједнакости одмах добијамо и $\sin(\cos x) < \cos x$. Све заједно, $\cos(\sin x) > \cos x > \sin(\cos x)$.

2. Означимо бројеве уписане у одређеним пољима посматране таблице као на слици. Примењујући услов из поставке за поља у којима су уписани бројеви a, b, e и f, добијамо $abef = 1$, $abcefg = 1$, $abefij = 1$ и $abcefgijk = 1$. Множећи ове четири једнакости добијамо $a^4b^4c^2e^4f^4g^2i^2j^2k = 1$, одакле следи $k = 1$. На аналоган начин добијамо $p = q = l = 1$.

a	b	c	d		
e	f	g	h		
i	j	k	l		
m	n	p	q		

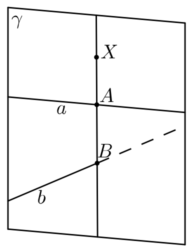
Ок 2019 3А 2

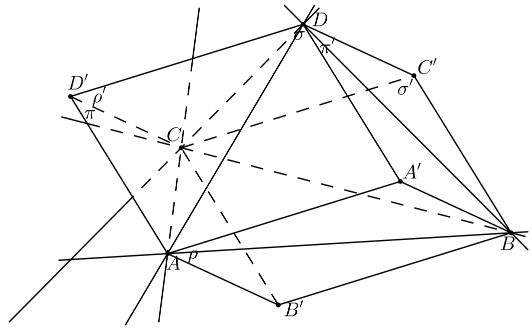
Сада, посматрајући поља у којима су уписани бројеви i и j, добијамо $efijmn = 1$ и $efgijkmnp = 1$, а множењем ових једнакости следи $e^2f^2i^2j^2m^2n^2gkp = 1$. Одавде, $gkp = 1$, а с обзиром на $k = p = 1$, остаје $g = 1$. Аналогно, $h = 1$, као и $j = n = 1$. Примењујући услов на поља у којима су бројеви a и b, и множећи те једнакости, добијамо $a^2b^2e^2f^2cg = 1$, па због $g = 1$ следи $c = 1$. Аналогно, $d = 1$, као и $i = m = 1$. Сада из услова за поље у ком је уписан број k добијамо $f = 1$ (јер су на свих осталих 8 поља јединице), потом из поља у ком је уписан број c добијамо $b = 1$ (јер су на свих осталих 5 поља јединице), аналогно добијамо $e = 1$, и коначно $a = 1$ (из услова за поље на ком је уписан број a).

Како у свим обележеним пољима морају бити уписане јединице, на аналоган начин то важи и за остатак таблице.

3. Докажимо најпре следеће помоћно тврђење: ако се у неком скупу тачака T налазе све тачке с неке две мимоилазне праве a и b, и ако су α и β паралелне равни такве да важи $a \subseteq \alpha$ и $b \subseteq \beta$, тада се у скупу $\ell(T)$ налазе све тачке простора с могућим изузетком тачака равни α и β. Нека је X произвољна тачка простора која не лежи у $\alpha \cup \beta$. Означимо са γ раван одређену правом a и тачком X, и нека се γ и b секу у тачки B (морају се сећи због $\gamma \not\equiv \alpha$). Тада у равни γ права XB мора сећи праву a у некој тачки A (праве не могу бити паралелне јер све праве које су паралелне с правом a а секу се с правом b морају лежати у равни β, док $X \notin \beta$), па како $A, B \in T$, следи и $X \in T$. Тиме је помоћно тврђење доказано. Притом, лако се види да све тачке простора осим тачака из $\alpha \cup \beta$ управо и јесу све тачке које могу „генерисати“ тачке с правих a и b (поред, наравно, њих самих) — док, ако су праве a и b компланарне, оне „генеришу“ читаву раван њима одређену (и ништа сем тога).

Означимо тачке из скупа S датог у поставци са A, B, C и D. Скуп $\ell(S)$ је унија правих AB, AC, AD, BC, BD, CD. Нека су π и π' паралелне равни које садрже мимоилазне праве AC и BD, затим ρ и ρ' паралелне равни које садрже мимоилазне праве AB и CD, и најзад σ и σ' паралелне равни које садрже мимоилазне праве AD и BC, све респективно. Означимо $\pi' \cap \rho \cap \sigma = \{A'\}$, $\pi \cap \rho \cap \sigma' = \{B'\}$, $\pi' \cap \rho' \cap \sigma' = \{C'\}$ и $\pi \cap \rho' \cap \sigma = \{D'\}$ (тј. $AB'CD'A'BC'D$ је паралелопипед). Приметимо, поред тачака A, B, C и D, тачке A', B', C' и D' представљају једине четири тачке које се налазе у пресеку неких трију од равни π, π', ρ, ρ', σ и σ'. За сваку другу тачку у простору можемо одабрати један од парова равни $\{\pi, \pi'\}$, $\{\rho, \rho'\}$ или $\{\sigma, \sigma'\}$ где ниједна раван у том пару не садржи уочену тачку; према помоћном тврђењу с почетка, све такве тачке, дакле, припадају скупу $\ell(\ell(S))$, а према коментару с краја првог пасуса, тачке A', B', C' и D' нису у скупу $\ell(\ell(S))$.





Ок 2019 3А 2

Дакле, тражени број тачака јесте коначан, и износи 4.

4. У задатку ћемо више пута користити следеће: ако за природне бројеве a и b важи $a \mid b$, тада важи и $\varphi(a) \mid \varphi(b)$ (заиста, ако a и b запишемо преко својих простих факторизација, $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ и $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k} q_1^{\gamma_1} q_2^{\gamma_2} \cdots q_l^{\gamma_l}$, где важи $\beta_i \geqslant \alpha_i$ за $i = 1, 2, \dots, k$, тада имамо $\frac{\varphi(b)}{\varphi(a)} = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_i - \alpha_i} \prod_{j=1}^{l} q_j^{\gamma_j - 1}(q_j - 1) \in \mathbb{N}$, што смо и тврдили).

Уведимо нотацију $\varphi^k(n) = \varphi(\varphi^{k-1}(n))$ и $\varphi^1(n) = \varphi(n)$. Означимо $n = 3^\alpha \cdot 673^\beta \cdot k$ за $(k, 4038) = 1$ и $\alpha, \beta \geqslant 1$. Докажимо најпре $k = 1$. Ако то није, онда $2 \mid \varphi(k)$. Тада имамо $\varphi(n) = 3^{\alpha-1} \cdot 2 \cdot 673^{\beta-1} \cdot 672 \cdot \varphi(k) = 2^6 \cdot 3^\alpha \cdot 673^{\beta-1} \cdot 7 \cdot \varphi(k)$, а из тога следи $2^7 \cdot 3^\alpha \cdot 7 \mid \varphi(n)$. Одатле добијамо $2^8 \cdot 3^\alpha = \varphi(2^7 \cdot 3^\alpha \cdot 7) \mid \varphi^2(n)$, а одатле даље $2^8 \cdot 3^{\alpha-1} \mid \varphi^3(n)$, што повлачи $2^8 \mid \varphi^3(n)$. Применом функције φ још 7 пута на обе стране добијамо $2 \mid \varphi^{10}(n)$, што доводи до контрадикције. Дакле, n се записује као $n = 3^\alpha \cdot 673^\beta$.

Докажимо $\alpha = \beta = 1$. Претпоставимо супротно: бар један од бројева α и β је већи од 1. Радићемо случај $\alpha \geqslant 2$, са напоменом да се $\beta \geqslant 2$ решава аналогно. Слично као у првом делу, рачунамо $\varphi(n) = 2^6 \cdot 3^\alpha \cdot 7 \cdot 673^{\beta-1}$. Одатле имамо редом $2^6 \cdot 3^\alpha \cdot 7 \mid \varphi(n)$, затим $2^7 \cdot 3^\alpha \mid \varphi^2(n)$, па $2^7 \cdot 3^{\alpha-1} \mid \varphi^3(n)$ и $2^7 \cdot 3^{\alpha-2} \mid \varphi^4(n)$. Из тога закључујемо $2^7 \mid \varphi^4(n)$, а потом и $2 \mid \varphi^{10}(n)$, што поново доводи до контрадикције. Дакле, једино решење је $n = 2019$.

5. Применимо неједнакост између аритметичке и геометријске средине на следећи начин:

$$\sqrt{\frac{a+2b+3c}{3a+2b+c}} = \frac{a+2b+3c}{\sqrt{(a+2b+3c)(3a+2b+c)}} \geqslant \frac{2(a+2b+3c)}{(a+2b+3c)+(3a+2b+c)} = \frac{2a+4b+6c}{4(a+b+c)}.$$

Сабирањем овога и две аналогне неједнакости добијамо

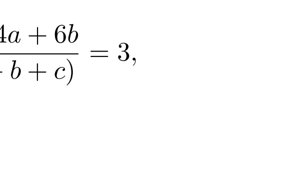
$$\sqrt{\frac{a+2b+3c}{3a+2b+c}} + \sqrt{\frac{b+2c+3a}{3b+2c+a}} + \sqrt{\frac{c+2a+3b}{3c+2a+b}} \geqslant \frac{2a+4b+6c}{4(a+b+c)} + \frac{2b+4c+6a}{4(a+b+c)} + \frac{2c+4a+6b}{4(a+b+c)} = 3,$$

што је и требало доказати.

Четврти разред – А категорија

1. Да би десна страна била дефинисана, мора важити $x \neq -1$. Постављена једначина се своди на $2^{x^2+2x}(x+1) = 2^{4x^4}x^2$, а множећи обе стране са 2, примећујемо да је ово еквивалентно са $2^{(x+1)^2}(x+1) = 2^{(2x^2)^2}(2x^2)$. Приметимо да је функција $f : t \mapsto 2^{t^2}t$ строго растућа (заиста, имамо $f'(t) = 2^{t^2} \ln 2 \cdot 2t \cdot t + 2^{t^2} = 2^{t^2+1}t^2 \ln 2 + 2^{t^2} > 0$), па тиме и инјективна. Одатле следи да мора важити $x + 1 = 2x^2$, те су решења постављене једначине $x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2+4\cdot 2}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$, тј. $x_1 = 1$ и $x_2 = -\frac{1}{2}$ (оба испуњавају услов $x \neq -1$).

2. Како $\measuredangle ABD$ и $\measuredangle CBD$ износе по 60° (због једнакости периферијских углова), закључујемо да је BD симетрала $\measuredangle ABC$, па одатле следи $\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$. Нека је F средиште дужи AC. Тада из претходног имамо $\frac{AE}{EF} = 2$, а како важи и $\frac{DO}{OF} = 2$ (јер је $\triangle ACD$ једнакостраничан), по обратној Талесовој теореми имамо $EO \parallel AD$. Одатле следи $\measuredangle FOE = \measuredangle FDA = 30^\circ$, а онда $\measuredangle DOE = 150^\circ$.



Ок 2019 4А 2

3. За запис свих природних бројева са не више од k бинарних цифара, уколико бројеве записујемо укључујући и водеће нуле (допуњавајући до тачно k цифара), потребно је укупно $2^k k$ цифара, и од тога тачно пола (тј. $2^{k-1}k$) нула и тачно пола јединица; водећих нула на првој позицији слева има укупно 2^{k-1} (после прве водеће нуле надаље може доћи било који одабир цифара 0 и 1 за преосталу $k-1$ позицију), на другој позицији слева има укупно 2^{k-2} (тада су прве две цифре нуле па бирамо остале на 2^{k-2} начина) итд., тј. уколико избришемо водеће нуле преостаје нам укупно

$$2^k k - \sum_{i=1}^{k} 2^{k-i} = 2^k k - (2^k - 1) = 2^k(k-1) + 1$$

искоришћених цифара.

Како се у скупу A налазе сви природни бројеви мањи од 256, за њихов запис потребно је укупно $2^8 \cdot 7 + 1 = 1793$ цифара, и међу њима има тачно $2^7 \cdot 8 = 1024$ јединице. Посматрајмо првих 2019 цифара низа из поставке. У њему су, дакле, бар 1024 јединице. Такође приметимо и да у оквиру низа из поставке можемо пронаћи 2019 узастопних нула (на пример, број 2^{2019} садржи 2019 узастопних нула, а по услову задатка се налази у скупу A). Приметимо да, уколико уочимо произвољан блок од 2019 узастопних цифара посматраног низа, па тај блок померимо за једно место удесно, број јединица у блоку приликом овог поступка може се променити највише за 1. Дакле, како у полазном блоку имамо бар 1024 јединице, а у неком каснијем блоку немамо ниједну јединицу, на основу описаног следи да у неком блоку између ова два мора постојати тачно 1000 јединица.

4. Посматрајмо функцију $g(x) = e^{2019x}f(x)$. Функција $g(x)$ је такође диференцијабилна на $\mathbb{R}$ и има две различите нуле. Из Ролове теореме закључујемо да функција $g'(x)$ има бар једну реалну нулу. Међутим, $g'(x) = e^{2019x}(2019f(x) + f'(x))$, одатле следи да и функција $2019f(x) + f'(x)$ има бар једну реалну нулу.

5. Претпоставимо $\frac{n}{f(n)} = k \in \mathbb{N}$. Нека су a и b прве две цифре слева у s-тоцифреном броју n. Приметимо,

$$(10a+b)10^{s-2} \leqslant n < (10a+b+1)10^{s-2}$$

и

$$(10b+1)10^{s-2} \leqslant f(n) < (10b+a+1)10^{s-2},$$

из чега следи

$$\frac{10a+b}{10b+a+1} < k < \frac{10a+b+1}{10b+a}.$$

Лева неједнакост се своди на $(10-k)a - k < (10k-1)b$ а десна на $(10k-1)b < (10-k)a+1$, тј. заједно имамо

$$(10-k)a - k < (10k-1)b < (10-k)a + 1.$$

Размотримо прво случај $b > 0$. За $k > 4$ имамо $10k-1 > (10-k)9+1$, што је контрадикторно десној неједнакости. Остаје $k \leqslant 4$. Пример за $k = 1$ добијамо рецимо за $n = 11$. За $k = 2$ имамо $8a - 2 < 19b < 8a + 1$, одакле следи $19b \equiv 0, -1 \pmod 8$ и $19b < 8 \cdot 9 + 1 = 73$, а за шта видимо да није могуће; дакле, не можемо конструисати пример за $k = 2$. За $k = 3$ имамо $7a - 3 < 29b < 7a + 1$, одакле следи $29b \equiv 0, -1, -2 \pmod 7$ и $29b < 7 \cdot 9 + 1 = 64$, за шта видимо да није могуће, те ни овде нема решења. За $k = 4$ имамо $6a - 4 < 39b < 6a + 1$, што је могуће само за $b = 1$ и $a = 7$. У том случају, нека је x број који се добија када у броју n са обрисане прве две цифре заменимо све појаве цифара 1 и 7 цифром 0; нека је A број који се добија када, слично, заменимо све појаве цифре 7 цифром 1, а све остале цифре цифром 0; а B број који се добија када све цифре различите од 1 заменимо цифром 0. Можемо записати

$$n = 7 \cdot 10^{s-1} + 10^{s-2} + 7A + B + x \qquad \text{и} \qquad f(n) = 10^{s-1} + 7 \cdot 10^{s-2} + A + 7B + x.$$

Услов $n = 4f(n)$ се своди на $3 \cdot 10^{s-1} + 3A = 27 \cdot 10^{s-2} + 27B + 3x$, што даје $10^{s-1} + A = 9 \cdot 10^{s-2} + 9B + x$, тј. $10^{s-2} + A = 9B + x$. По конструкцији важи $x < 10^{s-2}$, па следи $B > 0$; међутим, тада на позицији прве ненула цифре здесна у броју B на десној страни једнакости имамо цифру 9 а на левој страни цифру 0, контрадикција. Дакле, коначно, ни за $k = 4$ не можемо наћи одговарајуће n.

Сада радимо случај $b = 0$. Из горедобијене неједнакости имамо $10-2k \leqslant (10-k)a-k < 0 < (10-k)a+1 \leqslant 91-9k$, те следи $k \in \{6, 7, 8, 9, 10\}$. За $k = 6, 7, 9, 10$ имамо примере, редом, $n = 108, 105, 405, 10$. Претпоставимо сада $k = 8$. Тада имамо $2a - 8 < 0$, па следи $a \in \{1, 2, 3\}$. Такође важи $s \geqslant 3$, јер за бројеве $\overline{a0}$ важи $\frac{\overline{a0}}{f(\overline{a0})} = \frac{\overline{a0}}{a} = 10$. Дефинишимо сада бројеве x, A и B слично као у претходном пасусу (x добијамо заменом свих појава цифре a цифром 0, A добијамо заменом свих појава цифре a цифром 1 а осталих цифара цифром 0, а B добијамо заменом свих појава цифре 0 цифром 1 а осталих цифара цифром 0; све то у броју n са обрисане прве две цифре). Тада важи $n = a10^{s-1} + aA + x$ и $f(n) = a10^{s-2} + aB + x$, па се услов $n = 8f(n)$ своди на

$$2a10^{s-2} + aA = 8aB + 7x.$$

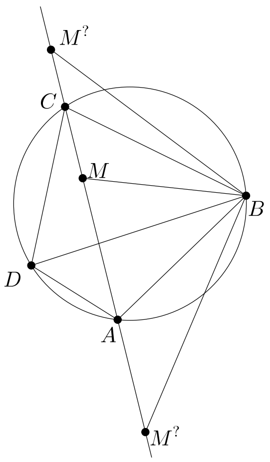
Претпоставимо да се n завршава цифром 0. Тада, по дефиницији бројева x, A и B имамо $10 \mid x, A$ и $10 \nmid B$, али ово је у контрадикцији с горњом једнакошћу (сви сабирци сем $8aB$ су дељиви са 10, а $8aB$ то није јер се B завршава цифром 1 и $a \in \{1, 2, 3\}$). Претпоставимо сада да се n завршава цифром a. Тада имамо $10 \mid x, B$ и $10 \nmid A$, што је опет контрадикција с горњом једнакошћу јер $10 \nmid aA$. Најзад, претпоставимо да се n завршава цифром различитом од 0 и a. Тада имамо $10 \mid A, B$ и $10 \nmid x$, и поново контрадикција. Следи да не постоје решења за $k = 8$.

Према свему, једине вредности израза $\frac{n}{f(n)}$ у скупу природних бројева су: 1, 6, 7, 9 и 10.

Први разред – Б категорија

1. Из четвртог услова (уз први) добијамо да у скупу A могу бити само бројеви 1, 2 и 3. Из трећег услова имамо $3 \notin A$, а из другог $2 \in A$. Даље, из последњег услова имамо $1 \notin B$, а како $1 \in A \cup B$, следи $1 \in A$. Тиме смо једнозначно идентификовали скуп A: $A = \{1, 2\}$. У скупу B морају бити сви бројеви 3, 4, 5 и 6, како би био испуњен први услов. Из другог услова још имамо $2 \notin B$, а из последњег $1 \notin B$. Остаје, дакле, једино могуће $B = \{3, 4, 5, 6\}$.

2. Приметимо, слова `T` и `R` у траженој шифри се јављају по три пута, а сва преостала слова по једном. Дакле, како прво и последње слово морају бити исто, по услову задатка то мора бити једно од слова `T` или `R`. Претпоставимо да шифра почиње и завршава се словом `T`. Тада унутар шифре преостаје укупно 10 слова, међу којима се `R` јавља три пута а преостала слова по једном; дакле, они се могу испермутовати на $\frac{10!}{3!}$ начина, што је и укупан број могућих шифара које почињу и завршавају се са `T`. Уколико шифра почиње словом `R`, рачун је потпуно аналоган, те у том случају добијамо још исто толико могућности. Дакле, укупно постоји $2 \cdot \frac{10!}{3!} = \frac{10!}{3}$ могућности које Бетмен треба да испроба.



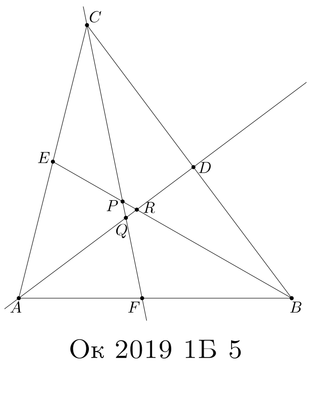
Ок 2019 1Б 3

3. Из тетивности четвороугла $ABCD$ добијамо $\measuredangle ACB = \measuredangle ADB = 50^\circ$ и $\measuredangle CAB = \measuredangle CDB = 60^\circ$. Претпоставимо да је тачка M изван дужи AC. Ако би важио распоред $A{-}C{-}M$, тада би $\measuredangle ACB$ био спољашњи за $\triangle BCM$, па би морало важити $\measuredangle ACB > \measuredangle AMB$, што је немогуће (та два угла износе 50° и 70°, редом). Слично, ако би важио распоред $C{-}A{-}M$, следило би $\measuredangle CAB > \measuredangle AMB$, опет немогуће. Дакле, преостаје једино могућност да је тачка M на дужи AC.

4. Приметимо,

$$10^{2019} - 9991 = 1\underbrace{00\ldots00}_{2019} - 9991 = \underbrace{99\ldots9}_{2015}0009 = 9 \cdot \underbrace{11\ldots1}_{2015}0001.$$

Дакле, да би посматрани број био дељив са 81, довољно је још показати да је број $\underbrace{11\ldots1}_{2015}0001$ дељив са 9. Како његов збир цифара износи $2015 \cdot 1 + 1 = 2016$, што јесте дељиво са 9, следи да је и тај број дељив са 9, чиме је задатак решен.



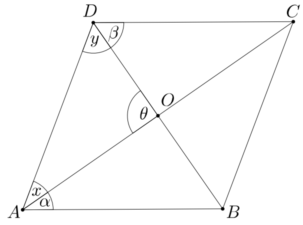
Ок 2019 1Б 5

5. Нека је AD висина, BE тежишна дуж, а CF симетрала угла у оштроуглом $\triangle ABC$. Нека се AD и BE секу у тачки R, AD и CF у тачки Q, а BE и CF у тачки P. Претпоставимо супротно тврђењу задатка, тј. да је $\triangle PQR$ једнакостраничан. Како важи $\measuredangle CQD = 60^\circ$ и $\measuredangle QDC = 90^\circ$, следи $\measuredangle QCD = 30^\circ$. Како је CF симетрала угла, одатле добијамо $\measuredangle QCE = 30^\circ$, а како важи и $\measuredangle CPE = 60^\circ$, следи $\measuredangle PEC = 90^\circ$. Сада уочавамо $\triangle ABE \cong \triangle CBE$ (због $BE \cong BE$, $AE \cong CE$ и $\measuredangle AEB = \measuredangle CEB = 90^\circ$), па је $\triangle ABC$ једнакокрак, а како већ знамо да његов угао код темена C износи 60°, закључујемо да $\triangle ABC$ мора бити једнакостраничан. Међутим, тада се праве AD, BE и CF секу у једној тачки, контрадикција с претпоставком задатка.

Други разред – Б категорија

1. Уведимо смену $x^2 + 3x + 6 = t$. Једначина се своди на $\frac{5x}{t} + \frac{7x}{t+4x} = 1$, тј. $5xt + 20x^2 + 7xt = t^2 + 4tx$ (уз услове $t \neq 0$ и $t + 4x \neq 0$), што је еквивалентно са $t^2 - 8tx - 20x^2 = 0$. Дељењем обе стране са x^2 (уз постављање услова $x^2 \neq 0$) једначина се даље своди на $(\frac{t}{x})^2 - 8\frac{t}{x} - 20 = 0$, па увођењем нове смене $k = \frac{t}{x}$ добијамо $k^2 - 8k - 20 = 0$. Решења ове квадратне једначине су $k_{1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot (-20)}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{8 \pm 12}{2}$, тј. $k_1 = \frac{8+12}{2} = 10$ и $k_2 = \frac{8-12}{2} = -2$. За $k = 10$ после враћања смене имамо $x^2 + 3x + 6 = t = kx = 10x$, тј. $x^2 - 7x + 6 = 0$, чијим решавањем добијамо $x_{1/2} = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2}$, тј. $x_1 = 6$ и $x_2 = 1$. За $k = -2$ после враћања смене имамо $x^2 + 3x + 6 = t = kx = -2x$, тј. $x^2 + 5x + 6 = 0$, чијим решавањем добијамо $x_{3/4} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2}$, тј. $x_3 = -2$ и $x_4 = -3$. Сва четири добијена решења испуњавају услове дефинисаности, па они заиста јесу решења полазне једначине.

2. Означимо $\measuredangle BAC = \alpha$, $\measuredangle BDC = \beta$, $\measuredangle AOD = \theta$, $\measuredangle OAD = x$ и $\measuredangle ODA = y$. Тада имамо и $\measuredangle BCA = \alpha$ (јер је $\triangle ABC$ једнакокрак), а и $\measuredangle DBC = \beta$ (јер је $\triangle BCD$ једнакокрак), као и $\measuredangle BOC = \theta$ (унакрсан са $\measuredangle AOD$). Из $\triangle BOC$ имамо $\theta = 180^\circ - \alpha - \beta$, а из $\triangle AOD$ имамо $\theta = 180^\circ - x - y$, одакле следи $\alpha + \beta = x + y$. Даље, услов задатка се преводи у $2\theta = \alpha + x + \beta + y$, што уз закључак из претходне реченице даје $2\theta = 2(\alpha + \beta)$, тј. $\theta = \alpha + \beta$; сада поново из $\triangle BOC$ добијамо $\theta = 180^\circ - \theta$, тј. $\theta = 90^\circ$. Дакле, дијагонале BD и AC су међусобно нормалне, тј. BO и CO су висине у $\triangle ABC$ и $\triangle BCD$, редом. Како су ови троуглови једнакокраки, њихове висине и тежишне дужи се поклапају, па следи да је O средиште дужи AC и BD. Према томе, у четвороуглу $ABCD$ дијагонале се полове, па је он паралелограм, а како су дијагонале још и међусобно нормалне, тај паралелограм је ромб.



Ок 2019 2Б 2

3. У посматраних 9 боца укупно има 126 децилитара млека, па следи да свака домаћица треба да добије по 3 боце са укупно 42 децилитра млека.

Посматрајмо домаћицу која је добила боцу са 26 децилитара млека. У преостале две боце она има укупно још 16 децилитара, што је могуће само на следећа два начина: $2 + 14$ или $5 + 11$. Претпоставимо најпре да важи први случај. Тада она домаћица која је добила боцу са 23 децилитра у преосталим двема боцама има укупно 19 децилитара млека, што је (од неподељених боца) могуће добити само као $8 + 11$; тада трећој домаћици остају боце са 5, 17 и 20 децилитара млека. Дакле, у овом случају, у зависности од тога која је „прва“, која „друга“, а која „трећа“ домаћица, имамо 6 начина поделе (колико има и пермутација ове три домаћице). Слично, уколико претпоставимо да је прва домаћица добила боце са 5, 11 и 26 децилитара млека, тада видимо да она која је добила боцу са 23 децилитра мора добити још боце са 2 и 17 децилитара, а трећој онда остају боце са 8, 14 и 20 децилитара млека. Дакле, и овде имамо 6 начина поделе (опет у зависности од пермутације домаћица).

Према томе, укупно постоји 12 начина да поделе боце у складу с условима задатка.

4. Подизањем обе стране једначине на трећи степен (користећи идентитет $(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$), добијамо

$$x + 2 + 3\sqrt[3]{x+2}\sqrt[3]{3x+1}(\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{3x+1}) + 3x + 1 = x - 3,$$

тј.

$$3\sqrt[3]{x+2}\sqrt[3]{3x+1}(\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{3x+1}) = -3x - 6.$$

Израз у загради представља поново леву страну полазне једначине, па он мора бити једнак $\sqrt[3]{x-3}$; уврштавањем овога (и дељењем обе стране са 3) долазимо до

$$\sqrt[3]{x+2}\sqrt[3]{3x+1}\sqrt[3]{x-3} = -(x+2).$$

Напоменимо, последња једначина није *еквивалентна* с полазном (само је њена последица); то значи да за свако нађено решење те последње једначине морамо проверити да ли оно заиста задовољава и полазну једначину.

Подизањем обе стране последње једначине на трећи степен добијамо

$$(x+2)(3x+1)(x-3) = -(x+2)^3.$$

Једно решење је очигледно $x = -2$. Директно се проверава да је то заиста решење и полазне једначине (обе стране износе $\sqrt[3]{-5}$). Под претпоставком $x \neq -2$, скраћивањем $x + 2$ са обе стране остаје $(3x+1)(x-3) = -(x+2)^2$, тј. $3x^2 - 9x + x - 3 = -(x^2 + 4x + 4)$, што је еквивалентно са $4x^2 - 4x + 1 = 0$. Решавањем ове квадратне једначине добијамо $x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4}}{8} = \frac{4 \pm 0}{8} = \frac{1}{2}$. Проверимо да ли и ово решење испуњава полазну једначину. На левој страни добијамо $\sqrt[3]{\frac{1}{2} + 2} + \sqrt[3]{3 \cdot \frac{1}{2} + 1} = 2\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$, а на десној страни $\sqrt[3]{\frac{1}{2} - 3} = \sqrt[3]{-\frac{5}{2}}$, па $x = \frac{1}{2}$ *није* решење полазне једначине.

Дакле, једино решење је $x = -2$.

5. Како је број a дељив са 9, и збир његових цифара мора бити дељив са 9, тј. број b је дељив са 9. Одатле, из истог разлога, и број c је дељив са 9, а потом закључујемо да је и број d дељив са 9. Даље, како број a има 2019 цифара, а свака његова цифра може бити највише 9, следи да број b износи највише $2019 \cdot 9 = 18171$. Број c, дакле, износи највише $1 + 8 + 9 + 9 + 9 = 36$ (јер цифре у броју b на четвртој и петој позицији здесна, ако уопште постоје, износе највише 8 и 1, тим редом, док су остале цифре највише 9), а онда број d може бити највише $2 + 9$, тј. највише 11. Дакле, обједињавањем добијених закључака констатујемо да је d број који није већи од 11 а који је дељив са 9; према томе, једина могућност је $d = 9$.

Трећи разред – Б категорија

1. Израчунавамо:

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg} 5+\operatorname{arctg}\frac{2}{3}\right)=\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} 5)+\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\frac{2}{3})}{1-\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} 5)\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\frac{2}{3})}=\frac{\frac{1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 5)}+\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 5)}\cdot\frac{2}{3}}=\frac{\frac{1}{5}+\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}}=\frac{\frac{13}{15}}{\frac{13}{15}}=1.$$

Дакле, како тангенс израза у поставци износи 1, вредност тог израза је $\frac{\pi}{4}$ (тј. реч је о углу од 45°).

2. Очигледно, $p>3$ (јер би у супротном лева страна била мања од десне), па како је p прост број, следи $p\equiv\pm1 \pmod 3$. Одатле имамо $p^2\equiv 1 \pmod 3$. Такође имамо и $2500\equiv 1 \pmod 3$, те уколико постављену једначину трансформишемо у облик

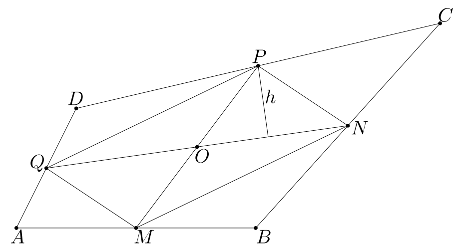
$$p^2-2500=qr,$$

лева стране је дељива са 3, па то мора бити и десна. Како су q и r прости бројеви, један од њих мора бити 3. Претпоставимо, без умањења општости, да је то q. Приметимо $2500=50^2$, па се лева страна може факторисати као разлика квадрата, после чега преостаје $(p-50)(p+50)=qr=3r$. Како је r прост број, имамо само следеће две могућности.

- $p-50=3$, $p+50=r$: Следи $p=53$ и $r=103$, што јесу прости бројеви па имамо једно решење.
- $p-50=1$, $p+50=3r$: Следи $p=51$, што није прост број, те овде немамо решења.

Узимајући у обзир и то да q и r могу заменити улоге, постоје укупно две тројке које задовољавају услове задатка: $(p,q,r)\in\{(53,3,103),(53,103,3)\}$.

3. За леву страну постављене неједначине имамо $x^2-2x+3=(x^2-2x+1)+2=(x-1)^2+2\geqslant 2$, а за десну имамо $\sqrt{4-x^2}\leqslant\sqrt{4}=2$. Дакле, једина могућност је да и лева и десна страна буду једнаке 2. Међутим, из извођења малопре примећујемо да је лева страна једнака 2 само за $x=1$, а десна је једнака 2 само за $x=0$. Дакле, никада не могу обе стране истовремено бити једнаке 2, па постављена неједначина нема решења.



Ок 2019 3Б 4

4. Означимо средишта страница AB, BC, CD, DA са M, N, P, Q, редом, и нека се дужи MP (дужине 2) и NQ (дужине 3) секу у тачки O. Тада су MN, NP, PQ, QM средње линије у $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDA$ и $\triangle DAB$, редом, па важи $P(\triangle MBN)=\frac{1}{4}P(\triangle ABC)$, $P(\triangle NCP)=\frac{1}{4}P(\triangle BCD)$, $P(\triangle PDQ)=\frac{1}{4}P(\triangle CDA)$ и $P(\triangle QAM)=\frac{1}{4}P(\triangle DAB)$. Сабирањем ове четири једнакости добијамо

$$\begin{aligned}P(\triangle MBN)+P(\triangle NCP)+P(\triangle PDQ)+P(\triangle QAM)&=\frac{1}{4}(P(\triangle ABC)+P(\triangle CDA)+P(\triangle BCD)+P(\triangle DAB))\\&=\frac{1}{4}\cdot 2P(ABCD)=\frac{1}{2}P(ABCD).\end{aligned}$$

Одатле следи и $P(MNPQ)=\frac{1}{2}P(ABCD)$. Такође због уочених средњих линија имамо $MN\parallel AC\parallel QP$ и $NP\parallel BD\parallel MQ$, па је $MNPQ$ паралелограм. Нека је h висина повучена из тачке P на дијагоналу NQ. Тада због угла од 45° имамо $h=\frac{PO}{\sqrt2}=\frac{\frac{MP}{2}}{\sqrt2}=\frac{1}{\sqrt2}$ (средњу једнакост добијамо на основу чињенице да се дијагонале паралелограма полове). Одатле израчунавамо $P(MNPQ)=2P(\triangle NPQ)=2\cdot\frac{QN\cdot h}{2}=3\cdot\frac{1}{\sqrt2}=\frac{3}{\sqrt2}$, па коначно и $P(ABCD)=2P(MNPQ)=3\sqrt2$.

5. а) Посматрајмо шестоугао са уписаним бројевима који испуњавају услове задатка. Како нису сви бројеви исти, постоје два суседна темена таква да је у једном од њих уписан број -1 а у другом 1; нека су то A и B, редом, и нека су наредна темена C, D, E и F. Тада у C мора бити 1 (да би производ бројева у A, B и C био -1), па затим у D мора бити -1 (због B, C и D), потом у E мора бити 1 (због C, D и E), и коначно и у F мора бити 1. Према томе, збир износи $-1+1+1+(-1)+1+1=2$.

b) Као у делу под а) налазимо темена A_1 и A_2 у којима су уписани бројеви -1 и 1, редом. Тада у темену A_3 мора бити број 1, па онда у темену A_4 број -1, па у темену A_5 број 1, у A_6 број 1, у A_7 број -1 итд. Примећујемо да се образац понавља, тј. да је у теменима чији индекс даје остатак 1 при дељењу са 3 увек уписан број -1 (другим речима, на сваком трећем темену), а у свим осталим теменима број 1. Према томе, у $\frac{2019}{3}$, тј. 673 темена је уписан број -1, а у преосталих 1346 темена број 1, па збир свих уписаних бројева износи: $673\cdot(-1)+1346\cdot1=673$.

Четврти разред – Б категорија

1. Квадрирајмо обе једнакости дате у поставци и потом их саберимо. Добијамо:

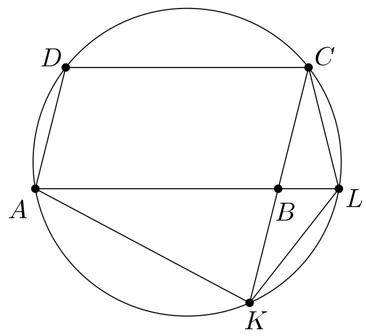
$$\begin{aligned}61 &= (16\sin^2\alpha + 40\sin\alpha\cos\beta + 25\cos^2\beta) + (25\sin^2\beta + 40\sin\beta\cos\alpha + 16\cos^2\alpha)\\ &= 16(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + 25(\sin^2\beta + \cos^2\beta) + 40(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)\\ &= 16 + 25 + 40\sin(\alpha+\beta) = 41 + 40\sin(180^\circ - \gamma) = 41 + 40\sin\gamma.\end{aligned}$$

Одатле имамо $\sin\gamma = \frac{61-41}{40} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$, тј. $\gamma = 30^\circ$ или $\gamma = 150^\circ$. Друга могућност отпада због услова да је $\triangle ABC$ оштроугли, па остаје $\gamma = 30^\circ$.

2. Да би израз у поставци био дефинисан, мора важити $\log_2(\cos\frac{\pi x}{\sqrt{2}}) \geqslant 0$, тј. $\cos\frac{\pi x}{\sqrt{2}} \geqslant 1$. Но како, по дефиницији функције cos, лева страна не може бити већа од 1, остаје $\cos\frac{\pi x}{\sqrt{2}} = 1$, тј. $\frac{\pi x}{\sqrt{2}} = 2k\pi$ за неко $k \in \mathbb{Z}$, те остаје $D = \{2\sqrt{2}k : k \in \mathbb{Z}\}$. Према томе, за $x \in D$, број x^2 може бити $8\cdot 0^2$, $8\cdot 1^2$, $8\cdot 2^2$... Како имамо $8\cdot 15^2 = 1800 < 2019 < 8\cdot 16^2 = 2048$, најмања вредност израза $|2019 - x^2|$ постиже се за $x = 2\sqrt{2}\cdot 16$ и износи $2048 - 2019 = 29$, што јесте прост број.

3. Важи $n^2 + 4n - 15 = n^2 + 4n + 4 - 19 = (n+2)^2 - 19$, па пошто овај број треба да буде дељив са 361 а имамо $361 = 19^2$, следи да је посматрани број дељив и са 19. Онда $19 \mid (n+2)^2$, па пошто је 19 прост број, добијамо и $19^2 \mid (n+2)^2$. Но, тада из овога и $361 \mid (n+2)^2 - 19$ следи $361 \mid 19$, што је очигледна контрадикција. Дакле, такав број не постоји.

4. Пребројмо прво колико максимално може бити таквих бројева чије су цифре у опадајућем поретку. Сваки такав број је једнозначно одређен одабиром пет (различитих) цифара које га сачињавају (након што су цифре одабране, број добијамо њиховим сортирањем у опадајућем поретку), па пошто имамо 10 цифара на располагању, таквих бројева има $\binom{10}{5}$. Пребројмо сада оне бројеве чије су цифре у растућем поретку. Слично као малопре, и сваки такав број је једнозначно одређени одабиром цифара које га сачињавају; притом сада на располагању имамо само 9 цифара од којих можемо бирати 5, јер међу одабраним цифрама не сме бити 0 (ако би била, онда би она, због растућег поретка, морала ићи на почетак телефонског броја, што је забрањено условом задатка). Дакле, у овом случају имамо $\binom{9}{5}$ бројева. Укупан резултат је: $\binom{10}{5} + \binom{9}{5} = 252 + 126 = 378$ телефонских бројева.



Ок 2019 4Б 5

5. Из $CL = CB$ добијамо $\measuredangle CLB = \measuredangle CBL = 180^\circ - \measuredangle ABC = 180^\circ - \measuredangle ADC$, па тачке A, L, C и D леже на истој кружници (због суплементности периферијских углова над истом тетивом с различитих страна). На сличан начин, из $AK = AB$ добијамо $\measuredangle AKB = \measuredangle ABK = 180^\circ - \measuredangle ABC = 180^\circ - \measuredangle ADC$, па и тачке A, K, C и D леже на истој кружници. Дакле, свих пет тачака A, K, L, C и D леже на истој кружници, што је и требало доказати.