ДРУШТВО МАТЕМАТИЧА СРБИЈЕ

АКРЕДИТОВАНИ СЕМИНАР:

345
ДРЖАВНИ СЕМИНАР О НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ И РАЧУНАРСТВА ДРУШТВА МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Компетенција: К1
Приоритети: 3

ТЕМА:

МАТЕМАТИКА- ШТА ЋЕ ТО МЕНИ

РЕАЛИЗАТОРИ СЕМИНАРА:

ЈОВАН КНЕЖЕВИЋ
АЛЕКСАНДРА РАВАС

БЕОГРАД,
09. – 10. 02. 2019.

Како помоћи ученицима да не побегну од математике?

Када је очито да се циљеви не могу достићи,
не мењај циљеве. Прилагоди кораке.

Конфучије

Данашњи тренутак нашег школства је, бар по мени, грчевита борба да зауставимо ерозију која прети да се настава математике сведе на бубање формула и њихову примену без превише размишљања.
Ово предавање представља наш покушај да понудимо наставницима могућност нешто другачијег приступа свакодневној пракси наставе математике, за коју сматрамо да је треба променити јер све информације указују да ово није ерозија, него цунами.
Ево примера из праксе. Писмени задатак дат у гимназији у Београду, на природно-математичком смеру.

1. Решити једначину $\dfrac{2x+1}{6x^2-3x} - \dfrac{2x-1}{14x^2+7x} = -\dfrac{8}{3-12x^2}$.
2. Испитати функцију $y = \dfrac{1}{2}x^2 + x - 4$ и нацртати њен график.
3. Одредити сва решења једначине
$[(2x+1)(x-1)+1]^2 - 2[(2x-1)^2+2x] + 5 = 0$.
4. За које $a \in \mathbb{R}$ су оба решења једначине $(1-x)(2x-a) = 2$
а) негативни бројеви; б) позитивни бројеви.
5. Решити неједначину $\dfrac{2-2x^2}{x^2+x-2} \leq \dfrac{x^2+5x+6}{x^2+x-6}$.

Статистика 17 недовољних, 8 довољних, 3 добре и 2 врло добре оцене. Ученици овог одељења имају допунску наставу од почетка године, два пута недељно када су у поподневној смени. На сваком часу допунске присутно је бар 80% ученика. Мораћемо се сложити да су задаци врло стандардни и да не захтевају ни превелики рад да би се овладало потребним нивоом знања. О узроцима можемо да причамо и причамо, али тешко да можемо да утичемо да се нешто системски промени. Остаје нам да водимо свој „мали рат” у којем ћемо покушати да ученицима приближимо лепоту коју доноси математика.
Због ограниченог времена рад се бави само аритметиком, једначинама и неједначинама, линеарним и квадратним, јер мислим да су то теме које могу да произведу најбољи ефекат по заинтересованост наших ученика. Геометрија је „непозната” земља за наше ученике, али и за многе од наставника.

Почећемо ,,шетњу" од аритметике.
Последњих година су све чешћи случајеви да ученици првог разреда средње школе (за гимназију знам из личног искуства) имају проблема са основним правилима аритметике и алгебре. Промена знака сабирака у загради или разломку када је минус испред, скраћивање сабирака у имениоцу и бројиоцу разломка за ученике који су имали четири или пет у основној школи је до јуче била непостојећа дилема, док данас бар трећина са тим има озбиљан проблем. Једини ,,лек" за ту бољку је да будемо упорни и да што чешће записујемо основне формуле и особине аритметичких операција јер ћете увек наћи бар десетак ученика у одељењу који нису запамтили ни део тих формула и особина.

Основна правила:

комутативност	$a + b = b + a\,;$	$a \cdot b = b \cdot a$
асоцијативност	$a + (b + c) = (a + b) + c\,;$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
дистрибутивност	$ac + bc = (a + b) \cdot c = c \cdot (a + b).$	

Правила за уклањање заграда:

$x + (y) = x + y, \quad x + (-y) = x - y$
$x - (y) = x - y, \quad x - (-y) = x + y$
$x \cdot (-y) = -x \cdot y, \quad (-x) \cdot y = -x \cdot y, \quad (-x) \cdot (-y) = x \cdot y$
$(-1)^n = 1$, n парно; $(-1)^n = -1$, n непарно
$\dfrac{x}{-y} = -\dfrac{x}{y}\,; \quad \dfrac{-x}{y} = -\dfrac{x}{y}\,; \quad \dfrac{-x}{-y} = \dfrac{x}{y}$

Корисне формуле (изузетно су ретки ученици који знају да их примене)

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right)$$

Основне формуле

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc$
$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Идеја овог прилога је да вам понудимо задатке којима ћете размрдати свакодневну рутину и на тај начин учинити часове мало динамичнијим и, можда, занимљивијим вашим ученицима. Идеје за решење не траже превише писања тако да кратким упутством можете усмерити ученике како да реше задатак.

Пример 1: Израчунати: а) $-5^2 + 6\,;$ б) $\dfrac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}\,;$ в) $\sqrt{16 + 9}$

(примери са пријемних за средњу школу и факултет)

Пример 2: Дати су изрази

(i) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7}\right);$

(ii) $(-0,125)^7 \cdot 8^8;$

(iii) $(-11) + (-33) - (-55) - (-66) - (-77) - (-88)$

(iv) $\left(-\frac{75}{13}\right)^2 + \left(\frac{37}{13}\right)^2$

(v) $\left[\left(-\frac{6}{7}\right)^7 + \left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)\cdot\frac{16}{81}\right]\cdot\left(9\frac{246}{247} - 0,666\right)$

Највећи од њих је:
А) (v); Б) (iv); В) (iii); Г)(ii); Д) (i)

Решење: (i) $= 105+70+42+30 = 247$; (ii) $= \left(-\frac{1}{8}\right)^7 \cdot 8^8 = -8$
(iii) $= -11-33+55+66+77+88 = 11\cdot 22 = 242$; (iv) $< 6^2+3^2 = 45$; (v) $< 1\cdot 10 = 10$ □

Примери:

1. Израчунати вредност израза $123456789 \cdot 999999999$.

2. Израчунати вредност израза $\frac{13579}{(-13579)^2 + (-13578)(13580)}$

3. Да ли је тачно да је израз $\frac{83^3+17^3}{83\cdot 66+17^2}$ већи од 100?

4. Израчунати :
а) $2008\cdot 20092009 - 2009\cdot 20082008$; б) $2018\cdot 20192019 - 2019\cdot 20182018$.

5. Вредност израза $\frac{(4\cdot 7+2)(6\cdot 9+2)(8\cdot 11+2)\ldots(100\cdot 103+2)}{(5\cdot 8+2)(7\cdot 10+2)(9\cdot 12+2)\ldots(99\cdot 102+2)}$ се налази у интервалу
А) $(100,250)$; Б) $(250,380)$; В) $(380,495)$; Г) $(495,513)$; Д) $(513,604)$

Решење: Искористимо чињеницу да важи $n(n+3)+2 = n^2+3n+2 = (n+1)(n+2)$.
$\frac{(4\cdot7+2)(6\cdot9+2)(8\cdot11+2)\ldots(100\cdot103+2)}{(5\cdot8+2)(7\cdot10+2)(9\cdot12+2)\ldots(99\cdot102+2)} = \frac{(5\cdot6)(7\cdot8)(9\cdot10)\ldots(101\cdot102)}{(6\cdot7)(8\cdot9(10\cdot11)\ldots(100\cdot101)} = 5\cdot 102 = 510$

□

6. Израчунати вредност израза $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + 2019^2$.

7. Израчунати производ $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\ldots\left(2^{2^{10}}+1\right)+1$.

Решење: Нека је $A = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)\ldots\left(2^{2^{10}}+1\right)+1$.

$$(2-1)A = (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\ldots\left(2^{2^{10}}+1\right)+1$$
$$A = (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)\ldots\left(2^{2^{10}}+1\right)+1 = (2^4-1)(2^4+1)\ldots\left(2^{2^{10}}+1\right)+1$$
$$A = (2^8-1)(2^8+1)\ldots\left(2^{2^{10}}+1\right)+1 = \cdots = \left(2^{2^{10}}-1\right)\left(2^{2^{10}}+1\right)+1$$
$$A = \left(2^{2^{10}}\right)^2 - 1 + 1 = 2^{2^{10}\cdot 2} = 2^{2^{11}} = 2^{2048}$$
□

8. Израчунати вредност израза $\frac{20192018^2}{20192017^2+20192019^2-2}$

9. Израчунати вредност израза:
а) $3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{12} - \frac{1}{30} - \frac{1}{42} - \frac{1}{56}$; б) $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}+\frac{1}{143}$;
в) $\frac{1}{10}+\frac{1}{40}+\frac{1}{88}+\frac{1}{154}+\frac{1}{238}$;

10. Ако је $A = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots \frac{1}{99 \cdot 100}$ и $B = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \cdots + \frac{1}{100}$, доказати да је $A = B$.

11. Доказати да је $\frac{1}{26} + \frac{1}{27} + + \cdots + \frac{1}{100} > \frac{13}{12}$

12. Доказати да је $\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{201^2} < \frac{1}{2}$

13. Израчунати: $\frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+51}$

14. $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2009}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2008}\right) -$
$\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2009}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2008}\right)$

15. $1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{3}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n}{n} + \frac{n-1}{n} \cdots + \frac{1}{n}$

16. Израчунати збир $11 + 192 + 1993 + 19994 + 199995 + 1999996 + 19999997 + 199999998 + 1999999999$.

17. Од 2019 одузети половину, затим одузети трећину преосталог броја, затим четвртину преосталог броја, и тако док не одузмемо једну двехиљададеветнаестину претходно преосталог броја. Који број је остао на крају?

18. Израчунати $\frac{3^2+1}{3^2-1} + \frac{5^2+1}{5^2-1} + \frac{7^2+1}{7^2-1} + \cdots + \frac{99^2+1}{99^2-1}$

19. После упрошћавања, вредност израза
$1 - \frac{2}{1 \cdot (1+2)} - \frac{3}{(1+2)(1+2+3)} - \frac{4}{(1+2+3)(1+2+3+4)} - \dots$
$- \frac{100}{(1+2+\cdots+99)(1+2+\cdots+100)}$ је нескратив разломак. Одредити разлику имениоца и бројиоца.

20. Израчунати збир: $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{100 \cdot 101 \cdot 102}$

21. Израчунати збир: $\frac{1}{1+1^2+1^4} + \frac{2}{1+2^2+2^4} + \frac{3}{1+3^2+3^4} + \cdots + \frac{2019}{1+2019^2+2019^4}$.

22. Израчунати збир: $\frac{1}{4 \cdot 1^4 + 1} + \frac{2}{4 \cdot 2^4 + 1} + \cdots + \frac{2019}{4 \cdot 2019^4 + 1}$.

23. Израчунати збир $\frac{1^2}{1^2 - 10 + 50} + \frac{2^2}{2^2 - 20 + 50} + \cdots + \frac{9^2}{9^2 - 90 + 50}$.

24. Доказати једнакост
$\frac{1}{666} + \frac{1}{667} + \cdots + \frac{1}{1996} = 1 + \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{2}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots + \frac{2}{1994 \cdot 1995 \cdot 1996}$.

Решење: За $n \geq 2$ важи $\frac{2}{(n-1)n(n+1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{3}{n}$. То је „тихи” потез који добија партију тј. та трансформација нам омогућава да упростимо десну страну једнакости.
$1 + \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{2}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots + \frac{2}{1994 \cdot 1995 \cdot 1996} =$
$1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{3}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{3}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{1994} + \frac{1}{1995} + \frac{1}{1996} - \frac{3}{1995}\right) =$
$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{1996} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{665}\right) = \frac{1}{666} + \frac{1}{667} + \cdots + \frac{1}{1996}$

□

25. Нека је : $A = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{1997 \cdot 1998}$,
$B = \frac{1}{1000 \cdot 1998} + \frac{1}{1001 \cdot 1997} + \cdots + \frac{1}{1998 \cdot 1000}$.
Доказати да је $\frac{A}{B}$ цео број.

Решење: $A = \frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{3\cdot4} + \cdots + \frac{1}{1997\cdot1998} = \frac{2-1}{1\cdot2} + \frac{4-3}{3\cdot4} + \cdots + \frac{1998-1997}{1997\cdot1998} =$
$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{1997} - \frac{1}{1998} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{1998} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{1998}\right) =$
$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{1998} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{999}\right) = \frac{1}{1000} + \frac{1}{1001} + \cdots + \frac{1}{1998}$
$B = \frac{1}{1000\cdot1998} + \frac{1}{1001\cdot1997} + \cdots + \frac{1}{1998\cdot1000} =$
$= \frac{1}{2998}\left(\frac{2998}{1000\cdot1998} + \frac{2998}{1001\cdot1997} + \cdots + \frac{2998}{1000\cdot1998}\right) =$
$= \frac{1}{2998}\left(\frac{1000+1998}{1000\cdot1998} + \frac{1001+1997}{1001\cdot1997} + \cdots + \frac{1000+1998}{1000\cdot1998}\right) =$
$= \frac{1}{2998}\left(\frac{1}{1998} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1997} + \frac{1}{1001} + \cdots + \frac{1}{1998} + \frac{1}{1000}\right) =$
$= \frac{1}{2998} \cdot 2\left(\frac{1}{1000} + \frac{1}{1001} + \cdots + \frac{1}{1998}\right) = \frac{1}{1499}\left(\frac{1}{1000} + \frac{1}{1001} + \cdots + \frac{1}{1998}\right)$.
Из претходног следи да је $\frac{A}{B} = 1499$ тј $\frac{A}{B}$ је цео број. □

26. Дато је пет различитих целих бројева a, b, c, d и e таквих да је $(4-a)(4-b)(4-c)(4-d)(4-e) = 12$. Одредити $a+b+c+d+e$.

27. Природан број n при дељењу са 3 даје остатак a, при дељењу са 5 даје остатак b, а при дељењу са 7 даје остатак c. Доказати да је број $70a + 21b + 15c - n$ дељив са 105.

28. Одредити све целе бројеве x за које је израз: а) $\frac{5x+1}{x-1}$; б) $\frac{5x-23}{x-7}$ цео број.

29. Доказати да не постоје реални бројеви a, b, c који задовољавају једнакости $a + b + c = 63$ и $ab + bc + ca = 1996$.

30. Ако је $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$ и $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, доказати да је $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

31. Одредити вредност израза $a^8 + \frac{1}{a^8}$ ако је $a = \sqrt{2} - 1$.

Решење: Ако је $\sqrt{2} + 1$ решење једначине са рационалним коефицијентима, онда је $1 - \sqrt{2}$ такође решење и једначина је облика
$a^2 - (\sqrt{2} + 1 + 1 - \sqrt{2})a + (\sqrt{2} + 1)(1 - \sqrt{2}) = 0$. Стога је $a^2 - 2a - 1 = 0$. Ако једначину поделимо са a добијамо $a - \frac{1}{a} = 2 \Rightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} = 6 \Rightarrow a^4 + \frac{1}{a^4} = 34$ и на крају $a^8 + \frac{1}{a^8} = 1154$. □

Кореновање је ,,згодна" станица да заголицате дечију машту на почетку другог разреда и покажете им да није све у примени ,,силе", већ да постоје суптилнији начини да се изађе на крај са наизглед компликованим изразима.

1. Упростити изразе: а) $\frac{50}{\sqrt[3]{40}}$; б) $\frac{12}{\sqrt[4]{54}}$; в) $\frac{5 - 7\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$; г) $\frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$; д) $\frac{\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$.

2. $5\sqrt{ax^2y^2} - \frac{12}{y}\sqrt{ax^2y^4} + \frac{8}{x}\sqrt{ax^4y^2}$, $a > 0$, $xy \neq 0$;

3. Одредити вредност израза
$$\left(\sqrt{\left(\sqrt{2}-\frac{3}{2}\right)^2}-\sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3}\right)^2+2^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right).$$

4. Упростити израз $\dfrac{y^{\frac{1}{3}}}{2-y^{\frac{1}{3}}}-\left(\dfrac{72-9y}{8}:\left(\left(\dfrac{4+y^{\frac{1}{3}}}{2-y^{\frac{1}{3}}}\right)^3+1\right)\right)^{-\frac{1}{4}}.$

5. Одредити првих 2019 децимала броја $\sqrt{\underbrace{0,99\ldots9}_{2019}}$.

6. Упростити израз $(\sqrt{a+1+2\sqrt{a}}+\sqrt{a+1-2\sqrt{a}}\,)^2$.

7. Дат је број $A=(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}-2)\cdot\sqrt{\sqrt{3}+2}$. Израчунати A^2 и, на основу тога, одредити вредност броја A.

8. Израчунати: $\sqrt{35-12\sqrt{6}}+\sqrt{21-12\sqrt{3}}+\sqrt{57-40\sqrt{2}}$.

9. Доказати да је број $A=\left(\sqrt[6]{9-4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)\cdot\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ цео и наћи његову вредност.

10. Израчунати вредност израза: а) $\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}$; б) $\sqrt{a+b-\sqrt{2ab+b^2}}$.

11. Записати у облику $a+b\sqrt{2}$, где су a и b цели бројеви, следеће изразе:
а) $\sqrt{\sqrt{17-12\sqrt{2}}}$; б) $\sqrt{\sqrt{28-16\sqrt{3}}}$.

12. Ако је $A=\sqrt{5-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\sqrt{3}}-2\sqrt{1+\frac{1}{5}-2\sqrt{\frac{1}{5}}}$, $B=2\sqrt{\frac{19}{20}+\sqrt{\frac{3}{5}}}-\sqrt{\frac{5}{6}-\sqrt{\frac{2}{3}}}-\sqrt{\frac{7}{2}-\sqrt{6}}$, тада је $A=B=\sqrt{\frac{1}{3}}+2\sqrt{\frac{1}{5}}$.

13. Ако је $V=\dfrac{\sqrt{30}+2\sqrt{10}+2\sqrt{3}+7}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ и $W=\dfrac{3+4\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ доказати да је $V=W=\sqrt{6}+\sqrt{5}+\sqrt{2}$.

14. Израчунати вредност израза $\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}$.

15. Рационалисати имениоце разломака:
$\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+4}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$.

16. Доказати да је $\sqrt[3]{1-27\sqrt[3]{26}+9\sqrt[3]{26^2}}+\sqrt[3]{26}$ цео број и одредити га.

17. Упоредити бројеве:
а) $\dfrac{9}{\sqrt{11}-\sqrt{2}}$ и $\dfrac{6}{3-\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{7}+\sqrt{10}$ и $\sqrt{3}+\sqrt{19}$
в) $\sqrt{21}+\sqrt{55}-\sqrt{33}-\sqrt{35}\,\rho\, 0$.

18. Упоредити A и B, где је $A=\sqrt{5}+\sqrt{22+2\sqrt{5}}$ и
$B=\sqrt{11+2\sqrt{29}}+\sqrt{16-2\sqrt{29}+2\sqrt{55-10\sqrt{29}}}$.

19. Доказати неједнакост
$$\frac{1}{3+\sqrt{3}}+\frac{1}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)\sqrt{2n-1}+(2n-1)\sqrt{2n+1}}<\frac{1}{2}.$$

20. Доказати да за сваки природан број важи
$$\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{5}+\frac{\sqrt{12}}{7}+\cdots+\frac{\sqrt{n(n+1)}}{2n+1}<\frac{n}{2}.$$

21. За сваки природан број n дефинишемо
$$f(n)=\frac{4n+\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}.$$
Израчунати збир $f(1)+f(2)+\cdots+f(40)$.

22. За које $n\in\mathbb{N}$ је израз $\dfrac{\sqrt{7}+2\sqrt{n}}{2\sqrt{7}-\sqrt{n}}$ целобројан?

23. Доказати да је
$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2018^2}+\frac{1}{2019^2}}=2019-\frac{1}{2019}$$

24. Одредити 2005-ту цифру броја $\sqrt{a}$, где је a број : $a=0,\underbrace{444\ldots444}_{2005}$.

Решење: Број a можемо записати у другачијем облику
$a=0,\underbrace{444\ldots444}_{2005}=\frac{4}{9}\cdot 0,\underbrace{999\ldots999}_{2005}=\frac{4}{9}\cdot(1-0,\underbrace{000\ldots000}_{2004}1)=\frac{4}{9}\cdot\left(1-\frac{1}{10^{2005}}\right)$.
Искористићемо неједнакост $\left(1-\frac{1}{10^{2005}}\right)^2<\left(1-\frac{1}{10^{2005}}\right)<1$.
Користећи ту неједнакост добијамо,
$\sqrt{a}=\sqrt{\frac{4}{9}\cdot\left(1-\frac{1}{10^{2005}}\right)}=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{\left(1-\frac{1}{10^{2005}}\right)}<\frac{2}{3}<0,\underbrace{666\ldots666}_{2004}7$

$\sqrt{a}=\sqrt{\frac{4}{9}\cdot\left(1-\frac{1}{10^{2005}}\right)}=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{\left(1-\frac{1}{10^{2005}}\right)}>\frac{2}{3}\cdot\sqrt{\left(1-\frac{1}{10^{2005}}\right)^2}=\frac{2}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{10^{2005}}\right)=$
$\frac{2}{3}\cdot 0,\underbrace{999\ldots999}_{2005}=0,\underbrace{666\ldots66}_{2005}$.
Из последње две неједнакости јасно је да су првих 2005 цифара после децималног зареза броја $\sqrt{a}$ једнаке 6.

□

25. Ако је $x=\dfrac{1}{3}\left(\sqrt[3]{\dfrac{23+\sqrt{513}}{4}}+\sqrt[3]{\dfrac{23-\sqrt{513}}{4}}-1\right)$, одредити вредност израза $2x^2+2x^3+1$.

26. Ако је
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{(x-1)^2}},$$
одредити збир $f(1)+f(2)+\cdots+f(2003)$.

Следећа ,,згодна станица” су једначине.

1. Решити једначину $(2x^2-3x-4)^2-(2x^2+5)(2x^2-5)=9-x^2(7+12x)$.

2. Решити једначину $\dfrac{2}{73}=\dfrac{1}{60}+\dfrac{1}{219}+\dfrac{1}{292}+\dfrac{1}{x}$.

3. Решити једначину $2x+1+\frac{1}{x-1}=5x-2+\frac{1}{x-1}$

4. Решити једначину $\left(\frac{2x^2+2x}{2x-3}-x+1\right):\frac{49x^2-42x+9}{6x^2-7x-3}=\frac{11}{15}$.

5. Решити једначину $\frac{5x-34}{x-7}+\frac{3x-26}{x-9}=\frac{5x-24}{x-5}+\frac{3x-32}{x-11}$.

6. Решити једначину $\frac{2}{x-1}-\frac{3}{x+2}=\frac{52}{91x-273}-\frac{11}{7x+28}$.

7. Решити једначину $\frac{3x-1}{x-1}-\frac{2x+5}{x+3}-\frac{4}{3-2x-x^2}=1$.

8. Решити једначину $\dfrac{\dfrac{\dfrac{\frac{5}{6}x+1}{7}+x-5}{11}+x-2}{8}=x-21$.

9. Решити једначину $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{4+\dfrac{3}{x+1}}}}=\frac{16}{37}$.

10. Решити једначину $\frac{x-246}{2257}+\frac{x+12}{1999}=\frac{x+359}{1652}+\frac{x+715}{1296}$.

11. Број позитивних целих бројева који су решење једначине $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}=\frac{13}{12}$ је:
А) 0; Б) 1; В) 2; Г) бесконачно много.

12. Решити једначину $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^8}+\frac{1}{x^{12}}-\frac{4}{x^7}=0$.

13. Ако је $a>0$, одредити најмању вредност функције $f(x)=x^5+\frac{a}{x}$ за $x>0$.

14. Одредити најмању вредност израза $x+\frac{y^2}{9x}+\frac{3z^2}{32y}+\frac{z}{2}$ за позитивне реалне бројеве x,y,z.

15. Одредити целе бројеве a,b,c и d такве да је $\frac{16}{9}=a+\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{c+\frac{1}{d}}}$

16. Одредити за које вредности параметра $m\in\mathbb{R}$ једначина $(m^4-3m^3-7m^2+27m-18)x=m^3-7m+6$ има јединствено решење, нема решења или има бесконачно много решења.

17. Одредити за које вредности параметра $a\in\mathbb{R}$ једначина $a^2(6a-19)x-3a^3+7a=-2a^2-11ax-2-6x$ има јединствено решење, нема решења или има бесконачно много решења.

18. Број вредности параметра $a\in\mathbb{R}$ за које једначина $\frac{9a^2-8}{2x+4}-\frac{4-3a^2}{x-2}=\frac{a(4+3ax)}{x^2-4}$ нема решења једнак је:
А) 5; Б) 1; В) 2; Г) 3; Д) 4.

19. Решити једначину $2|x+6|-|x|+|x-6|=18$.

20. Одредити број решења једначине $|x-3|+|x-1|+|x+2|=a$ у зависности од параметра a.

21. Одредити број решења једначине $|x+a|+x=2$ у зависности од параметра a.

22. Одредити број решења једначине $|4-2|x-3||=|x|+a$ у зависности од параметра a.

23. Једначина $x-a=2|2\sqrt{x^2}-a^2|$ има максималан број решења ако и само ако је:
А) $a<0 \vee a>2$; Б) $a \leq -2 \vee a \geq -\frac{1}{2}$; В) $-2<a<0$; Г) $|a| \leq 1$;
Д) $-2<a<-\frac{1}{2}$.

24. Решити неједначине: а) $\frac{4x^2+4x+1}{x-5} \geq 0$; б) $\frac{(x-1)^2}{2x+3}>0$; в) $\frac{|x-2|}{x} \leq 0$

25. Решити неједначине: а) $|3x-12|>6$; б) $|2x+8|<5$; в) $\left|\frac{1}{2}x-1\right| \leq 3$

26. Решити неједначину $a^3-6a^2-a+30 \geq 0$.

27. Решити неједначину $12x^3+8x^2-13x+3<0$.

28. Решити неједначину $18x^3+45x^2+19x-12 \leq 0$.

29. Решити неједначину $9x^4-12x^3+13x^2-12x+4 \leq 0$.

30. Решити неједначину$(|x|-2)(|x|-3)(|x|+3)|x| \leq 0$.

31. $\frac{4x}{9x^2-4}+\frac{x}{3x+2}+\frac{1}{3x^2-2x} \geq 0$.

32. а) $\frac{2}{|x-3|-1}+\frac{3}{|x-3|+2} \leq 0$; б)$\left|\frac{3|x|+2}{|x|-1}\right|<3$; в) $\left|\frac{3}{4-x}\right|<\left|\frac{6}{1-x}\right|$

33. Решити неједначине:
а)$\left(2a-\frac{10a-9}{2a-1}\right)\cdot\frac{1-2a}{9-4a^2} \leq 0$; б) $\left(1-\frac{3}{x-3}\right):\left(\frac{12}{x^2-3x}-\frac{x}{(3-x)^2}\right) \geq 0$

34. Збир квадрата свих вредности $a \in \mathbb{R}$ таквих да систем неједначина $\begin{cases} -2x+(a+1)y & <9-a, \\ (4-a)x+7y & >a-3 \end{cases}$ нема решења, припада интервалу:
А) систем увек има решење; Б) $[0,15)$; В) $(40,+\infty)$; Г) $[30,40]$;
Д) $[15,30]$.

Квадратна једначина је последњи тренутак који морате искористити да би некако увукли ученике у чаробни свет математике. Ако на овој ,,станици" не ускоче у воз, тешко да ће икада озбиљније загребати по њој. Када почнете са обрадом теме добро би било да спремите већи број једноставних задатака који не траже превише писања, наравно ако се ученици потруде да задатке не решавају употребом ,,бруталне силе". Ако им после таквих кратких вежбица покажете како су могли једноставније да их реше, можда се неки одлуче да промене приступ.
За сам почетак:

1. Решити једначине:
   а) $4x^2-1=0$ б) $3x^2-\frac{1}{3}=0$; в) $\frac{x^2}{5}+5=0$; г) $0,2x^2-125=0$

2. Решити једначине:
   а) $x^2+5x=0$; б) $\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{5}x=0$; в) $x^2=x$; г) $x^2\sqrt{2}-x\sqrt{8}=0$;
   д) $(1-\sqrt{2})x^2+(1+\sqrt{2})x=0$; ђ) $(2-\sqrt{3})x^2-(1+\sqrt{3})x=0$.

3. а) $4(x-3)-(x^2+4x-2)=x^2$; б) $(x+1)(x-3)=3(x-2)+3$;
   в) $(3x-2)^2+12x=4$; г) $(2x-2)(x-2)-(2x-4)(x-3)=0$

4. а) $(x-3)^2-4(x-3)=0$; б) $4(2x-1)^2-2x+1=0$; в) $(6x+4)^2=3x+2$;
   г) $(5x-2)^2=(2-5x)(7x-3)$; д) $49x^2-169=(14x-26)^2$.

5. а) $25x^2+10x=(x+6)^2-1$; б) $144x^2-72x+73=0$

6. Доказати да су решења једначине $x^2-2(\sqrt{3}+1)x+4\sqrt{3}=0$ одређена изразима $x_{1,2}=\sqrt{3+\sqrt{13+\sqrt{48}}}\pm\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}$.

Ево неколико задатака који не изискују превише писања, ако се познаје материја. Ако не, после таквог теста, при објашњавању инсистирајте на детаљима који ће им разјаснити како се овакви задаци раде по ,,мислећој" варијанти.

1. Збир квадрата решења једначине $\frac{x^2}{0,01}+1=0$ једнак је....

2. Једначина чија су решења $0,(2)$ и $\frac{2}{9}$ је....

3. Једно решење једначине $(x^2-1)(a^2-2)=a(x-1), a<0$ једнако је нули. Друго решење је.....

4. Мање решење једначине $\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x}+1=0$ налази се између целих бројева.....

5. Која од једначина $-3x^2-2x+1=0$, $3x^2+2x-1=0$, $3x^2+2x+1=0$, $-3x^2+2x+1=0$ нема реална решења?

6. Ако су решења једначине $ax^2+bx+c=0$ реципрочна онда је c једнако...

7. Квадратна једначина $2x^2+bx+1=0$ има двоструко реално решење ако је...

8. Збир квадрата решења једначине $2x^2-3x+1=0$ једнак је ...

9. Систем једначина $x+y=a$ и $xy=1$ нема реалних решења за a које припада интервалу....

10. Разлика већег и мањег решења једначине $x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}=20$ је...

11. Једнакост $2x^2-3x+1=(ax+b)(x-1)$ је идентитет ако је....

12. Ако је број $\frac{1}{1-\sqrt{2}}$ једно решење квадратне једначине са рационалним коефицијентима, онда једначина гласи ....

Пример теста који треба да покаже ученицима да је брзина само потребан, али не и довољан услов за добро урађен тест. Треба мало промислити пре него почну да ,,ору” по задатку.

1. Решења једначине $\dfrac{2x}{x^2+x+1} - \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{x^2+2}{x^3-1}$ припадају интервалу:
   А) $\left[-1,-\dfrac{1}{2}\right]$; Б) $\left(-1,\dfrac{1}{2}\right]$; В) $\left(-\dfrac{1}{2},1\right]$; Г) $(-1,1)$; Д) $\left(-1,\dfrac{5}{4}\right)$

2. Растојање између решења једначине $14x^2 - 8x - \dfrac{57}{56} = 0$ је:
   А) $\dfrac{3}{14}$; Б) $\dfrac{11}{14}$; В) $\dfrac{5}{14}$; Г) $\dfrac{9}{14}$; Д) $\dfrac{13}{14}$.

3. Ако су x_1 и x_2 решења једначине $x^2 - 4x - 1 = 0$, написати јеначину чија су решења $(x_2-1)^{-1} \cdot x_1$ и $(x_1-1)^{-1} \cdot x_2$.
   А) $4x^2 - 14x - 1 = 0$; Б) $4x^2 + 14x + 1 = 0$; В) $4x^2 + 14x - 1 = 0$;
   Г) $2x^2 + 14x - 1 = 0$; Д) $2x^2 - 14x + 1 = 0$.

4. Збир свих целих бројева који се налазе између решења једначине $x^2 - (\sqrt{98} - \sqrt{2})x - 14 = 0$ је:
   А) 46 ; Б) 44 ; В) -46 ; Г) 45 ; Д) $= 44$.

5. Производ решења једначине $x^4 + (x^2-5)^2 - 17 = 0$ је:
   А) -4 ; Б) 4 ; В) 16 ; Г) -16 ; Д) једначина нема решења.

6. Збир решења једначине $3x^3 - 8x^2 - 8x + 3 = 0$ је:
   А) $-4,(6)$; Б) $= 12$; В) -8 ; Г) 8 ; Д) $2.(6)$.

7. Служећи се графичком методом, одредити број решења једначине $|x^2-4| + |x-1| = 2$.
   А) 0 ; Б) 1 ; В) 2 ; Г) 3 ; Д) 4

Ови задаци би требало да одуче ученике од просте примене ,,снаге” приликом решавања

1. Решити једначину $18x^4 - 3x^3 - 25x^2 + 2x + 8 = 0$.
2. а) $8x^3 - 36x^2 + 54x = 370$; б) $6x^3 - x^2 - 20x + 12 = 0$.
3. $(x^2+27)^2 - 5(x^2+27)(x^2+3) + 6(x^2+3)^2 = 0$.
4. $x^4 + 1 = 2(x+1)^4$.
5. $(x^2-4x+6)^2 - 4(x^2-4x+6) + 6 = x$.
6. $(x^2-2x-5)(x^2+3x+2)(x^2-7x+12) = 0$.
7. $\left(\dfrac{4x^2-2x-9}{2x}\right)^2 - \dfrac{15}{2} = \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{9-4x}{4x}\right)$.
8. $(6x+7)^2(3x+4)(x+1) = 6$.
9. Решити једначину $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(x+2)^2} = \dfrac{10}{9}$.
10. Решити једначину $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x-1)^2} = 1$.

11. Решити једначине:
а) $\dfrac{2x}{2x^2-5x+3}+\dfrac{13x}{2x^2+x+3}=6$;
б) $\dfrac{3x^2-1}{x}+\dfrac{5x}{3x^2-x-1}=\dfrac{119}{18}$.

12. Решити једначину $4x^2-4x-3=4\left\lfloor\dfrac{2x-1}{2}\right\rfloor$.

13. Решења квадратне једначине $x^2+px+q=0$, при чему је $p+q=1996$, су цели бројеви. Одредити решења.

14. Нека су $a,b,c\in\mathbb{Z}$ и $a\neq 0$. Одредити коефицијенте у квадратној једначини тако да јој дискриминанта буде једнака 51.

15. За које вредности параметра $a\in\mathbb{R}$ једначина $(2a+1)x^2-ax+a-2=0$ има два реална корена од којих је један већи од јединице, а други мањи од јединице.

16. Једначина $(a+1)x^2-(a^2+a+6)x+6a=0,\ a\in\mathbb{R}$ има тачно једно решење у интервалу $(0,1)$ ако и само ако је:
А) $0<a<1\vee a>5$; Б) $a<0\vee 1<a<5$; В) $a<0\vee a>5$; Г) $a<0$; Д) $0<a<1$.

17. Нека је x_1 веће решење једначине

$$x^2+2(a-b-3)x+a-b-3=0.$$

Коју највећу вредност може имати x_1, ако је $a\geq 2, b\leq 1$?

18. Нацртати график функције $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}$.

19. Нацртати график функције $f(x)=x\cdot|x|-\dfrac{|x|}{x}+1$.

20. Нацртати график функције $f(x)=|x^2-6x+8|+|x^2-6x+5|$.

21. Нацртати график функције $f(x)=x^2-\lfloor x\rfloor$.

22. За функцију $f(x)=ax^2+bx+c$ важи $f(1+x)=f(1-x)$ за свако реално x. Једна нула функције је $x=-\dfrac{1}{2}$, а највећа вредност функције износи 1. Нацртати график и испитати функцију.

23. Нацртати график квадратне функције ако је $f(-3)+4f(0)=0$ и функција достиже минималну вредност -2 за 1. Израчунати $f(1+\sqrt{5})$

24. Одредити квадратну функцију $f(x)=ax^2+bx+c$, ако важи $f\left(-\dfrac{7}{4}\right)=f\left(\dfrac{1}{4}\right)$ и $f(0)=\dfrac{55}{32}$ и максимална вредност функције једнака је 2.

25. Дат је скуп функција $f(x)=kx^2-(k+2)x-2k+6$, $k\in\mathbb{R}$. Доказати да графици ових функција пролазе кроз две сталне тачке и одредити их.

26. Наћи све целе бројеве x за које је израз $y = -6x^2 + 167x + 4823$:
а) прост број; б) што већи природан број; в) што мањи природан број.

Решење: $y = -(3x+53)(2x-91) = -6\left(x - \dfrac{167}{12}\right)^2 + \dfrac{143641}{24}$
а) Да би y био прост број, мора један од фактора да буде једнак један. У том случају је $x \in \{-\frac{52}{3}, 45, -18, 46\}$. Прва вредност за x није цео број, а кад остале заменимо , добијамо да је $y \in \{188, -191, -127\}$. Стога, не постоји x такав да је y прост број.
б) Из канонског облика функције видимо да функција достиже максималну вредност за $x = \frac{167}{12}$. Тражени цео број за који би y био највећи природни број је 13 или 14 јер $\left(13 < \frac{167}{12} < 14\right)$, за које је $y = 5980$ односно $y = 5985$. Стога, за $x = 14$ је y највећи могући природан број.
в) Вредност функције може бити природан број за $x \in \left(-\frac{53}{3}, \frac{91}{2}\right)$ јер је ту функција позитивна. Најближи цео број x са десне стране броја $-\frac{53}{3}$ је -17, а најближи цео број са леве стране броја $\frac{91}{2}$ је 45. За ове бројеве вредности функције су 250 односно 188. Стога, за $x = 45$ вредност функције је најмањи природан број.

$\square$

27. Број $\sqrt{2}-1$ је нула функције $f(x) = ax^2+bx+c$, чији су коефицијенти рационални бројеви. Највећа вредност функције је 2.
а) Одредити тај полином и скицирати график;
б) За које реалне бројеве x важи $f(x) > -2$?

28. Бројеви $x, y, a \in \mathbb{R}$ су такви да је $x+y = 2a-1$ и $x^2+y^2 = a^2+2a-3$. За које вредности параметра a ће производ xy добити најмању вредност?

29. Нека су $a, b, c \in \mathbb{R}$ такви да једначине $ax^2+bx+c = 0$ и $-ax^2+bx+c = 0$ имају реална решења. Ако је r било које решење, а s било које решење друге једначине $s > r$, доказати да интервал $[r, s]$ садржи бар једно решење једначине $\dfrac{a}{2}x^2 + bx + c = 0$.

30. Дата су три тврђења:
а) једначина $x + \dfrac{1}{x} = a$ нема реалних корена;
б) важи једнакост $\sqrt{a^2 - 4a + 4} = 2 - a$;
в) систем $x + y^2 = a$ и $x - \sin^2 y = -3$ има јединствено решење.
За које вредности параметра a су два од тих тврђења тачна, а једно није.

31. Збир пет реалних бројева је 8, а збир њихових квадрата 16. Одредити највећу могућу вредност сваког од тих бројева.

Решење: Нека су то бројеви $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$. Тада је $a+b+c+d+e = 8$ и $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 = 16$. Искористићемо формулу за однос квадратне и аритметичке средине тј. $\sqrt[4]{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} \geq \frac{a+b+c+d}{4}$ (једнакост важи само у случају да су сабирци једнаки). Стога је $\sqrt{\frac{16-e^2}{4}} \geq \frac{8-e}{4} \Leftrightarrow 5e^2 - 16e \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq e \leq \frac{16}{5}$.
Дакле важи $e_{max} = \frac{16}{5}$. Аналогно важи и за остале бројеве. $\square$

Литература

1. Mea Bombardelli, Željko Hanjš, Sanja Varošanec, Matematička natjecanja 1995/96. Елемент. Загреб 1997.

2. Припремни задаци за математичка такмичења ученика шестог разреда, Материјали за младе математичаре Београд 2013.

3. Xu Jiagu, Lecture Notes on Mathematical Olympiad Courses For Junior Section, Vol.1 World Scientific

4. Ђорђе Баралић, 300 припремних задатака за јуниорске математичке олимпијаде Искуство Србије

5. Тангента, часопис за математику и рачунарство Друштва математичара Србије

6. Neven Elezović i Branimir Dakić, Matematika 2, udžbenik i zbirka zadataka za drugi razred gimnazije, Element, Zagreb 2004

7. А.Г.Цыпкин, Пинскии Справочник по методам решени задач по математике, Москва. Наука. 1989