ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

АКРЕДИТОВАНИ ПРОГРАМ:

345.
ДРЖАВНИ СЕМИНАР О НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ И РАЧУНАРСТВА ДРУШТВА МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Компетенција: К1
Приоритети: 3

ТЕМА:

ГЕОМЕТРИЈСКЕ НЕЈЕДНАКОСТИ

РЕАЛИЗАТОРИ СЕМИНАРА:

др ВОЈИСЛАВ АНДРИЋ,
ИВАНКА ТОМИЋ

БЕОГРАД,
09. – 10. 02. 2019.

САДРЖАЈ:

1. Увод 3
2. Геометријске неједнакости везане за троугао..... 3
3. Геометријске неједнакости везане за четвороугао 7
4. Геометријске неједнакости везане за многоугао 8
5. Геометријске неједнакости везане за круг 8
6. Стереометријске неједнакости 8
7. Примена геометријских неједнакости у решавању екстремалних проблема 9
8. Изопериметријски проблеми 10
9. Геометријске неједнакости Михаила Петровића 10
10. Литература 13
11. Прилог: Владимир Јанковић „Изопериметријски проблем“ 14

др Војислав Андрић, Ваљевска гимназија - Ваљево
Иванка Томић, професор Ваљевске гимназије - Ваљево

ГЕОМЕТРИЈСКЕ НЕЈЕДНАКОСТИ

Геометријске неједнакости су сигурно једна од важних и веома занимљивих тема наставе математике у нашим основним и средњима школама, како у редовној тако и у додатној настави математике.

Циљ овог саоштења је да кроз разноврсне примере, прегледом могућих геометријских неједнакости од шестог разреда основне школе, па све до завршетка средњошколског образовања укаже на значај геометријских неједнакости и широке могућности примене наставних садржаја у извођењу и доказивању геометријских неједнакости, као и њихове многобројне примене. Примери којима се илуструје материја су разних сложености од оних најелементарнијих и директних примена неједнакости троугла до најсложенијих примера ч

Излагањем ће бити обухваћени садржаји везани за геометријске неједнакости троугла, геометријске неједнакости четвороугла, геометријске неједнакости везане за многоугао и круг. Биће речи и о примени геометријских неједнакости у решавању екстремалних проблема, са посебним освртом на изопериметријске проблеме.[1]

Један део излагања биће посвећен и неједнакости Михаила Петровића за конвексне функције и њеним применама на извођење одређених геометријских неједнакости, са посебним освртом на неједнакости троугла.

А) НЕЈЕДНАКОСТИ ВЕЗАНЕ ЗА ТРОУГАО

Геометријске неједнакости су наставна материја са којом се ученици први пут сусрећу у шестом разреду основне школе када се ученици упознају са тврђењима везаним за збир углова у троуглу и првим геометријским неједнакостима: наспрам веће странице троугла налази се већи угао (и обрнуто) и збир ма које две странице троугла увек је већи од треће странице троугла.

Питања са којима се неминовно сусрећемо у дидактичко-методичкој трансформацији садржаја везаних за геометријске неједнакости у редовној и додатној настави математике су:

- Како изгледа методички низ којим уводимо геометријске неједнакости у настави математике уопште?
- Које садржаје везане за геометријске неједнакости изложити у форми дато тврђење → доказ, а које у форми мали математички експеримент → самостална формулација тврђења?

[1] Као прилог излагању додајемо и текст др Владимира Јанковића „Изопериметријски проблем“, Тангента број 1, Нови Сад, 1995, који представља веома добар пример примене геометријских неједнакости.

- Који садржаји о геометријским једнакостима су погодни за редовну наставу математике?
- Шта је граница, тј. када престају садржаји о геометријским неједнакостима везани за редовну наставу математике и почињу садржаји додатне наставе?

*

1. У сваком троуглу један угао троугла је мањи или једнак 60°, а један угао троугла је већи од 60°. Доказати. *
2. Ако су a, b и c мерни бројеви страница троугла, а h_a, h_b и h_c мерни бројеви одговарајућих висина троугла онда је $a + b + c > h_a, + h_b + h_c$. Доказати. *
3. Ако је R полупречник описаног круга, доказати да је обим троугла увек мањи од $6R$. *
4. Ако је S центар круга уписаног у троугао, онда је AS + BS + CS веће од полуобима троугла. Доказати. *
5. Ако је M тачка у унутрашњој области троугла ABC, онда је AM + BM < AC + BC. Доказати. *
6. Ако су a, b и c мерни бројеви страница троугла, а t_a, t_b и t_c мерни бројеви одговарајућих тежишних дужи троугла, онда је збир тежишних дужи троугла већи од три четвртине обима, а мањи од три половине обима троугла. Доказати. *
7. Ако су t_a и t_b тежишне дужи које одговарају катетама a и b правоуглог троугла доказати да важи $\frac{1}{2} < \frac{t_a}{t_b} < 2$.
8. Неједнакост $a^4 + b^4 + c^4 < 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$ је потребан и довољан услов да се може конструисати троугао чији су a, b и c мерни бројеви страница.
9. Доказати да за правоугли троугао важи неједнакост $R + r \geq \sqrt{2P}$, где је R полупречник описаног, r полупречник уписаног круга а P површина троугла.

Решење: Како је $R = \frac{c}{2}$ и $r = \frac{a+b-c}{2}$, (a,b - катете, c - хипотенуза) то је

$r + R = \frac{c}{2} + \frac{a+b-c}{2} = \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} = \sqrt{2P}$.

Једнакост важи за једнакокрако правоугли троугао.

10. У правоуглом троуглу важи $c + h > a + b$, где су a и b катете, c хипотенуза и h хипотенузина висина. Доказати.
11. Ако су a, b и c дужине страница правоуглог троугла (c је хипотенуза) доказати да важи $a + b \leq c\sqrt{2}$.
12. Доказати неједнакост $P > 2\sqrt{R \cdot r^3}$, где је P површина, R полупречник описаног, r полупречник уписаног круга троугла.

Решење: У сваком троуглу је $h_a > 2r$,$h_b > 2r$, $h_c > 2r$, одакле је

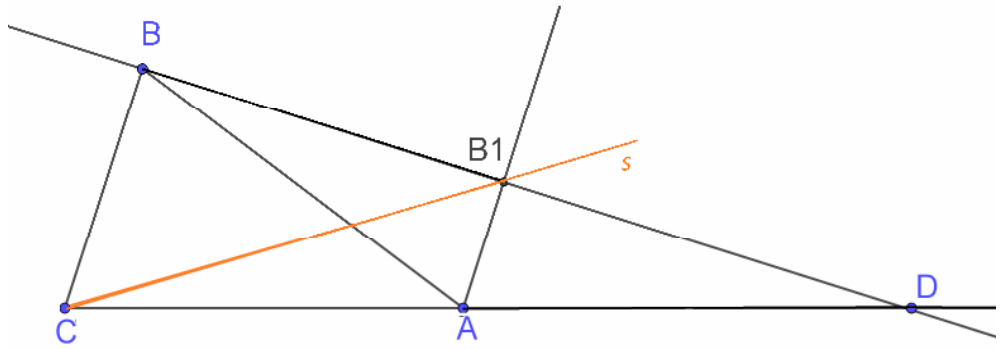
$2Rh_a > 4Rr$, $2Rh_b > 4Rr$, $2Rh_c > 4Rr$.

Даље је $R = \frac{abc}{4P} = \frac{abc}{2ah_a}$, односно $bc = 2Rh_a$, и слично $ac = 2Rh_b, ab = 2Rh_c$.

Дакле, $bc > 4Rr, ac > 4Rr, ab > 4Rr$, па је $\frac{a^2b^2c2}{4^2R^2} > 4Rr^3$, и , најзад $P = \frac{abc}{4R} > 2\sqrt{Rr^3}$.

13. У троуглу ABC права s је симетрала спољашњег угла троугла код темена A. Нека је B_1 подножје нормале из B на s. Доказати да је $BB_1 + CB_1 > BA + CA$.

Решење: Означимо са D пресечну тачку правих BB_1 и AC. Како је s симетрала угла BAD, то је она и симетрала дужи BD, па је ABD једнакокраки троугао и AB = AD. У троуглу B_1CD важи $B_1C + B_1D > CD$, одатле је $B_1C + BB_1 > AC + AD$ и коначно $BB_1 + B_1C > AC + AB$.



14. Ако су a, b и c дужине страница троугла и α, β, γ величине одговарајућих углова, доказати да је $a\alpha + b\beta + c\gamma \geq \frac{1}{2}(a\beta + a\gamma + b\alpha + b\gamma + c\alpha + c\beta)$.

Решење: Нека је $a \geq b \geq c$. Тада је $\alpha \geq \beta \geq \gamma$, па је

$$a - b \geq 0,\ \alpha - \beta \geq 0,$$
$$b - c \geq 0,\ \beta - \gamma \geq 0,$$
$$a - c \geq 0,\ \alpha - \gamma \geq 0.$$

Множењем и сабирањем наведених неједнакости добија се да је

$(a - b)(\alpha - \beta) + (b - c)(\beta - \gamma) + (a - c)(\alpha - \gamma) \geq 0,$

$a\alpha - a\beta - b\alpha + b\beta - b\gamma - c\beta + c\gamma + a\alpha - a\gamma - c\alpha + c\gamma \geq 0,$

$2(a\alpha + b\beta + c\gamma) \geq a\beta + a\gamma + b\alpha + b\gamma + c\alpha + c\beta$, одакле следи неједнакост

$a\alpha + b\beta + c\gamma \geq \frac{1}{2}(a\beta + a\gamma + b\alpha + b\gamma + c\alpha + c\beta)$.

15. Ако су a, b и c дужине страница троугла и α, β, γ величине одговарајућих углова, доказати да је $\frac{\pi}{3} \leq \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a + b + c} < \frac{\pi}{2}$

16. Дат је троугао $A_1A_2A_3$ са страницама $a_1 = A_2A_3, a_2 = A_3A_1, a_3 = A_1A_2$. Нека су s_i тангентне дужи уписаног круга које полазе из темена A_i $(i = 1, 2, 3)$. Доказати $\frac{s_1}{a_1} + \frac{s_2}{a_2} + \frac{s_3}{a_3} \geq \frac{3}{2}$. Једнакост важи када је $A_1A_2A_3$ једнакостраничан троугао.

17. Ако су *a, b* и c странице троугла чији је обим 1, онда важи неједнакост $a^2 + b^2 + c^2 + 4abc < \frac{1}{2}$.

18. Доказати неједнакост $\frac{a}{s-a} + \frac{b}{s-b} + \frac{c}{s-c} \geq 6$ (a, b, c – странице, s – полуобим троугла).

19. Доказати неједнакост $\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ (a, b, c – странице, s –полуобим троугла).

Решење: Најпре докажемо неједнакост: $m, n > 0$, $\frac{1}{m}+\frac{1}{n} \geq \frac{4}{m+n}$,

$m^2 - 2mn + n^2 \geq 0$ или $(m+n)^2 \geq 4mn$ или $\frac{m+n}{mn} \geq \frac{4}{m+n}$ тј. $\frac{1}{m}+\frac{1}{n} \geq \frac{4}{m+n}$.

Зато је $\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b} \geq \frac{4}{s-a+s-b} = \frac{4}{c}$.

Слично је и $\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-c} \geq \frac{4}{b}$ и $\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c} \geq \frac{4}{a}$.

Сабирањем добијених неједнкости следи да је $\frac{2}{s-a}+\frac{2}{s-b}+\frac{2}{s-c} \geq \frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{4}{c}$

одакле деобом са 2 добијамо тражену неједнакост.

20. Доказати неједнакост $s\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \geq \frac{9}{4}$ (a, b, c – странице, s – полуобим троугла).

21. Ако су a, b и c мерни бројеви страница троугла, онда важи неједнакост:
$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \leq 2$. Доказати.

Решење: Из неједнакости аритметичке и хармонијске средине се добија се

$$\frac{\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}}{3} \geq \frac{3}{b+c+c+a+a+b} = \frac{3}{2(a+b+c)}.$$

Ако добијену неједнакост помножимо са 3 $(a+b+c)$ следи да је

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) \geq \frac{9(a+b+c)}{2(a+b+c)}.$$

Тада је $\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{c+a}+1+\frac{1}{a+b}+1 \geq \frac{9}{2}$ или

$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{1}{a+b} \geq \frac{9}{2}-3 = \frac{3}{2}$ при чему једнакост важи ако је $a = b = c$.

Како је $a < b + c$, $b < c + a$ и $c < a + b$, то је
$a + b + c < 2(b + c)$, $a + b + c < 2(c + a)$ и $a + b + c < 2(a + b)$.

Тада је $\frac{1}{b+c} > \frac{2}{a+b+c}$, $\frac{1}{c+a} > \frac{2}{a+b+c}$, $\frac{1}{a+b} > \frac{2}{a+b+c}$.

Следи да је $\frac{a}{b+c} > \frac{2a}{a+b+c}$, $\frac{b}{c+a} > \frac{2b}{a+b+c}$, $\frac{c}{a+b} > \frac{2c}{a+b+c}$, па се сабирањем

претходних неједнакости добија $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} > \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2$

22. У оштроуглом троуглу ABC, највећа висина AH једнака је тежишној дужи BM. Доказати да је $\sphericalangle ABC < 60°$.

23. Дати су троуглови ABC и $A_1B_1C_1$, тако да је $AB = A_1B_1, AC = A_1C_1$ и $\sphericalangle BAC > \sphericalangle B_1A_1C_1$. Доказати да је $BC > B_1C_1$.

24. Нека су a, b, c, x, y, z позитивни реални бројеви такви да је $a + x = b + y = c + z = 1$. Доказати да је $ay + bz + cx < 1$. Може ли се дата неједнакост уопштити? *

B) НЕЈЕДНАКОСТИ ВЕЗАНЕ ЗА ЧЕТВОРОУГАО

25. У конвексном четвороуглу $ABCD$ дата је произвољна тачка М. Доказати да је $AM + BM + CM + DM$ веће од полуобима четвороугла. *

26. Доказати да је разлика основица трапеза већа од разлике његових кракова. *

27. Доказати да је обим сваког конвексног четвороугла већи од збира дијагонала четвороугла, а мањи од двоструког збира дијагонала четвороугла. *

28. У конвексном четвороуглу $ABCD$ три угла чија су темена A, B, C су тупа. Доказати да је дијагонала BD већа од дијагонале AC. *

29. Нека су A, B, C и D било које четири тачке у равни. Доказати да тада важи неједнакост $AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$ (Птоломејева неједнакост). Када важи једнакост?

30. Нека су a, b, c, d странице, а P површина конвексног четвороугла. Доказати да важи неједнакост $P \leq \dfrac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}$. Када важи једнакост?

Решење: Нека су α и β углови између страница $a = AB$ и $b = BC$, односно $c = CD$ и $d = DA$, редом. Тада је

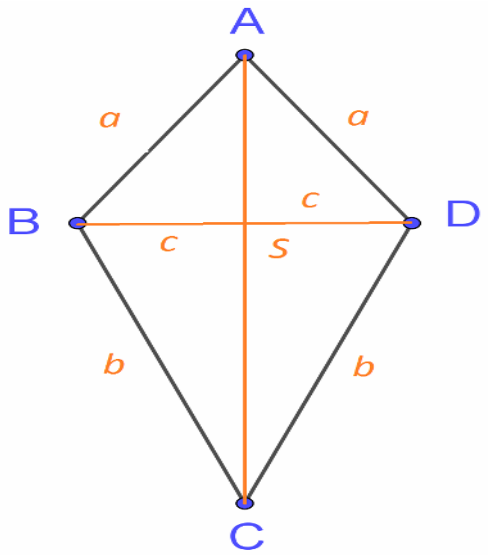
$$P(ABCD) = P_{\Delta ABC} + P_{\Delta ACD} = \frac{1}{2}ab\sin\alpha + \frac{1}{2}cd\sin\beta \leq \frac{1}{2}(ab + cd) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{c^2 + d^2}{2}\right) = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}$$

Једнакост у првој неједнакости важи акко је $\alpha = \beta = 90°$, а у другој акко је $a = b$ и $c = d$. Дакле, једнакост важи акко је дати четвороугао квадрат.

31. Нека су $a, b,$ c позитивни бројеви и $a > c$ и $b > c$. Доказати $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$.

32. Ако су a, b, c позитивни реални бројеви ($a > c$ и $b > c$), онда важи неједнакост: $\sqrt{a^2 - c^2} + \sqrt{b^2 - c^2} \leq \dfrac{ab}{c}$. Доказати.



Решење: Уочимо делтоид $ABCD$ чије су странице $AB = AD = a$ и $BC = DC = b$, а дијагонала $BD = BS + SD = 2c$.

Како је $AS = \sqrt{a^2 - c^2}$ и $CS = \sqrt{b^2 - c^2}$ то је површина делтоида једнака попупроизводу дијагонала, тј. $P = \dfrac{2c\left(\sqrt{a^2 - c^2} + \sqrt{b^2 - c^2}\right)}{2}$.

С друге стране површина делтоида је и $P = 2\dfrac{ab \cdot \sin\varphi}{2}$. Тада је

$2P = c\left(\sqrt{a^2 - c^2} + \sqrt{a^2 - c^2}\right) = ab\sin\varphi \leq ab$,

па је $\sqrt{a^2 - c^2} + \sqrt{b^2 - c^2} \leq \dfrac{ab}{c}$.

33. У јединичном квадрату дато је 2019 тачака, од којих је једна центар квадрата. За сваку тачку је узето растојање до најближе од осталих 2018 тачака. Доказати да је збир квадрата оваквих растојања мањи од $3{,}6$.

C) НЕЈЕДНАКОСТИ ВЕЗАНЕ ЗА МНОГОУГАО

34. Нека је M произвољна тачка у унутрашњој области конвексног многоугла. Доказати да је збир растојања тачке M од темена многоугла, већа од половине обима многоугла. *

35. Унутар правоуглог седмоугла $A_1 \dots A_7$ изабрана је тачка O. Доказати да бар један од углова $A_iOA_j, i \neq j, i, j \in \{1, \dots, 7\}$ задовољава неједнакост $\sphericalangle A_iOA_j \geq \frac{6}{7} \cdot 180°$.

36. Нека права l дели конвексан многоугао на два дела једнаких површина, и пројекцију многоугла на праву q $(q \perp l)$ на два одсечка. Доказати да количник тих одсечака није већи од $1 + \sqrt{2}$.

D) НЕЈЕДНАКОСТИ ВЕЗАНЕ ЗА КРУГ

37. У круг полупречника r уписан је n-тоугао. Доказати да је обим n-тоугла мањи од $2nr$.

38. Дато је 6 кругова у равни, тако да нека тачка O припада сваком од њих. Доказати да један од тих кругова садржи центар неког од преосталих кругова.

39. Дат је круг полупречника 1 и n тачака $A_1, A_2, \dots, A_n$ у истој равни. Доказати да се на кругу може изабрати тачка X, таква да је $XA_1 + XA_2 + \dots + XA_n \geq n$ $(n \in N)$. *

40. Права l садржи центар кружнице уписане у ΔABC и одсеца од њега троугао чија је површина S. Доказати да је $S \geq 2r^2$, где је r полупречник уписане кружнице у троугао ABC.

41. У равни је дато 100 тачака, таквих да међу свим дужинама, чије су оне крајеви, најдужа има дужину 1. Доказати да је дужина d, најкраће међу овим дужинама, мања од $\frac{2}{9}$.

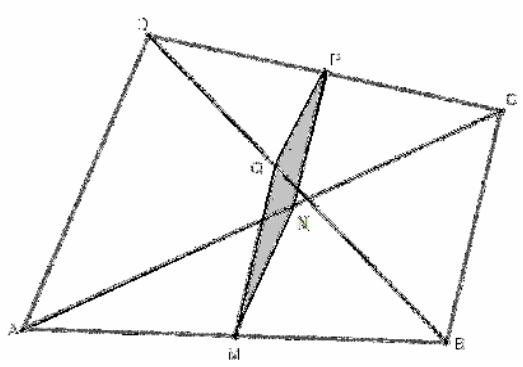
E) СТЕРЕОМЕТРИЈСКЕ НЕЈЕДНАКОСТИ

42. Дата је тространа пирамида $ABCV$ са страницама основе a, b и c и бочним ивицама x, y и z. Подножје висине v из врха V припада основи ABC. Доказати да важи $x + y + z \leq a + b + c + 3v$.

43. Дат је полиедар површине P у који се може уписати и око њега може описати сфера. Ако су полупречници тих сфера r и R, редом, доказати да важи $R > \sqrt[3]{\frac{rP}{4\pi}}$.

44. Ако је тачно једна страница тетраедра већа од 1, тада запремина тетраедра није већа од $\frac{1}{8}$. Доказати.

45. Ако пресек тетраедра неком равни има облик паралелограма, онда је полуобим тог паралелограма мањи од највеће, а већи од најмање ивице тетраедра. Доказати.



Решење: Како је MN||PQ ,то је PQ паралелно равни ABC. Како PQ припада равни BCD, то праве BC и PQ нису мимоилазне, те је PQ||BC , па је и MN||BC Аналогно је MQ||AD и NP||AD.

Из сличности $\Delta\, AMN \sim \Delta\, ABC$ следи $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{AM}{AB}$.

Из сличности $\Delta\, BMQ \sim \Delta\, ABD$ следи $\dfrac{MQ}{AD} = \dfrac{MB}{AB}$.

Сабирањем претходних једнакости добија се $\dfrac{MN}{BC} + \dfrac{MQ}{AD} = \dfrac{AM}{AB} + \dfrac{MB}{AB} = \dfrac{AB}{AB} = 1$.

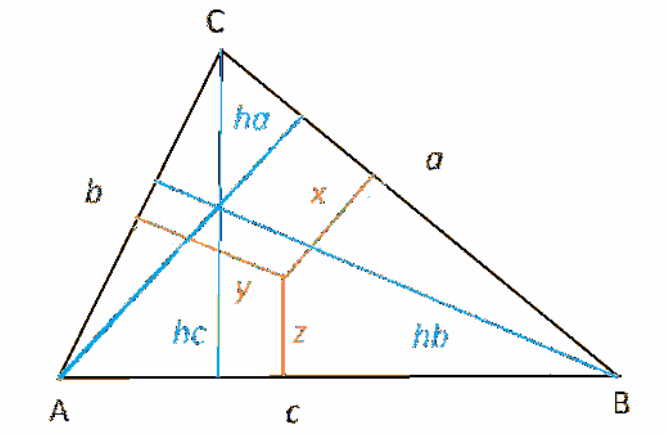
Нека је a најмања, а b највећа ивица тетраедра.

Тада је $a \le BC$ и $AD \le b$, па је $1 = \dfrac{MN}{BC} + \dfrac{MQ}{AD} \le \dfrac{MN}{a} + \dfrac{MQ}{a}$, па је $MN + MQ \ge a$.

Слично је $1 = \dfrac{MN}{BC} + \dfrac{MQ}{AD} \ge \dfrac{MN}{b} + \dfrac{MQ}{b}$, па је $MN + MQ \le b$.

F) ПРИМЕНА ГЕОМЕТРИЈСКИХ НЕЈЕДНАКОСТИ НА ЕКСТРЕМАЛНЕ ПРОБЛЕМЕ

46. У непосредној близини праволинијског пута p налазае се градови A и B. Где треба изградити бензинску пумпу S тако да је збир растојања AS и BS најмањи? *
47. Од свих правоуглих троуглова конструисаних над кругом пречника $2R$ одредити онај правоугли троугао који има највећи полупречник уписаног круга.
48. Одредити тачку у унутрашњости троугла, тако да производ растојања од те тачке до страница троугла буде највећи.



Нека су x, y, z растојања тачке M од страница троугла $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, редом.

Тада је $P = P_{\Delta ABC} = P_{\Delta MBC} + P_{\Delta MCA} + P_{\Delta MAB} = \dfrac{ax}{2} + \dfrac{by}{2} + \dfrac{cz}{2} = P$.

Како је $ax + by + cz = 2P$ из неједнакости аритметичке и геометријске средине следи да је:

$$\frac{2P}{3} = \frac{ax + by + cz}{3} \ge \sqrt[3]{axbycz}\ , \text{ тј. } \left(\frac{2P}{3}\right)^3 \ge axbycz, \text{ па је } abcxyz \le \left(\frac{2P}{3}\right)^3 .$$

Како је за тачно одређени троугао десна страна неједнакости $\left(\frac{2P}{3}\right)^3$ константна, то лева страна неједнакости своју највећу вредност добија када је $ax = by = cz = \frac{2P}{3}$.

Дакле тражена тачка M је она тачка за коју је $x = \frac{2P}{3a} = \frac{h_a}{3}$, $y = \frac{2P}{3b} = \frac{h_b}{3}$, $z = \frac{2P}{3c} = \frac{h_c}{3}$, те је очигледно да је тачка M тежиште троугла.

49. Универзитетски центар C гради се за студенте који живе у градовима M, N и P. Да ли локацију C бирати тако да се налази у тежишту, центру описаног, центру уписаног круга, ортоцентру или некој другој тачки у унутрашњој област троугла MNP тако да збир растојања MC + NC + PC буде најмањи?

G) ИЗОПЕРИМЕТРИЈСКИ ПРОБЛЕМИ

50. Од свих правоуглих троуглова чија је хипотенуза једнака датој дужи c, највећу површину има једнакокрако-правоугли троугао. Доказати.
51. Доказати да од свих троуглова обима $2s$ највећу површину има једнакостранични троугао.
52. Од свих четвороуглова датог обима највећу површину има квадрат. Доказати (видети задатак 30).
53. Од свих n - тоуглова датог обима највећу површину има правилни n – тоугао.
54. Од свих фигура чији је обим O највећу површину има круг. Доказати

H) ГЕОМЕТРИЈСКЕ НЕЈЕДНАКОСТИ МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ позитивни реални бројеви из интревала (a, b) и нека су бројеви m и M редом

$$m_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

$$M_n = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}$$

где је $f(x)$ нека реална на интервалу (a, b) позитивна, конвексна и непрекидна функција.

У свом уџбенику (првом по реду) „Рачунање са бројним размацима“ из 1932. године Михаило Петровић у поглављу „Бројни размаци у елементарним рачунима“, подпоглавље „Бројни размаци у аритметици и алгебри“, сасвим елементарно доказује да је

$$f(m_n) \le M_n \le \frac{f(nm) + (n-1)f(0)}{n} \qquad (1)$$

Видети: Сабрана дела Михаила Петровића (књига 8): Интервална математика:„Однос између аритметичке средине бројева и аритметичке средине њихових функција“ (страна 56 – 59).

У развијеној форми добијена неједнакост (1) има облик

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n} \le \frac{f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)+(n-1)f(0)}{n} \qquad (2)$$

Када се добијена неједнакост примени на функцију $f(x) = x^{\kappa}$ ($\kappa > 1$), онда је дата функција конвексна и за позитивне реалне бројеве $x_1, x_2, \ldots, x_n$ важи неједнакост

$$\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^k \le \frac{x_1^{\,k}+x_2^{\,k}+\ldots+x_n^{\,k}}{n} \le \frac{\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)^k}{n} \qquad (3)$$

За к = 2 добија се позната неједнакост

$$\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^2 \le \frac{x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+\ldots+x_n^{\,2}}{n} \le \frac{\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)^2}{n} \qquad (4)$$

Видети: Сабрана дела Михаила Петровића (књига 8): Интервална математика:„Однос између аритметичке средине бројева и аритметичке средине њихових функција“ (страна 60 – 61).

НЕЈЕДНАКОСТ МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА ЗА ТРОУГАО

Међутим, Михаило Петровић примећује да се интервал у коме се налази број М

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n} \le \frac{f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)+(n-1)f(0)}{n}$$

ако се примени на троугао може још сузити и формулише добијену неједнакост само за три позитивна реална броја: *x, y* и *z*:

$$f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \le \frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3} \le \frac{f\left(x+y+z\right)+2f(0)}{3} \quad \text{тј.}$$

$$3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \le f(x)+f(y)+f(z) \le f\left(x+y+z\right)+2f(0)\,.$$

Видети: Сабрана дела Михаила Петровића (књига 8): Интервална математика: „Задаци који се своде на проучавање аритметичке средине конвексних или конкавних функција“ (страна 85).

Узимајући у обзир да за странице *a, b* и *c* троугла важе неједнакости

$$a+b>c,\ \ b+c>a \ \text{ и } \ c+a>b$$

и да за полуобим троугла $\qquad p = \dfrac{a+b+c}{2}$

важе неједнакости $p > a$, $p > b$ и $p > c$ он формира нове променљиве $x = p - a$, $y = p - b$ и $z = p - c$ и нову функцију $f(t) = F(p - t)$. Како је

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{d^2 F}{dt^2}$$

то су функције $f(t)$ и $F(t)$ исте ковексности (односно конкавности). Следи да је

$$3F\left(p - \frac{x + y + z}{3}\right) \le F(p - x) + F(p - y) + F(p - z) \le F(p - x - y - z) + 2F(p).$$

Заменом $x = p - a$, $y = p - b$ и $z = p - c$ у претходну неједнакост добија се

$$3F\left(\frac{2p}{3}\right) \le F(a) + F(b) + F(c) \le F(0) + 2F(p).$$

55. У математичком часопису Ens. Math факултета Ecol normal superior (на коме је 1894. године докторирао Михаило Петровић) у броју 18 из 1916. године објављен је рад „О неким функцијама страна и углова троугла“ („Sur quelques fonctions des cótés et des angles d'une triangle”) (стране: 153 – 163).
У раду се између осталог третира и неједнакост

$$\frac{1}{3} \le \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a + b + c)^2} \le \frac{1}{2}$$

која важи за било који троугао чије странице имају мерне бројеве a, b и c.

56. На 2. Балканском математичком конгресу у Букурешту 1937. године Михаило Петровић се у једном од два своја рада *„О једној теореми Помпеија“* (*„A propos d'un theoreme de M. Pompeiu“*) бави једном занимљивом неједнакошћу троугла:

Ако су a, b и c мерни бројеви страница троугла, онда је

$$\frac{3}{2} \le \frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} \le 2 \cdot$$

при чему доња граница неједнакости важи када је троугао једнакостранични, а горња граница неједнакости када троугао има један бесконачно мали угао.

57. Међу значајним неједнакостима Михаила Петровића је и следећа занимљива неједнакост: Ако се из произвољне тачке M датог круга полупречника R констришу две међусобно нормалне тангенте AC и BD, онда је

$$2R \le AC + BD \le 2R\sqrt{2}\ .$$

58. У часопису Румунског математичког друштва 40 (1938) (стране 205 - 208) Михаило Петровић је објавио следећу неједнакост:

Нека је $(n - 1)s$ обим конвексног n – тоугла чије су странице a_1, a_2 ... a_n, тако да је свака од њих мања или једнака s. Тада је

$$\frac{n}{n-1} \le \frac{a_1}{a_2 + a_3 + \ldots + a_n} + \frac{a_1}{a_1 + a_3 + \ldots + a_n} + \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}} \le \frac{n-1}{n-2}\ .$$

ЛИТЕРАТУРА:

[1.] Иванка Томић: Неједнакости за ученике основних школа, ИП „Круг“, Београд 1999.

[2.] Botema, Djordjevic, Janic, Mitrinovic, Vasic: Geometric Inequalities, Groningen 1969.

[3.] Израиљ Хамович Сивашинскиј: Неравенства в задачах „Наука“, Москва, 1967.

[4.] Сабрана дела Михаила Петровића (књига 8): Интервална математика: Завод за уџбенике, Београд, 1999.

[5.] Михаило Петровић: Рачунање с бројним размацима, ИП „Научна књига“, Београд, 1969.

[6.] Владимир Јанковић: Изопериметријски проблем, Часопис „Тангента“, број 1, Нови Сад, 1995.

[7.] Ђорђе Дугошија, Војислав Андрић, Вера Јоцковић, Владимир Мићић: Математика за шести разред основне школе, Завод за уџбенике, Београд, 2011.

ИЗОПЕРИМЕТРИЈСКИ ПРОБЛЕМ

др Владимир Јанковић, Математички факултет, Београд

Увод

Под изопериметријским проблемом у ужем смислу подразумева се проблем одређивања просте, затворене, равне криве задате дужине која обухвата област највеће површине. Под изопериметријским проблемом у ширем смислу подразумева се проблем одређивања фигуре највеће површине у задатој фамилији фигура које имају једнаке обиме. Споменимо неколико карактеристичних проблема тог типа:

- међу n-тоугловима задатих дужина страница одредити онај који има највећу површину;
- међу n-тоугловима задатог обима и задатих углова одредити онај који има највећу површину;
- међу n-тоугловима задатог обима одредити онај који има највећу површину.

Није тешко наслутити да је решење основног изопериметријског проблема круг. У савременој математици постоји више доказа ове чињенице. Неки од њих су елементарни, а неки не, али ниједан није тривијалан и сваки од њих представља прави математички бисер. У овом чланку биће изложено прво елементарно решење изопериметријског проблема.

Изопериметријским проблемом су се бавили математичари античке Грчке. Из многих сачуваних записа види се, посредно или непосредно, да се још тада наслућивало да круг обухвата већу површину од простих затворених кривих исте дужине. Неки историчари математике баш у том смислу тумаче Питагорин (*Πυθαγόρα*) став да је "најлепше од свих тела лопта, најлепша од свих равних фигура круг". Најзначајније дело античке математике посвећено изопериметријском проблему био је Зенодоров трактат (*Ζηνόδωροσ*, 2. век пре Христа) који, нажалост, није сачуван. О овом делу данас се зна посредно, преко текстова Папа александријског (*Πάππος άλεχανδρεύσ*, 3. век) и Теона (*Θεόν*, 4. век). Зенодор је прво решавао изопериметријски проблем за n-тоуглове, а потом је општи изопериметријски проблем решавао апроксимирањем произвољне криве полигоном. Основни недостатак Зенодоровог поступка је тај што полази од недоказане претпоставке да у фамилији n-тоуглова задатог обима постоји фигура максималне површине. Зато се Зенодорово решење изопериметријског проблема за n-тоуглове не може сматрати комплетним. Такође се не може сматрати комплетним Зенодоров доказ да је круг решење изопериметријског проблема.

Прве следеће значајне покушаје да реши овај проблем учинио је Штајнер (Steiner) у прошлом веку. Он је дао пет доказа да је круг решење изопериметријског проблема. Међутим, сви његови докази имају исти недостатак као и онај Зенодоров: није доказана егзистенција решења. Без обзира на то, Штајнерови покушаји су важан корак ка циљу јер се у њима појавило неколико веома добрих идеја које су касније донеле важне резултате. Између осталог на основу Штајнерових идеја настало је прво комплетно елементарно решење изопериметријског проблема које је дао Едлер (Edler) 1882. године.

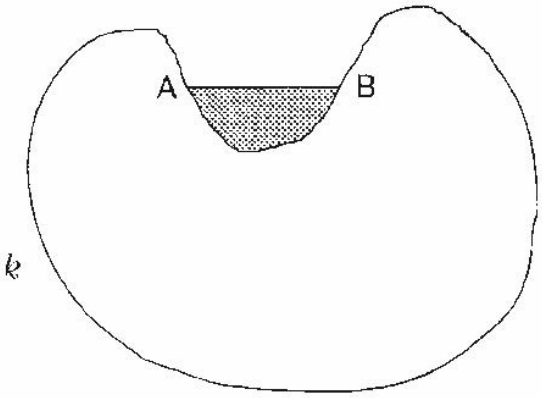
Изопериметријски проблем спада у ширу класу математичких проблема које називамо екстремални проблеми. То су проблеми одређивања објеката из задате фамилије који су најбољи у задатом смислу. Такви проблеми су се појављивали у математици од њених најранијих почетака. Такође се појављују у другим наукама, техници и економији. Током XVII века расло је интересовање за екстремалне проблеме што је довело до појаве диференцијалног рачуна, чије су темеље поставили Њутн (Newton) и Лајбниц (Leibnitz). У XVIII веку настала је још једна математичка дисциплина која развија апарат за решавање екстремалних проблема. То је варијациони рачун. Темеље су му поставили Ојлер (Euler) и Лагранж (Lagrange). У варијационом рачуну се изучава аналитички апарат за решавање екстремалних проблема у којима су променљиве криве и површи, какав је нпр. изопериметријски проблем. Прво комплетно решење изопериметријског проблема појавило се управо у оквиру варијационог рачуна. Дао га је Вајерштрас (Weierstrass) у курсу варијационог рачуна којег је држао својим студентима. Интересантно је да Вајерштрас није објавио свој резултат већ је он остао сачуван захваљујући студентским белешкама.

Штајнерово (непотпуно) решење

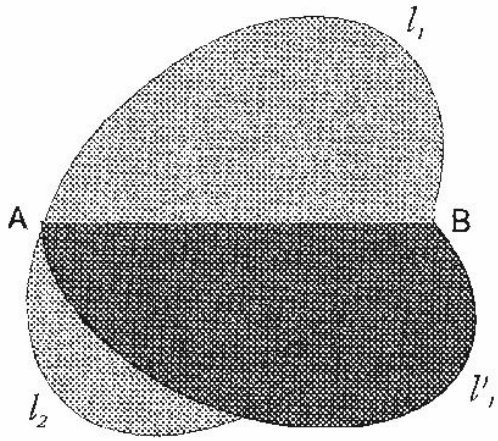
Резултат првог Штајнеровог покушаја формулисаћемо у облику теореме.

ТЕОРЕМА 1 *Ако проста затворена равна крива није круг, постоји проста затворена равна крива исте дужине која обухвата област веће површине.*

Доказ. Нека крива k обухвата област која није конвексна. Тада на кривој k постоје две тачке A и B, такве да све унутрашње тачке дужи AB леже у спољашњој области криве k (слика 1). Ако се један део криве k замени отсечком AB, добиће се крива k' чија је дужина мања од дужине криве k и која обухвата област веће површине од површине области обухваћене кривом k. Нека је k'' крива која је слична кривој k', чија је дужина једнака дужини криве k. Како је дужина криве k'' већа од дужине криве k', коефицијент њихове сличности већи је од 1. Следи да је површина области обухваћене кривом k'' већа од површине области обухваћене кривом k', а тим пре је већа од површине области обухваћене кривом k.



Слика 1

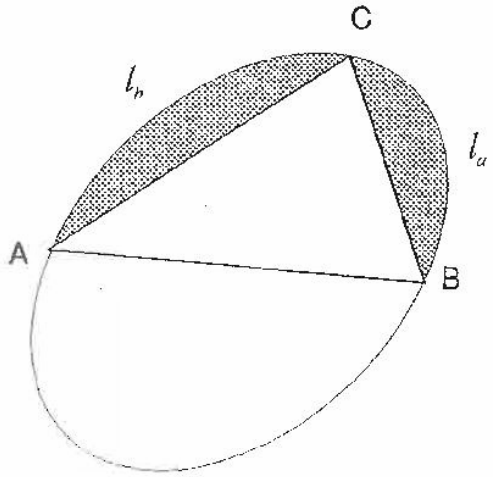


Слика 2

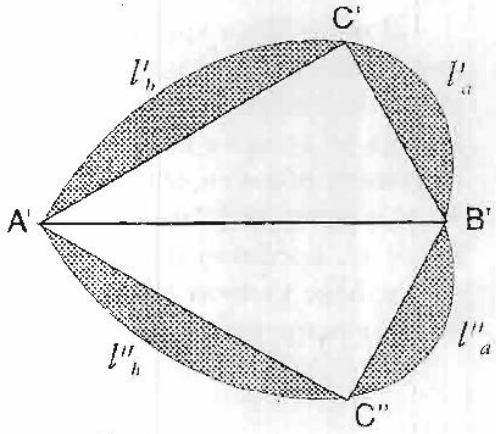
Надаље ћемо претпостављати да је област обухваћена кривом k конвексна. Нека су A и B две тачке које криву k разлажу на два лука l_1 и l_2 чије су дужине једнаке.

Нека површина области коју ограничавају лук l_1 и дуж AB није једнака површини области коју ограничавају лук l_2 и дуж AB; нека нпр. прва од ове две области има већу површину. Крива k' састављена од лука l_1 и лука l_1' симетричног луку l_1 у односу на праву AB има исту дужину као и крива k, а површина области коју она ограничава већа је од површине области коју ограничава крива k (слика 2).

Надаље ћемо претпостављати да су површине области ограничене луком l_1 и дужи AB и области ограничене луком l_2 и дужи AB једнаке међу собом. Како по претпоставци теореме крива k није круг, на њој постоји тачка C из које се дуж AB види под углом који није прав (слика 3). Нека је $A'B'C'$ троугао чији је угао код темена C' прав и чије су странице $A'C'$ и $B'C'$ једнаке дужима AC и BC (слика 4). Даље, нека су лукови l_a' и l_b' над катетама $B'C'$ и $A'C'$ подударни луковима l_a и l_b које странице BC и AC троугла ABC одсецају на кривој k и нека су лукови l_a'' и l_b'' симетрични луковима l_a' и l_b' у односу на праву $A'B'$. Крива k' састављена од лукова l_a', l_b', l_b'' и l_a'' има исту дужину као и крива k: лукови l_a' и l_b' подударни су луковима l_a и l_b; збир дужина лукова l_a' и l_b' једнак је половини дужине криве k', док је збир дужина лукова l_a и l_b једнак половини дужине криве k. Како је површина троугла $A'B'C'$ већа од површине троугла ABC, то је област ограничена луковима l_a' и l_b' и дужи $A'B'$ већа од површине области ограничене луковима l_a и l_b и дужи AB. Површине ових двеју области једнаке су половинама површина области које обухватају криве k' и k. Стога је површина области обухваћене кривом k' већа од површине области обухваћене кривом k.



Слика 3



Слика 4

У доказу претходне теореме коришћено је једно помоћно тврђење које ћемо формулисати у облику задатка:[1]

Задатак 1. Међу троугловима чије су две странице једнаке датим дужима највећу површину има онај код кога је угао захваћен тим страницама прав.

Штајнерова симетризација

Развијајући методе за решавање изопериметријског проблема, Штајнер је смислио трансформацију којом се од једне конвексне фигуре добија нова конвексна фигура којој дата права представља осу симетрије, чија је површина једнака површини оригинала и чији обим није већи од обима оригинала, при чему су обими слике и оригинала

[1] Предлажемо читаоцима да задатке из овог чланка сами реше.

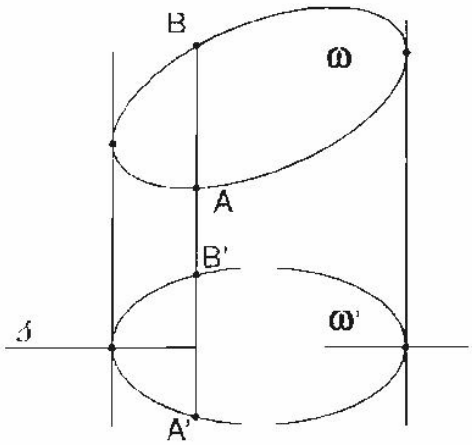
једнаки само у случају да оригинал има осу симетрије паралелну датој правој. Та трансформација се назива симетризација. У наставку овог параграфа даћемо дефиницију симетризације и доказаћемо она њена својства која ћемо користити у наставку чланка. Подразумеваћемо да се сва разматрања односе на фигуре које леже у једној равни.

Нека је дата права s (сматраћемо да је она хоризонтална). Симетризација у односу на праву s је трансформација која произвољну конвексну фигуру ω пресликава у фигуру ω' која задовољава следећа два услова:

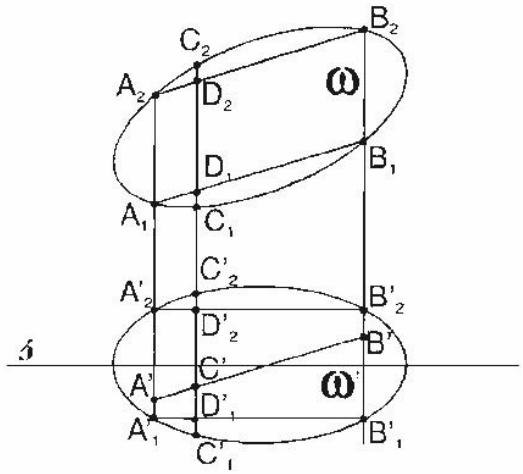
- фигура ω' је симетрична у односу на праву s;
- свака права управна на s (вертикала) пресеца фигуре ω и ω' по дужима једнаких дужина (слика 5).

Докажимо да је фигура ω', добијена симетризацијом конвексне фигуре ω, такође конвексна. Нека су A' и B' две тачке фигуре ω' и нека је C' унутрашња тачка дужи $A'B'$. Претпоставићемо да тачка C' дели дуж $A'B'$ у односу $p : q$ $(p, q > 0,\ p + q = 1)$. Треба доказати да тачка C' припада фигури ω'. Случај када тачке A' и B' леже на једној вертикали је тривијалан. Зато ћемо претпостављати да тачке A' и B' не леже на једној вертикали. Нека вертикале кроз тачке A', B' и C' пресецају фигуре ω и ω' по дужима A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, $A_1'A_2'$, $B_1'B_2'$ и $C_1'C_2'$, нека дужи A_1B_1 и A_2B_2 секу праву C_1C_2 у тачкама D_1 и D_2, и нека дужи $A_1'B_1'$ и $A_2'B_2'$ секу праву $C_1'C_2'$ у тачкама D_1' и D_2' (слика 6). Због конвексности фигуре ω, тачке D_1 и D_2 припадају фигури ω а самим тим и дужи C_1C_2. Имамо да је

$$D_1'D_2' = qA_1'B_1' + pA_2'B_2' = qA_1B_1 + pA_2B_2 = D_1D_2 \leq C_1C_2 = C_1'C_2'.$$



Слика 5



Слика 6

Имајући у виду да дужи $D_1'D_2'$ и $C_1'C_2'$ леже на истој правој и имају заједничко средиште и да прва од њих није дужа од друге, закључујемо да је дуж $D_1'D_2'$ садржана у дужи $C_1'C_2'$. Како тачка C' припада дужи $D_1'D_2'$ (због конвексности трапеза $A_1'A_2'B_2'B_1'$), она тим пре припада дужи $C_1'C_2'$, а самим тим и фигури ω'.

Надаље ћемо се бавити симетризацијом полигонских површи. Основни алат у разматрањима која следе биће тврђења садржана у следећа два задатка:

Задатак 2. а) Нека је l права паралелна страници AB троугла ABC која висину CD дели у односу $p : q$ $(p, q > 0,\ p + q = 1)$. Доказати да је дужина пресечне дужи MN праве l и троугла ABC дата са $MN = pAB$.

б) Нека је l права паралелна основицама AB и CD трапеза $ABCD$ која његову висину DE дели у односу $p : q$ $(p, q > 0,\ p + q = 1)$. Доказати да је дужина пресечне дужи MN праве l и трапеза $ABCD$ дата са $MN = pAB + qCD$.

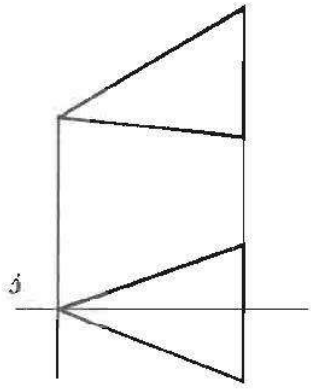
Задатак 3. а) Доказати да међу троугловима чије су једна страница и одговарајућа висина једнаке датим дужима, најмањи обим има троугао чије су преостале две странице једнаке.

б) Доказати да међу трапезима чије су основице и висина једнаке датим дужима, најмањи обим има једнакокраки трапез.

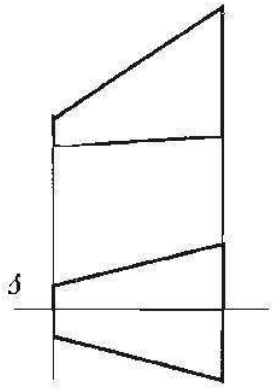
Непосредна последица ових тврђења су следеће чињенице:

–симетризацијом троугла у односу на праву паралелну једној његовој висини добија се једнакокраки троугао чија је површина једнака површини полазног троугла а обим није већи од обима полазног троугла, при чему једнакост обима важи само у случају када је полазни троугао једнакокрак (слика 7);

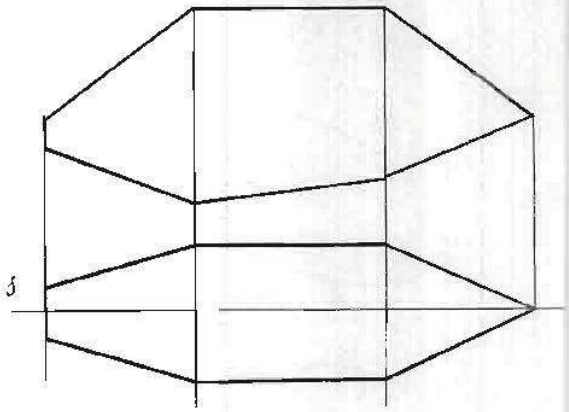
–симетризацијом трапеза у односу на праву која је паралелна његовој висини добија се једнакокраки трапез чија је површина једнака површини полазног трапеза а обим није већи од обима полазног трапеза, при чему једнакост обима важи само у случају када је полазни трапез једнакокрак (слика 8).



Слика 7



Слика 8



Слика 9

Нека је ω произвољна полигонска површ и нека је s хоризонтална права у односу на коју се врши симетризација фигуре ω. Вертикале које пролазе кроз темена полигонске површи ω разлажу ову површ на троуглове и трапезе који имају хоризонталне висине. Симетризацијом полигонске површи ω добија се фигура ω' која је једнака унији троуглова и трапеза добијених симетризацијом троуглова и трапеза поменутог разлагања. Није тешко закључити да је површина слике једнака површини оригинала и да обим слике није већи од обима оригинала, при чему једнакост обима важи само у случају када полигонска површ ω има хоризонталну осу симетрије.

Сада ћемо се позабавити проценом броја темена полигонске површи ω' добијене симетризацијом полигонске површи ω. Нека полигонска површ ω има n темена. Раз-

матрајмо вертикале на којима се налазе та темена (слика 9). Издвајају се две крајње вертикале. Све заједничке тачке крајњих вертикала са полигонском површи ω леже на рубу од ω. Остале вертикале (зваћемо их унутрашње) пролазе кроз унутрашњу област полигонске површи ω. Постоје четири могућности односа вертикала и темена полигонске површи ω: вертикала може бити крајња или унутрашња и на њој може да лежи једно или два темена полигонске површи ω. Ако на крајњој вертикали лежи једно теме полигонске површи ω, онда на њој лежи једно теме полигонске површи ω' и оно се налази на правој s. Ако на крајњој вертикали леже два темена полигонске површи ω, онда на њој леже два темена полигонске површи ω' и она су симетрична у односу на праву s. На свакој унутрашњој вертикали леже два темена полигонске површи ω' и она су симетрична у односу на праву s. Из ових разматрања следи да број темена полигонске површи ω' која леже са једне стране праве s није већи од $n-2$. Тај број је мањи од $n-2$ за број вертикала које садрже пар темена полигонске површи ω и пролазе кроз њену унутрашњу област.

Едлерово решење проблема

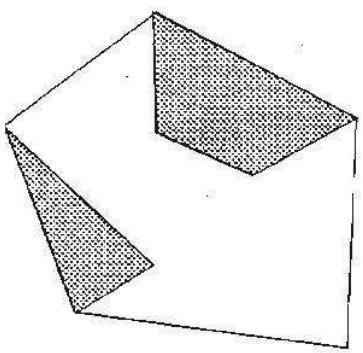
Пре него што пређемо на излагање Едлеровог доказа чињенице да је круг решење изопериметријског проблема формулишимо један задатак чије ће нам тврђење бити корисно у разматрањима која следе.

Задатак 4. Доказати да међу троугловима чија је једна страница једнака датој дужи а наспрамни угао једнак датом углу највећу површину има троугао чије су преостале две странице једнаке.

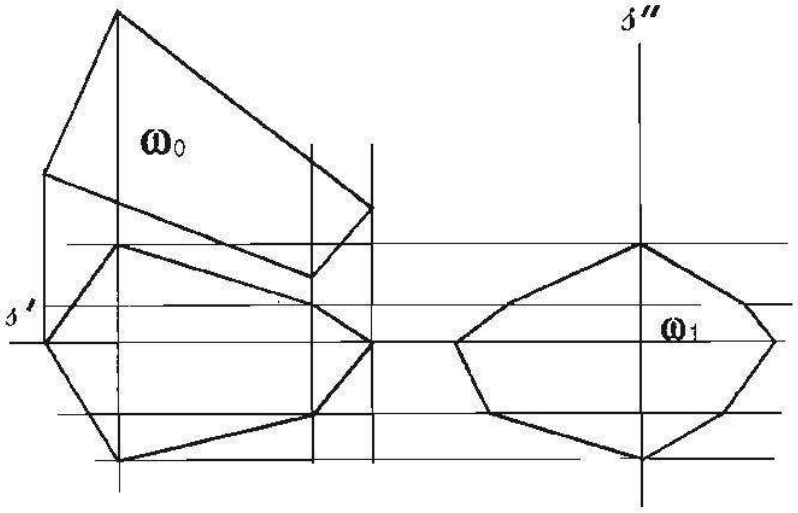
Најважнији и уједно најтежи део Едлеровог решења изопериметријског проблема садржан је у следећој леми.

Лема 1 *За сваку полигонску површ постоји правилна полигонска површ једнаког обима и не мање површине.*

Доказ. Нека је ω произвољна полигонска површ и нека је ω_0 њен конвексан омотач (слика 10). Као што је познато, ω_0 је полигонска површ чији обим није већи од обима полигонске површи ω а површина није мања од површине полигонске површи ω.



Слика 10

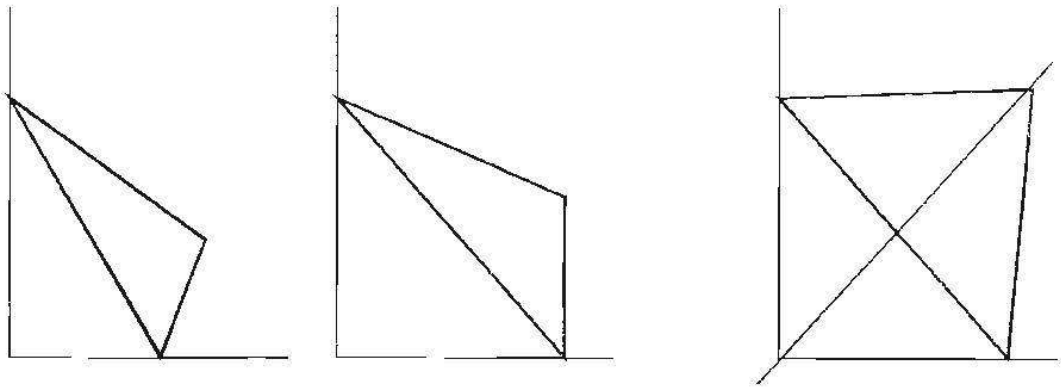


Слика 11

Изаберимо две произвољне међусобно нормалне праве и извршимо симетризацију полигонске површи ω_0 најпре у односу на једну од њих а потом и у односу на другу. Добићемо конвексну полигонску површ ω_1 чија је површина једнака површини полигонске површи ω_0 и чији обим није већи од обима полигонске површи ω_0. При том полигонска површ ω_1 има две осе симетрије које разлажу раван на четири једнака угла. Унутар сваког од тих углова налази се не више од $n-3$ темена полигонске површи ω_1 (слика 11.).

Уколико сва темена полигонске површи ω_1 не леже на његове две осе симетрије вршимо трансформацију чији опис следи. Најпре се, унутар сваког од углова на које осе симетрије разлажу раван, део руба полигонске површи ω_1 који лежи у том углу помери у положај у коме ће његови крајеви и даље бити на крацима угла али ће њихова растојања од пресечне тачке оса симетрије бити једнака. Потом се делови угаоних површи ограничени тако помереним деловима руба полигонске површи симетризују у односу на осе симетрије одговарајућих углова (слика 12). Унија тако добијених фигура је конвексна полигонска површ ω_2 која има четири осе симетрије које разлажу раван на осам једнаких углова. Унутар сваког од њих лежи не више од $n-4$ темена полигонске површи ω_2. На основу својстава симетризације и тврђења претходног задатка закључујемо да површина полигонске површи ω_2 није мања од површине полигонске површи ω_1, а обим полигонске површи ω_2 није већи од обима полигонске површи ω_1.

Уколико сва темена полигонске површи ω_2 не леже на његове четири осе симетрије трансформацијом која је слична горе описаној добијамо конвексну полигонску површ ω_3 која има осам оса симетрије које разлажу раван на шеснаест једнаких углова. Унутар сваког од њих лежи не више од $n-5$ темена полигонске површи ω_3. Површина полигонске површи ω_3 није мања од површине полигонске површи ω_2, а обим полигонске површи ω_3 није већи од обима полигонске површи ω_2.



Слика 12

Ако довољан број пута ($k \leq n-3$) поновимо описану трансформацију доћи ћемо до конвексне полигонске површи ω_{k+1} која има 2^{k+2} осе симетрије које садрже сва темена полигонске површи ω_{k+1} и разлажу раван на 2^{k+3} једнака угла. При том површина полигонске површи ω_{k+1} није мања од површине полигонске површи ω_k, а обим полигонске површи ω_{k+1} није већи од обима полигонске површи ω_k.

Унутар сваког од углова на које осе симетрије полигонске површи ω_{k+1} разлажу раван померимо део руба полигонске површи ω_{k+1} који лежи у том углу (то је дуж) у положај у коме ће његови крајеви и даље бити на крацима угла али ће њихова растојања од пресечне тачке оса симетрије бити једнака. Тако добијамо правилну полигонску површ ω' која има исти обим и не мању површину од одговарајућих величина полигонске површи ω_{k+1}.

Правилна полигонска површ ω' има површину не мању од површине полигонске површи ω и обим не већи од обима полигонске површи ω. Нека је ω'' правилна полигонска површ која је слична са ω' и има обим једнак обиму полигонске површи ω. Како обим полигонске површи ω'' није мањи од обима полигонске површи ω', коефицијент њихове сличности није мањи од 1. Следи да површина полигонске површи ω'' није мања од површине полигонске површи ω', а самим тим није мања ни од површине полигонске површи ω.

Пре него што пређемо на главну теорему у овом тексту докажимо још једно помоћно тврђење.

Лема 2 *Ако правилан полигон и круг имају једнакс обиме, површина полигона мања је од површине круга.*

Доказ. Нека правилан полигон p и круг k имају једнаке обиме. Даље нека је k' круг уписан у полигон p. Обим круга k' мањи је од обима полигона p, а самим тим и од обима круга k. Следи да је полупречник r' круга k' мањи од полупречника r круга k. Ако заједничку величину обима полигона p и круга k означимо са P, њихове површине биће једнаке $Pr'/2$ и $Pr/2$. Следи да је површина области ограничене полигоном p мања од површине области ограничене кругом k.

Пошто смо припремили апарат можемо прећи на теорему која у себи садржи решење изопериметријског проблема.

ТЕОРЕМА 2 *Међу простим затвореним равним кривим дате дужине, круг обухвата област највеће површине.*

Доказ. Нека је k проста затворена равна крива која није круг. Према Теореми 1 постоји проста затворена равна крива k_1 која има исту дужину као и крива k и која ограничава област веће површине од површине области која је обухваћена кривом k. За сваку просту затворену равну криву постоји полигон чија темена леже на тој кривој, такав да се његова површина разликује од површине области коју обухвата та крива за произвољно мали број. Зато постоји полигон p_1 чија темена леже на кривој k_1 и чија је површина већа од површине области коју обухвата крива k. Обим полигона p_1 није већи од обима криве k_1 а самим тим и од обима криве k. Нека је p_2 полигон који је сличан полигону p_1 и чији је обим једнак обиму криве k. Како обим полигона p_2 није мањи од обима полигона p_1, коефицијент њихове сличности није мањи од 1. Зато површина полигона p_2 није мања од површине полигона p_1 па тим пре није мања од површине области коју обухвата крива k. Нека је p_3 правилан полигон чија је обим једнак обиму полигона p_2 а чија површина није мања од површине полигона p_2 (егзистенцију таквог полигона потврђује Лема 1). Нека је k' круг чији је обим једнак обиму полигона p_3. Према Леми 2, површина круга k' већа је од површине полигона p_3, па круг k' има обим једнак обиму криве k, и површину већу од површине области обухваћене кривом k.

Закључни коментари

Решавање екстремалних проблема често се изводи у две фазе. У првој фази решавања локализује се ужи скуп објеката, најчешће једночлани скуп, међу којима се налази решење проблема, уколико оно уопште постоји. Тај део посла се најчешће обавља помоћу неког неопходног услова за екстремум. У нашем случају функцију ове фазе

обавила је Штајнерова теорема. Друга фаза решавања проблема састоји се у доказивању да објекат који је локализован у првој фази решавања заиста представља решење проблема. Тај доказ се често изводи помоћу неког довољног услова за екстремум. У нашем случају тај део посла обавила је Едлерова теорема.

Постоји још једна шема по којој се решавају екстремални проблеми. У њој се решавање проблема такође обавља у две фазе. Једна од тих двеју фаза идентична је првој фази из претходне шеме: у њој се локализује објекат који би могао да буде решење проблема. У другој фази се доказује егзистенција решења, тј. егзистенција објекта који је решење проблема. У првој половини овог века немачки математичар Блашке (Blaschke) је развио апарат помоћу којег се може доказати егзистенција решења неких екстремалних проблема који се односе на конвексне скупове. Помоћу тог апарата може се доказати да међу конвексним фигурама задатог обима постоји фигура максималне површине. Одатле се лако добија егзистенција решења изопериметријског проблема, ако се има у виду да конвексан омотач неке фигуре има већу или једнаку површину и мањи или једнак обим од одговарајућих величина полазне фигуре.

Овај текст завршавамо формулацијом неколико задатака који су у вези са разматраном проблематиком.

Задатак 5. Међу равним фигурама дате површине одредити ону која има најмањи обим.

Задатак 6. Одредити криву дате дужине чији се крајеви поклапају са крајевима дате дужи и која заједно са том дужи ограничава област највеће површине.

Задатак 7. Одредити криву дате дужине која од дате полуравни одсеца област највеће површине (Дидонин проблем).

Задатак 8. Одредити најкраћу криву која дати једнакостранични троугао разлаже на два дела једнаких површина.

Задатак 9. Одредити криву дате дужине која од датог угла одсеца део највеће површине.