ДРУШТВО МАТЕМАТИЧА СРБИЈЕ

АКРЕДИТОВАНИ СЕМИНАР:

345
ДРЖАВНИ СЕМИНАР О НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ И РАЧУНАРСТВА ДРУШТВА МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Компетенција: К1
Приоритети: 3

ТЕМА:

МАТЕМАТИКА НА ШАХОВСКОЈ ТАБЛИ

РЕАЛИЗАТОР СЕМИНАРА:

др МИЛАН ЖИВАНОВИЋ

БЕОГРАД,
09. – 10. 02. 2019.

Увод

Математика и шах имају много тога заједничког. Форме мишљења математичара и шахисте су веома блиске те није чудно што су математичари имали прилично доста успеха на шаховским такмичењима. Бивши светски прваци у шаху Ласкер и Еве су били професионални математичари, а Таљ и Карпов су у младости показивали изузетне математичке способности. Врхунски математичари Ојлер и Гаус су се бавили комбинаторним проблемима са шаховским фигурама. Први путањама скакача а други распоредом дама на шаховској табли.

Баш као што се шаховска партија одвија у складу са правилима игре, не остављајући никакве сумње о томе који је потез могућ а који не, тако се математичка теорија развија на основу њених "правила игре" - аксиома и правила закључивања; као шаховски потез, сваки корак математичког доказа мора бити дозвољен правилима. Решавање шаховог проблема је као доказ математичке теореме: читава шаховска игра се у потпуности уклапа у оквир математике, представљајући неку врсту сложеног „рачуна“. Својом природом математички проблеми на шаховској табли залазе у различите математичке дисциплине. Ти проблеми су у почетку били најчешће комбинаторног, аритметичког или геометријског типа. Касније се решавању шаховске проблематике прилази и са позиција теорије графова и кибернетике.

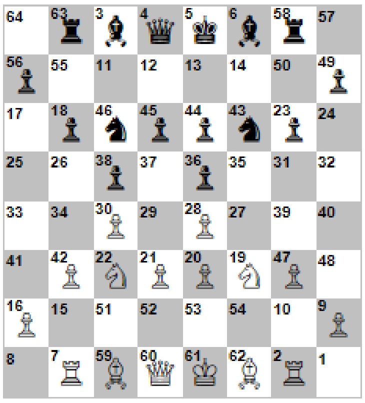
На овом семинару ћемо анализирати следеће теме: Чувени математички проблеми на шаховској табли, Аритметика шаховске табле, Геометрија шаховске табле, Комбинаторни проблеми на шаховској табли и Задаци о шаховским турнирима. Избор задатака ће по тежини ићи од елементарних до задатака такмичарског типа, а по узрасту намењен ученицима основних или средњих школа. Неки од тих проблема ће бити моделовани у геогебри и постављени на глобалну мрежу тако да ће бити широко доступни за ученике и њихове професоре. У овом тексту представљени су изводи садржаја семинара.

Чувени математички проблеми на шаховској табли

Почећемо са опште познатом легендом о настанку шаха. Када је персијски шах (у неким верзијама индијски цар) био упознат са игром био је одушевљен њеном логичком захтевношћу и комбинаторним могућностима. У знак захвалности мудрацу који је изумео игру је обећао да испуни било коју жељу. Био је јако изненађен мудрачевом скромношћу да награда буде у изражена у броју зрна пшенице које треба да постави на шаховску таблу. Мудрац је тражио да му шах на прво поље табле постави једно зрно, на друго два, на треће 4 и тако даље редом на свако ново поље два пута више зрна у односу на претходно поље. Већ следећег дана дворски научници су саопштили шаху да је ту награду немогуће испунити. Потребан број зрна за награду је $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{63} = 2^{64} - 1$. То је фантастично велики број који се записује помоћу 20 цифара. За складиштење тог броја пшеничних зрна био би потребан амбар основе 4×20 метара од површине Земље до Сунца.

У 19. веку енглески математичар Кесон је поставио хипотезу да је шах настао из магичних квадрата. Ту идеју разрађује руски математичар Рудин у својој књизи *От магичсекого квадрата к шахматам* (1969.). Број различитих нееквивалентних магичних квадрата се израчунава се помоћу рачунски машина. Таквих квадрата реда 4 има 880, а реда 5 чак 275 305 224 (резултат добијен 1973).

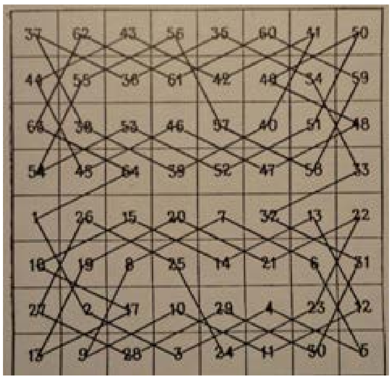
На једном магичном квадрату на шаховској табли после 12 симетричних потеза: 1. d2-d3 d7-d6, 2. e2-e3 e7-e6, 3. b2-b3 b7-b6, 4. g2-g3 g7-g6, 5. c2-c3 c7-c6, 6. f2-f3 f7-f6, 7. c3-c4 c6-c5, 8. f3-f4 f6-f5, 9. Кb1-c3 Кb8-c6, 10. Кg1-f3 Кg8-f6, 11. Лa1-b1 Лa8-b8, 12. Лh1-g1 Лh8-g8 добија се позиција као на слици 1.



Слика 1.

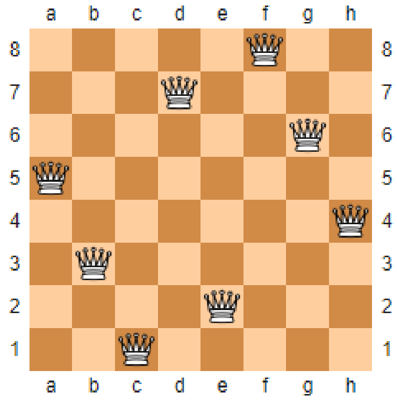
Занимљиво је да збир бројева на пољима на којима су биле фигуре које учествују у прва два потеза даје каратеристичан збир 260 магичног квадрата реда 8. Чак шта више то важи и за поља у сваком следећем пару потеза. Магични квадрати се добијају и у неким другим конфигурацијама фигура на шаховској табли.

Проблемом проналажења путања којим скакач треба да пређе целу шаховску таблу бавио се Ојлер. Он је и дао једну методу за проналажење таквих путања. Најпре су пронађене отворене путање скакача, а касније и затворене у којима се скакач са последњег поља у следећем потезу може вратити на полазно. Тачан број свих решења овог проблема није одређен. За изналажење путања врло је важно Варнсдорфово правило: *У маршрути на шаховској табли скакач поставити на поље са кога може прећи на минималан број преосталих слободних поља. Уколико је таквих поља више скакача је могуће поставити на било које од њих*. Дуго се сматрало да је правило истинито. Тек су рачунске машине дошле до резултата да други услов није увек ефективан. Односно да сва поља са којих се може прећи на исти број слободних поља нису равноправна и да се у неким изборима може доћи у ћорсокак. Ипак у пракси је такав случај веома мало вероватан тако да се правило и даље користи. На слици 2. је једно Ојлерово решење проблема скакачеве маршуте на шаховској табли.



Слика 2.

Задатак де се одреди број разлилитих начина да се на шаховској табли распореди 8 дама, а да се међусобно не туку први је поставио 1848. баварски шаховски мајстор Марк Бецел у берлинским шаховским новинама. Проблем је касније постао познат под називом *проблем 8 дама*, а био је интересантан и Гаусу који је веома брзо нашао 72 решење. Због тога се често погрешно тврди да је он први нашао опште решење проблема. Још 20 укупно 92 различитих решења објавио је стоматолог Франц Наук у лајпцишком *Illustrirten Zeitung* 1850. године. Доказ да су бројем 92 исцрпљни сви могући различити распореди објавио је тек 1874 године енглески математичар Глејшер. Касније је доказано да су при симетријама и ротацијама неки од ових распореда подударни те да је број различитих распореда који се не могу добити ротацијама и симетријама из других једнак 12. На слици 3. је један од тих распореда.



Слика 3.

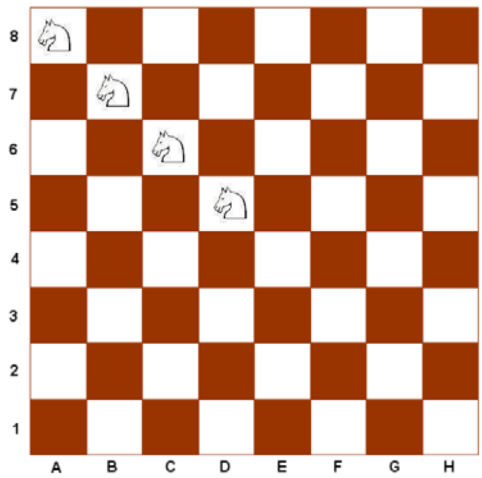
Аритметика на шаховској табли

Не постоји општа сагласност о односу вредности (моћи) шаховских фигура. То поготову стога што та вредност није константна ни за једну фигуру ни у току једне партије, јер зависи и од тренутне позиције и распореда осталих фигура. Ипак, овде ћемо изложити један пример израчунавања аритметичке вредности фигура. У проблематику овог типа спада и израчунавање рејтинга играча па ће на семинару бити речи и о томе. А задаци из те области могу побудити интересовање ученика.

Геометрија на шаховској табли

Сама шаховска табла својим обликом и поделом на поља поседује неке геометријске особине. Најпре ће бити показан један визуелни доказ Питагорине теореме на шаховској табли а затим ће бити представљено неколико задатака из тематика:

- Координате и симетрије на шаховској табли
- Поплочавања шаховске табле
- Деобе шаховске табле са фигурама

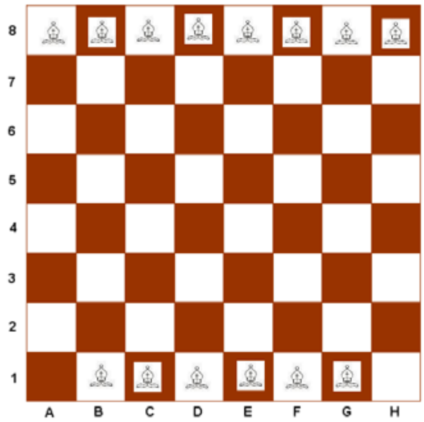


Слика 4.

Пример. Шаховску таблу са слике 4. поделити на 4 подударна дела тако да у сваком делу буде по један скакач.

Комбинаторни задаци на шаховској табли

Најбројнији задаци комбинаторног типа на шаховској табли су они о распоредима фигура. Често ти распореди треба да задовоље и неке специјалне услове. Један од додатних услова је да се фигуре поставе на таблу тако да не туку једна другу. Задатке тог типа називамо *проблемима независности фигура*, а о најпознатијем из њих проблему 8 дама већ је било речи. Овде ће бити решени неки од проблема независних распореда топова, ловаца и скакача на шаховској табли. Такође ће бити решени и још неки занимљиви комбинаторни проблеми.



Слика 5. Четрнаест независних ловаца на шаховској табли

Задаци о шаховским турнирима

Међу задацима о шаху посебно место заузимају они о шаховским турнирима. То су задаци нестандардног типа за чије решавање је потребно познавати структуру такмичења. У шаху као и удругим спортским надметањима постоје два основна типа њихове организације.

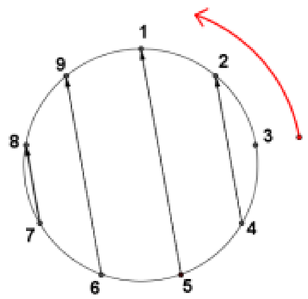
Елиминаторни систем такмичења се по правилу користи када у њему учествује велики број играча, а време и простор не дозвољавају могућност дуела сваког такмичара (екипе) против свих осталих. У том случају се одреде супарнички парови и победници остају у игри док се поражени искључују из даљег такмичења. Такав поступак се понавља све док се не дође до финалног дуела чији се победник сматра победником такмичења.

Кружни систем такмичења је праведнији јер претпоставља дуеле сваког учесника са сваким. Систем се назива још и Бергеров по аустријском шахисти Јохану Бергеру, који је за овај вид такмичења изградио таблице распореда мечева шаховских турнира у зависности од броја играча. Пре почетка такмичења жребом се одређују стартни бројеви такмичара. У случају непарног броја играча, Бергерове таблице су истоветне таблицама са првим већим парним бројем играча. При томе у сваком колу слободан је такмичар који за противника добија непостојећег такмичара са највећим редним бројем. Такмичење се при овом систему може организовати као једнокружно, двокружно или вишекружно. На слици 6. је дата Бергерова таблица за једнокружно такмичење од 9 или 10 играча нумерисаних бројевима од 1 до 10.

Коло					
1	1:10	2:9	3:8	4:7	5:6
2	10:6	7:5	8:4	9:3	1:2
3	2:10	3:1	4:9	5:8	6:7
4	10:7	8:6	9:5	1:4	2:3
5	3:10	4:2	5:1	6:9	7:8
6	10:8	9:7	1:6	2:5	3:4
7	4:10	5:3	6:2	7:1	8:9
8	10:9	1:8	2:7	3:6	4:5
9	5:10	6:4	7:3	8:2	9:1

Слика 6. Бергерова таблица за једнокружно такмичење од 9 или 10 играча

Одређивање парова по колима у такмичењу кружним системом најједноставније је тзв. графичком методом коју је осмислио наш шахиста Драгутин Ђаја. Конструише се најпре круг а затим се изван њега опишу бројеви кола правилно распоређени у смеру казаљке на сату. Дуел парови за задати редни број кола се добијају тако што се број 1 спаја линијом са бројем одговарајућег кола. Остали парови се добијају тако што се линијама паралелним овако конструисаној линији спајају остали бројеви. Овом конструкцијом један број остаје без пара. У случају парног броја учесника играч са тим редним бројем игра против играча са највећим редним бројем или је слободан уколико је број играча непаран. Изузетак је прво коло у којем играч са редним бројем кола игра са играчем са последњим редним бројем, ако је број играча паран, или је слободан ако је број играча непаран. За одређивање такмичара са првенством првог потеза конструишу се стрелице на овако добијеним линијама идући по кругу у смеру супротном од кретања казаљке на сату почев од броја који на кругу нема свог пара (Слика 7.)



Слика 7. Графички метод одређивање парова у 5. колу кружног такмичења при 9 или 10 играча.

Задаци

1. На шаховски турнир пријавили су се такмичари из p држава и то респективно из сваке $n_1, n_2, \ldots, n_p$ велемајстора. Такмичење је по куп систему одиграно у свакој држави за играче из те дежаве, а онда су победници наставили турнир по истом систему до финалног дуела и укупног победника. У сваком дуелу је играна по једна партија, а ако је завршена ремијем победником се сматрао играч који је играо црним фигурама. Колико је укупно партија одиграно?
2. Одредити парове седмог кола на шаховском турниру од 12 играча по једнокружном систему такмичења.

3. Гојко, Марко, Петар и Саша одиграли су једнокружни шаховски турнир. У табели је дат број победа (П), ремија (Р) и пораза (И) за сваког играча. Попунити празна поља табеле.

	Гојко	Марко	Петар	Саша	П	Р	И
Гојко						2	
Марко						1	
Петар					3		
Саша							1

4. Докажите да је у кружном систему у сваком тренутку број играча који су одиграли непаран број партија ремијем паран.
5. Ако су у једнокружном шаховском турниру свака два играча освојили различит број бодова и није било ремија онда је првопласирани такмичар победио све остале, другопласирани све осим првог, ..., а последње пласирани изгубио све мечеве.
6. Шахиста је на турниру одиграо 20 партија и освојио 12,5 поена. Колико више победа од пораза је остварио на том турниру?
7. На турниру са парним бројем играча играном по кружном систему одиграно је 55 партија. Један учесник је напустио такмичење одмах после првог кола, а дуги после десетог. Да ли су та двојица одиграла партију међусобно ?
8. На турниру је учествовало n шахиста. Неки од њих су били велемајстори, а неки мајстори. На крају турнира се испоставило да је сваки играч половину својих бодова освојио у партијама са мајсторима. Доказати да је $\sqrt{n}$ природан број.
9. Број дечака на једнокружном шаховском турниру је 3 пута већи од броја девојчица. Ремија није било а збир бодова које су освојили дечаци једнак је збиру бодова које су освојиле девојчице. Да ли је прво место освојио дечак или девојчица?
10. На једнокружном шаховском турниру учествовало је 20 играча. Да ли је могуће да сваки играч има победа колико и ремија?
11. Шаховски турнир је одигран двокружно, тј сваки играч је са сваким одиграо по две партије. Три најбоље пласирана играча су освојили 24 поена, што је половина поена које су преостали шахисти освојили укупно. Колико је било учесника на турниру?
12. Шест дечака и четири девојчице одиграли су шаховски турнир по кружном систему. Девојчице су скупа освојиле 20 бодова. Да ли су дечаци освојли више бодова у партијама против девојчица или девојчице у партијама против дечака и за колико?
13. На шаховском турниру су учествовали ученици птвог разреда средње школе и два ученика осмог разреда основне школе. Два основца су освојила укупно 3,5 бодова а сви средњошколци су освојили једнак број бодова. Колико је средњошколаца учествовало на турниру?
14. Неколико дечака и девојчица је учествовало на шаховском турниру. Девојчице су освојиле укупно 13 поена а сваки од дечака којих је било 3 пута више освојио је исти број поена. Колико је било учесника на турниру?