РЕШАВАЊЕ ИРАЦИОНАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА И НЕЈЕДНАЧИНА

Циљ предавања је да се добро науче логичке везе између дате ирационалне једначине, односно неједначине и оне која настаје њеним квадрирањем.Посебно ћу да покажем да графичко решавање ирационалних једначина и неједначина олакшава рад и доприноси бољем разумевању овог градива.

Задатак : 1. Решити једначину

(i) $\sqrt{1-x^2} = 3x - 1$

Решити неједначину

(i i) $\sqrt{1-x^2} > 3x - 1$

(i i i) $\sqrt{1-x^2} < 3x - 1.$

(i) Увек прво одређујемо домен (област дефинисаности једначине).

$1 - x^2 \geq 0$, тј. $x \in [-1,1]$

Како је непозната под квадратним кореном,а кореновање и степеновање су инверзне операције,природно је покушати ослободити се квадратног корена, квадрирањем обеју страна једначине.

$$1 - x^2 = (3x-1)^2$$

$$10x^2 - 6x = 0$$

$x = 0$ или $x = 3/5$, $\{0, 3/5\} \in [-1,1].$

(I I) Домен неједначине је $x \in [-1,1]$. Квадрирајмо неједначину (i i)

$$1 - x^2 > (3x-1)^2$$

$$10x^2 - 6x < 0$$

$$S = (0, 3/5), \quad (0, 3/5) \in [-1,1].$$

(i i i) Домен је $x \in [-1,1]$.Квадрирајмо неједначину (i i i)

$$1 - x^2 < (3x-1)^2$$

$$10x^2 - 6x > 0$$

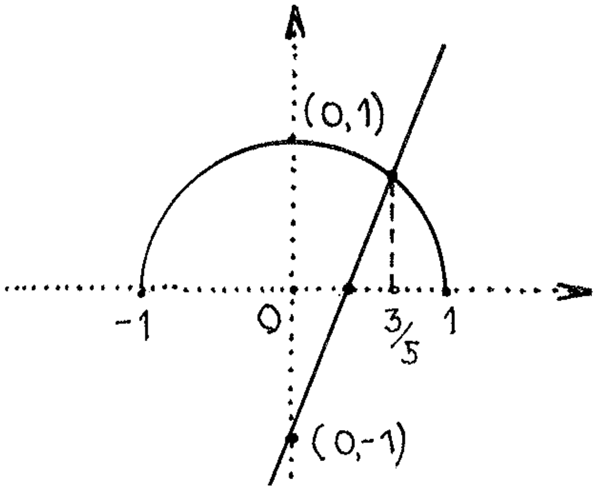
$x \in (-\infty, 0) \cup (3/5, +\infty)$ $([-1,1]$)

$$S = [-1,0) \cup (3/5,1]$$

Проверићемо графички решење једначине и неједначина из 1.примера. Приметићемо да су у свим наведеним задацима лева страна ненегативан израз, ,означићемо га са $f(x) = \sqrt{1-x^2}$,где је за свако x из домена дефинисаности $f(x) \geq$

$0.$ Изразе на десној страни означимо са $g(x) = 3x - 1.$ Можемо графички приказати те функције.

График прве је горња полукружница кружнице $x^2 + y^2 = 1$,а друге је права.



(i) Са графика лако се види да у домену $[-1,1]$,графици функција $f(x)$ и $g(x)$ имају једну заједничку тачку .Они се секу за $x = 3/5$, па је то једино решење једначине.

(i i) Са графика читамо решење неједначине: $x \in [-1\ , 3/5)$ јер је на том интервалу вредност функције $f(x)$ већа од вредности функције $g(x)$,тј. горња полукружница кружнице $x^2 + y^2 = 1$ је изнад праве.Број $3/5$ не припада решењу, јер у задатку важи строга неједнакост.

(i i i) Са графика читамо решење неједначине, $x \in (3/5, 1]$ јер су на том интервалу вредност функције $g(x)$ већа од вредности функције $f(x)$.

Сада се питамо зашто смо у (I) задату изгубили решење једначине $x = 0$?

Зашто смо у (i i) задатку изгубили скуп $[-1,0]$, а у (i I i) задатку је скуп $[-1,0)$ вишак ?

Природно, отворићемо питање логичке везе услова:

(a) $a = b$ и $a^2 = b^2$,

(b) $a > b$ *и* $a^2 > b^2$,

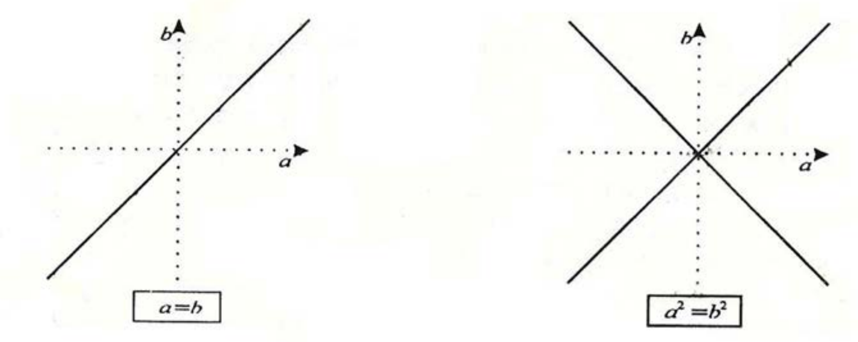
(c) $a < b$ и $a^2 < b^2$.

Променљива у овим формулама је пар бројева (a, b),а њен универзални скуп R^2.

Истинитосни скуп за $a = b$ је права,а за $a^2 = b^2$ две праве:

$$a^2 = b^2 \leftrightarrow (a - b)(a + b) = 0$$

$$\leftrightarrow a - b = 0 \text{ или } a + b = 0$$

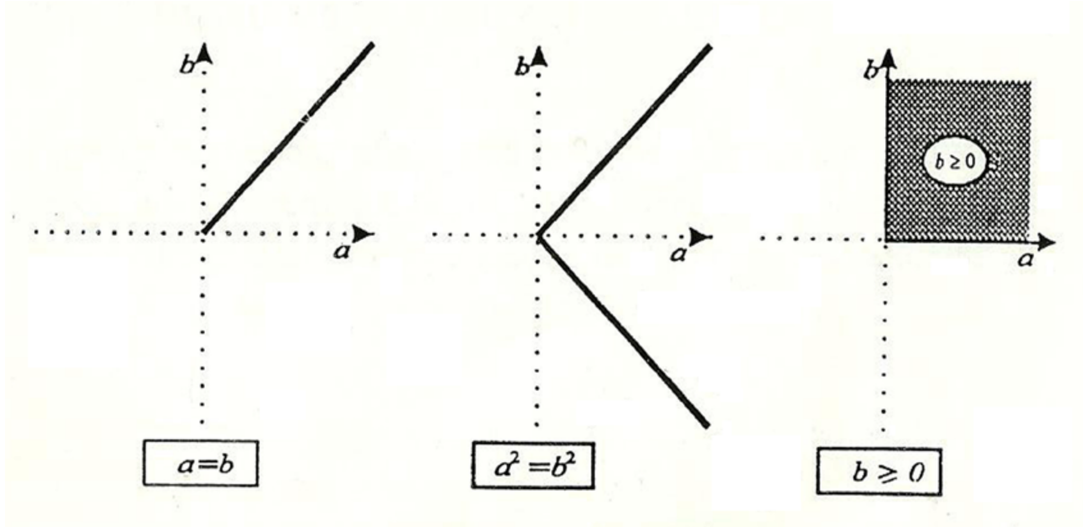


Видимо да је тачан следећи универзалан исказ:

$$(\forall a)\ (\forall b)\ \ a = b\ \rightarrow a^2 = b^2$$

Дакле,квадрирањем једначине добијамо шири услов,тј.квадратна једначина има сва решења која има и дата,са м о г у ћ е н е к и м а ј о ш .То оправдава уобичајни начин решавања:квадрирамо једначину и решавамо тако добијену нову.Затим вршимо проверу и одбацујемо она решења која дату једначину не задовољавају.При том сигурни смо да ниједно решење дате једначине нећемо изгубити.

Упоређујући услове $a = b$ и $a^2 = b^2$ можема предпоставити да је $a \geq 0$, тј.ту полураван узети за универзални скуп.Тада, у оквирима ове полуравни,комбинујући услове



I

и додајући квантификаторе,добијамо истинит исказ

$$(\forall a \geq 0)(\forall b)\ \ a = b \leftrightarrow\ a^2 = b^2\ \text{ и }\ b \geq 0 \qquad (1)$$

Сад задатак под (i) можемо елегантније решити.Домен дефинисаности је $[-1,1]$. Даље,

$$\sqrt{1-x^2} = 3x - 1 \leftrightarrow \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 = (3x-1)^2 \text{ и } 3x - 1 \geq 0 \qquad \text{(према (1))}$$

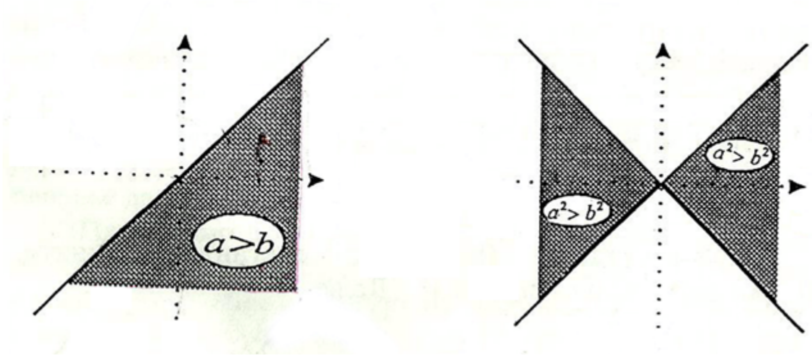
$$\leftrightarrow 10x^2 - 6x = 0 \text{ и } x \geq 1/3$$

$$\leftrightarrow x = 3/5.$$

У овом примеру је $a = \sqrt{1 - x^2}$, $b = 1 - 3x$.

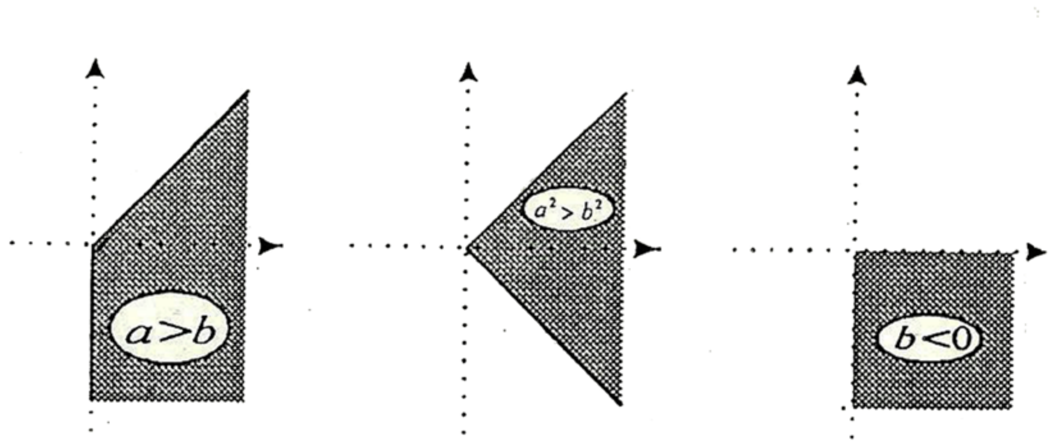
Размотримо сад однос услова $a > b$ и $a^2 > b^2$. Пошто је

$$a^2 > b^2 \leftrightarrow a^2 - b^2 > 0 \leftrightarrow (a - b)(a + b) > 0$$
$$\leftrightarrow (a - b > 0 \ \text{ и } \ a + b > 0) \ \text{ или } \ (a - b < 0 \ \text{ и } \ a + b < 0),$$



а истинтосни скуп за $a - b > 0$ је део равни испод праве $a = b$, а за $a - b < 0$ изнад те праве,и слично интерпретирајући друге две неједнакости, то ће нам наредне слике јасно представити да услови које разматрамо нису упоредиви.

Гледајући ове услове у полуравни $a \geq 0$ и комбинујући са условом $b < 0$ (у тој полуравни)



Долазимо до следеће еквиваленције

$$(\forall a \geq 0)(\forall b) \quad a > b \leftrightarrow a^2 > b^2 \ \text{ или } \ b < 0 \qquad (2)$$

Решимо сад задатак под (i i) . Домен је $[-1,1]$. Даље,

$\sqrt{1 - x^2} > 3x - 1 \leftrightarrow$

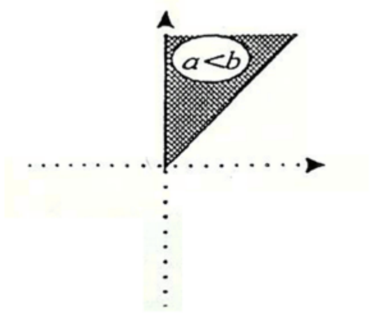
$\leftrightarrow \ (\sqrt{1 - x^2})^2 > (3x - 1)^2$ или $3x - 1 < 0$ (према 2)

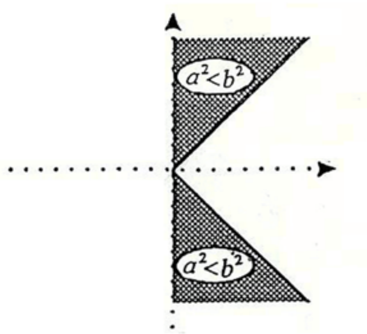
$\leftrightarrow \ 10x^2 - 6x < 0$ или $x < 1/3$

$\leftrightarrow \ 0 < x < 3/5$ *или* $x < 1/3$ $(x \in [-1,1])$

$\leftrightarrow \ x \in [-1\,,3/5)$

У полуравни $a \geq 0$,однос услова $a < b$ и $a^2 < b^2$, интерпретирају нам следеће слике





и видимо да

$$(\forall a \geq 0)(\forall b)\ \ a < b \rightarrow a^2 < b^2.$$

Резонујући слично малопре и комбинујући са условом $b > 0$, налазимо еквиваленцију

$$(\forall a \geq 0)(\forall b)\ a < b \leftrightarrow a^2 < b^2 \ \text{ и } \ b > 0 \qquad (3)$$

Вратимо се задатку под (i i i).Домен је $[-1,1]$. Даље,

$$\begin{aligned} &\sqrt{1-x^2} < 3x - 1 \leftrightarrow \\ &\qquad \leftrightarrow (\sqrt{1-x^2})^2 < (3x-1)^2 \quad \text{и} \ 3x - 1 > 0 \qquad \text{према (3)} \\ &\qquad \leftrightarrow 10x^2 - 6x > 0 \quad \text{и} \quad x > 1/3 \\ &\qquad \leftrightarrow x \in (3/5, 1]. \end{aligned}$$

Наведимо и ову еквивалентност :

$$(\forall a \geq 0)(\forall b \geq 0)\ a > b \leftrightarrow a^2 > b^2, (a < b \leftrightarrow a^2 < b^2) \qquad (4)$$

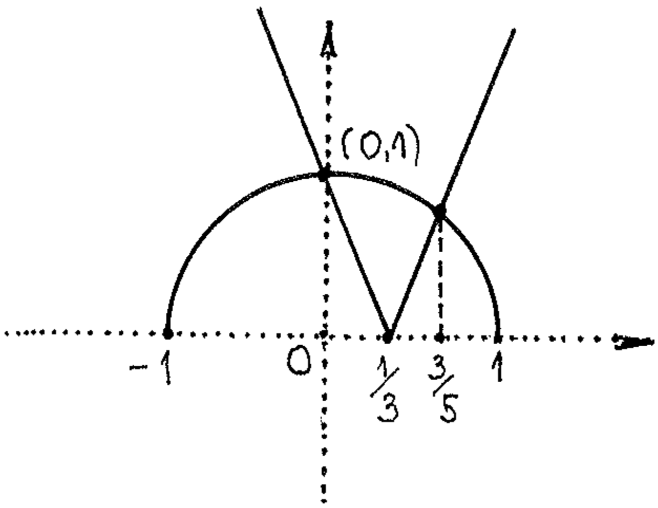
Задаци:

1 .Решити једначину $\sqrt{1-x^2} = |3x - 1|$

Решење: Домен је $[-1,1]$.

$$\sqrt{1-x^2} = |1-3x| \leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x^2} = 3x - 1 \quad x \in (^1/_3, 1] \quad \leftrightarrow \quad x = 3/5 \\ \\ \sqrt{1-x^2} = 1 - 3x \quad x \in [-1, ^1/_3] \quad \leftrightarrow \quad x = 0 \end{cases}$$

Решење је скуп $\{0,\ 3/5\}$. Применили смо еквивалентност (4) јер су и лева и десна страна једначине ненегативни изрази. Погледајмо графичко решење задатка:



2. Решити неједначину

$$\sqrt{1-x^2} > |3x-1|$$

Решење: Домен је $x \in [-1,1]$.

Означимо са $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ и $g(x) = |3x-1|$ леву и десну страну неједначине, $f(x) \geq 0,\ g(x) \geq 0$, па примењујући еквивалентност (4), биће

$\sqrt{1-x^2} > |3x-1|$

$\leftrightarrow 1-x^2 > 9x^2-6x+1$

$\leftrightarrow 10x^2-6x < 0$

$\leftrightarrow x \in (0, {}^{3}\!/_{5})$.

Погледајмо и графичко решење на претходној слици.

3.Решити неједначину $\sqrt{1-x^2} < |3x-1|$

Решење: Домен је $[-1,1]$

Нека је $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, а $g(x) = |3x-1|$, $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$,па опет применимо еквивалентност (4),

$\sqrt{1-x^2} < |3x-1|$

$\leftrightarrow\ 1-x^2 < 9x^2-6x+1 > 0$

$\leftrightarrow 10x^2 - 6x > 0 \qquad (x \in [-1, 1)])$

$\leftrightarrow x \in \left[-1,0) \cup ({}^{3}\!/_{5}, 1\right]$

Погледајмо играфичко решење на претходној слици.

4.Решити следећи задатак:

(i) $\sqrt{x+3} > \sqrt{x} - \sqrt{2-x},$ (i i) $\sqrt{x+3} < \sqrt{x} - \sqrt{2-x}$ (I I I) $\sqrt{x+3} = \sqrt{x} - \sqrt{2-x}$

(i v)$\sqrt{x+3} > \left|\sqrt{x} - \sqrt{2-x}\right|$, (v) $\sqrt{x+3} < \left|\sqrt{x} - \sqrt{2-x}\right|$, (v I)$\sqrt{x+3} = \left|\sqrt{x} - \sqrt{2-x}\right|$

(I) Решење задатка $\sqrt{x+3} > \sqrt{x} - \sqrt{2-x}$.

Домен дефинисаности је скуп $[0, 2]$. Посматрајмо општи тип такве неједначине

$$\sqrt{A} > \sqrt{B} - \sqrt{C}, \quad A \geq 0,\ B \geq 0,\ C \geq 0.$$

Биће

$$\begin{aligned} \sqrt{A} > \sqrt{B} - \sqrt{C} &\leftrightarrow A > B + C - 2\sqrt{BC} \quad \text{или } \sqrt{B} - \sqrt{C} < 0 \\ &\leftrightarrow 2\sqrt{BC} > B + C - A \\ &\leftrightarrow 4BC > (B + C - A)^2 \quad \text{или } B + C - A < O. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{B} - \sqrt{C} < 0 &\leftrightarrow \sqrt{B} < \sqrt{C} \\ &\leftrightarrow B < C \end{aligned}$$

У нашем случају A= x +3, B= $x, C = 2 - x$,односно $x < 2 - x \leftrightarrow x < 1$.

B+$C - A < 0$, односно $x + 2 - x - x - 3 < 0 \leftrightarrow -x - 1 < 0 \leftrightarrow x > -1$.

Дакле, решења је скуп $S = [0,2]$, па услов $4BC > (B + C - A)^2$,у овом случају не треба ни разматрати.

Графичко решење задатка (i) .Означимо са $f(x) = \sqrt{x+3}$ израз на левој страни неједначине,где је за свако $x \in [-3, +\infty)$, $f(x) \geq 0$.

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+3} = +\infty$$

Први извод. $f'(x) = 1/_{2\sqrt{x+3}}$

$f' > 0$ за $x \in (-3, +\infty)$ што значи да је $f(x)$ растућа функција $x \in (-3, +\infty)$.

Примеимо да је

$$\lim_{x \to -3} f'(x) = \lim_{x \to -3} 1/_{2\sqrt{x+3}} = +\infty,$$

што геометриски можемо протумачити да тангента у тачки $(-3, f(-3))$ постаје вертикална.

Други извод. $f''(x) = -1/_{4(x+3)\sqrt{x+3}}$,

$$f''(x) < 0 \quad \text{за } x \in (-3, +\infty),$$

Па је функција конкавна за $x \in (-3 + \infty)$.

Израз на десној страни неједначине означимо са $g(x)$.Функција $g(x) = \sqrt{x} - \sqrt{2-x}$ је дефинисана на домену $[0, 2]$.

Понашање на крајевима интервала. $g(0) = -\sqrt{2},\ g(2) = \sqrt{2}.$

Нула и знак функције. $\sqrt{x} - \sqrt{2-x} > 0 \leftrightarrow \sqrt{x} > \sqrt{2-x} \leftrightarrow x > 1$

$g(x) > 0$ за $x \in (1, 2]$.Нула функције добијамо из $\sqrt{x} - \sqrt{2-x} = 0 \leftrightarrow x = 1$

$g(x) < 0$ за $x \in [0, 1)$.

Први извод. $g'(x) = {}^{1}\!/_{2\sqrt{x}} + {}^{1}\!/_{2\sqrt{2-x}} = {}^{\sqrt{2-x}+\sqrt{x}}\!/_{2\sqrt{x(2-x)}}$

$g'(x) > 0$ што значи да је $g(x)$ растућа функција за све $x \in (0, 2)$.

Приметимо да је

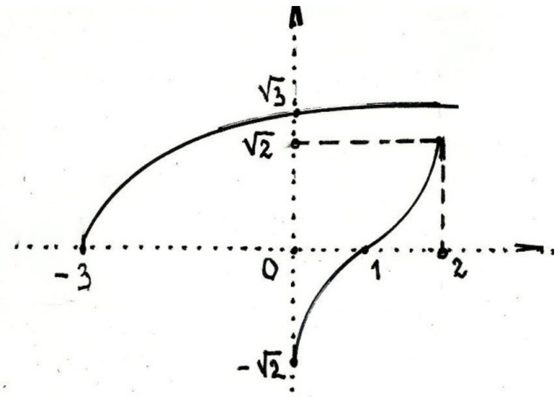
$$\lim_{x\to 0} g'(x) = \lim_{x\to 0} {}^{\sqrt{2-x}+\sqrt{x}}\!/_{2\sqrt{x(2-x)}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2} g'(x) = \lim_{x\to 2} {}^{\sqrt{2-x}+\sqrt{x}}\!/_{2\sqrt{x(2-x)}} = +\infty$$

Одатле закључујемо да тангенте у тачкама $(0, g(0))$ и $\left(2, g(2)\right)$ постају вертикалне.

$f(0) = \sqrt{3} > g(0) = -\sqrt{2}, \quad f(2) = \sqrt{5} > g(2) = \sqrt{2}.$

Са графика очитавамо да је вредност функције $f(x) = \sqrt{x+3}$ већа од вредности функције $g(x) = \sqrt{x} - \sqrt{2-x}$ на целом домену $[0, 2]$.



(i i) $\sqrt{x+3} < \sqrt{x} - \sqrt{2-x}$

Домен неједначине је интервал $[0, 2]$. Како је $\sqrt{x+3} > \sqrt{x} - \sqrt{2-x}$ за свако $x \in [0,2]$, решење неједначине је празан скуп.

(i i i) $\sqrt{x+3} = \sqrt{x} - \sqrt{2-x}$

Решење задатка је празан скуп ,јер је вредност функција $f(x) = \sqrt{x+3}$ строго већа од вредности функције $g(x) = \sqrt{x} - \sqrt{2-x}$ на целом домену $[0, 2]$.

(i v) $\sqrt{x+3} > \left|\sqrt{x} - \sqrt{2-x}\right|$

Домен дефинисаности је $x \in [0\ ,2]$.

$\sqrt{\mathrm{A}} > \left|\sqrt{B} - \sqrt{C}\right|$, $A \geq 0, B \geq 0, C \geq 0$.

Изрази на левој и десној страни неједначине су ненегативни ,па ћемо применити еквивалентност (4) за неједначине.

$\mathrm{A} > B + C - 2\sqrt{BC} \leftrightarrow 2\sqrt{BC} > B + C - A$

$\leftrightarrow 4BC > (B + C - A)^2$ или $B + C - A < 0$

$$A = x + 3, \ \ B = x, \ \ C = 2 - x$$

$B + C - A < 0$, односно $x > -1$.

Дакле решење задатка је $[0, 2]$, па услов задатка $4BC > (B + C - A)^2$ у овом случају не треба ни решавати.

Графичко решење. $f(x) = \sqrt{x+3}$, $f(x) \geq 0$ за свако $x \in [0, 2]$

$$g(x) = \left|\sqrt{x} - \sqrt{2-x}\right| = \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{2-x} & x \geq 1 \\ -(\sqrt{x} - \sqrt{2-x}) & x < 1 \end{cases}$$

$g(0) = \sqrt{2}, \quad g(1) = 0, \ g(2) = \sqrt{2}, \ f(0) = \sqrt{3}, \ f(2) = \sqrt{5}$.

Са графика читамо да је вредност функције $f(x) = \sqrt{x+3}$ над целим доменом $[0{,}2]$ већа од вредности функције $g(x) = \left|\sqrt{x} - \sqrt{2-x}\right|$.

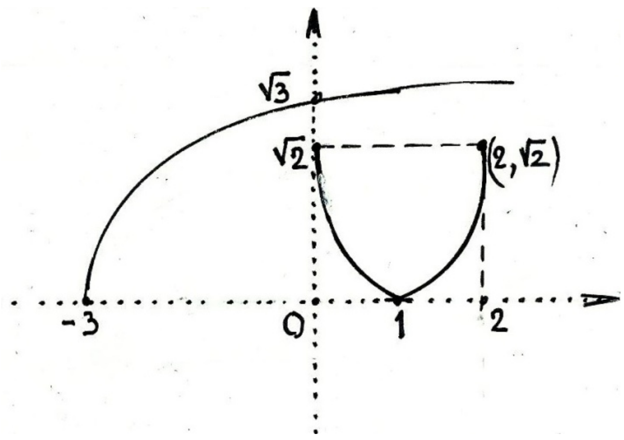
Дакле решење је $\in [0{,}2]$.

(v) $\sqrt{x+3} = \left|\sqrt{x} - \sqrt{2-x}\right|$

На основу урађеног прошлог примера закључујемо да је решење једначине празан скуп.

(v i) $\sqrt{x+3} < \left|\sqrt{x} - \sqrt{2-x}\right|$

Домен неједначине је $[0, 2]$.За свако $x \in [0, 2]$ вредност функције $f(x) = \sqrt{x+3}$,већа од вредности функције$g(x) = \left|\sqrt{x} - \sqrt{2-x}.\right|$. Решење је празан скуп.



5.Решити следећи задатак.

(i) $\sqrt{2x^2-3x-5}+1<x$ (ii) $\sqrt{2x^2-3x-5}+1>x$ (iii) $\sqrt{2x^2-3x-5}+1=x$

(iv)$\sqrt{2x^2-3x-5}+1>-x$ (v)$\sqrt{2x^2-3x-5}<-x$ $(vi)\sqrt{2x^2-3x-5}=-x$

$(vii)\sqrt{2x^2-3x-5}+1>|x|$ $(viii)\sqrt{2x^2-3x-5}<|x|$ (ix)$\sqrt{2x^2-3x-5}=|x|$

Решења:

(i) $\sqrt{2x^2-3x-5}+1<x$

Домен дефинисаности је скуп

$$(-\infty,-1]\cup\left[{}^{5}/_{2},+\infty\right).$$

Једначину трансформишемо остављајући корен на левој страни
$\sqrt{2x^2-3x-5}<x-1 \ \leftrightarrow \ 2x^2-3x-5<(x-1)^2$ и $x-1>0$

Пошто је $x-1>0$, за $x>1$, све се своди на решавање неједначине

$$x^2-x-6<0$$

На суженом домену $\left[{}^{5}/_{2},+\infty\right)$.Дакле

$x^2-x-6<0 \ \leftrightarrow x\in(-2,3)$ ($\left[{}^{5}/_{2},+\infty\right)$)

$$\leftrightarrow x\in\left[{}^{5}/_{2},3\right).$$

Графичко решење задатка.Израз на левој страни неједначине означимо са $f(x)$.Функција $f(x)=\sqrt{2x^2-3x-5}\geq 0$ за свако x домена $(-\infty,-1]\cup\left[{}^{5}/_{2}+\infty\right)$.

Понашање функције на крајевима интервала дефинисаности.

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{2x^2-3x-5}=+\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{2x^2-3x-5}=+\infty$$

$$f(-1)=0, \qquad f({}^5/_2)=0$$

Први извод функције. $f'(x)={}^{4x-3}/_{2\sqrt{2x^2-3x-5}}$

$f'(x)>0$ за $x\in\left({}^3/_4,+\infty\right)$ $\quad$ ($\left[{}^5/_2+\infty\right)$).

$f'(x)<0$ за $x\in(-\infty,{}^3/_4)$ $\quad$ ($(-\infty,-1]$

$f(x)$ је растућа на интервалу $\left[{}^5/_2,+\infty\right)$, а $f(x)$ опада на интервалу $(-\infty,-1]$

$$\lim_{x\to-1}{}^{4x-3}/_{2\sqrt{2x^2-3x-5}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to{}^5/_2}{}^{4x-3}/_{2\sqrt{2x^2-3x-5}}=+\infty$$

Што геометриски можемо протумачити да тангенте у тачкамаа $(-1,f(-1))$ и

$({}^5/_2,f({}^5/_2))$, постају верткалне.

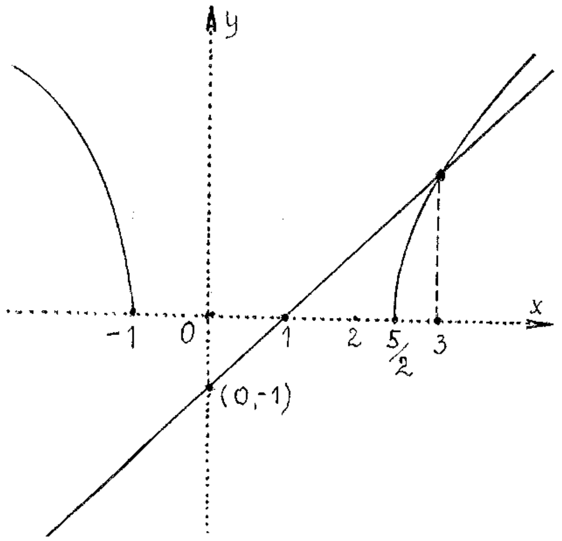
Други извод функције.

$$f''(x)={}^{-49}/_{4\sqrt{2x^2-3x-5}}$$

$f''(x)<0$, па је функција конкавна за свако $x\in(-\infty,-1]\cup\left[{}^5/_2+\infty\right)$.

Означимо са $g(x)=x-1$ израз на десној страни неједначине.То је растућа линеарна функција,дефинисана на целој реалној оси.
$g(x)\geq 0$ за $x\in[1,+\infty)$, а $g(x)<0$ за $x\in(-\infty,1)$.

Са графика читамо на интервалу $\left[{}^5/_2,3\right)$ вредности функције $g(x)$ су веће од вредноси функције $f(x)$.



$\sqrt{2x^2-3x-5} < x-1$ на интервалу $\left[{}^{5}/_{2}, 3\right)$ То је решење неједначине

$\sqrt{2x^2-3x-5} > x-1$ скуп, унија два интервала $(-\infty,-1] \cup (3,+\infty)$

Решење једначине $\sqrt{2x^2-3x-5} = x-1$, $x=3$.

(i v) $\sqrt{2x^2-3x-5}+1 > -x$

Домен дефинисаности је скуп

$(-\infty,-1] \cup \left[{}^{5}/_{2},+\infty\right)$.

Једначину трансформишемо остављајући корен на левој страни.Тада

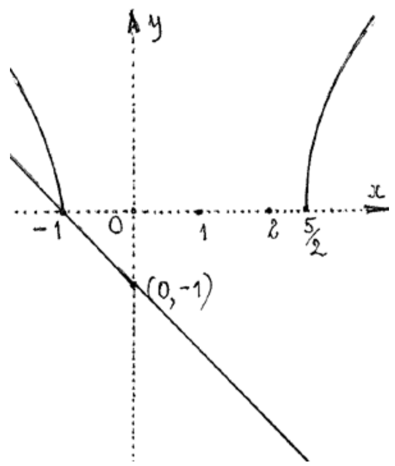
$\sqrt{2x^2-3x-5} > -x-1 \leftrightarrow 2x^2-3x-5 > (-x-1)^2$ или $-x-1 < 0$

$\leftrightarrow x^2-5x-6 > 0$ или $x > -1$

$\leftrightarrow x \in ((-\infty,-1) \cup (6,+\infty))$ или $x \in (-1,+\infty)$

$\leftrightarrow x \in ((-\infty,-1) \cup (-1,+\infty))$ $\left((-\infty,-1] \cup \left[{}^{5}/_{2},+\infty\right) \right)$.

$\leftrightarrow x \in ((-\infty,-1) \cup \left[{}^{5}/_{2},+\infty\right))$.



(v) $\sqrt{2x^2-3x-5} < -x-1$

На основу претходног задатка, решење је празан скуп.

(v i) $\sqrt{2x^2-3x-5} = -x-1$

На основу претходних задатака (iv) и (v), решење је $x=-1$

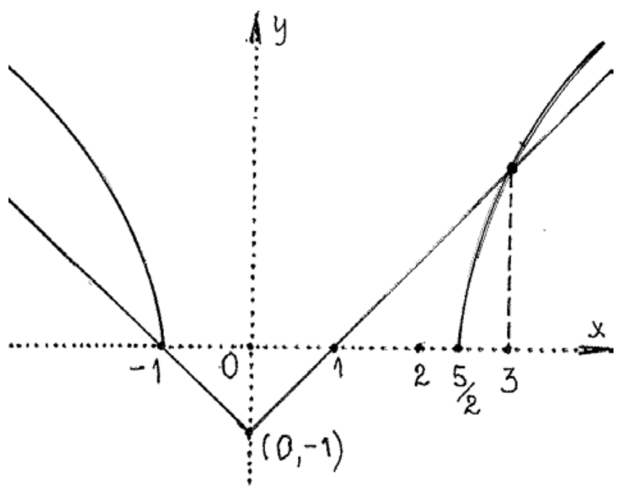
(v i i) $\sqrt{2x^2-3x-5}+1 > |x|$

Домен дефинисаности је скуп $(-\infty,-1] \cup \left[{}^{5}/_{2},+\infty\right)$

Једначину трансформишемо остављајући корен на левој страни.Тада

$$\sqrt{2x^2-3x-5} > |x|-1 \leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x^2-3x-5} > x-1 \qquad x \geq 0 \qquad ([{}^5/_2, +\infty)) \\ \\ \sqrt{2x^2-3x-5} > -x-1 \qquad x < 0 \qquad ((-\infty, -1]) \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} x \in (3+\infty) \\ \\ x \in (-\infty, -1) \end{cases}$$



(v i i i) $\sqrt{2x^2-3x-5}+1 < |x|$

Домен дефинисаности је

$$(-\infty, -1] \cup [{}^5/_2, +\infty).$$

Једначину трансформишимо остављајући корен на десној страни

$$\sqrt{2x^2-3x-5} < |x|-1 \leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x^2-3x-5} < x-1, \quad x \geq 0 \quad ([{}^5/_2, +\infty)) \\ \\ \sqrt{2x^2-3x-5} < -x-1, \quad x < 0 \quad (-\infty, -1]) \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} \left[5/2, 3\right) \\ \\ \emptyset \end{cases}$$

Решење неједначине је скуп $\left[5/2, 3\right)$.

(i x) $\sqrt{2x^2 - 3x - 5} + 1 = |x|$

Домен једначине је

$$(-\infty, -1] \cup \left[5/2, +\infty\right).$$

$$\sqrt{2x^2 - 3x - 5} = |x| - 1 \leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x^2 - 3x - 5} = x - 1, \quad x \geq 0 \quad \left(\left[5/2, +\infty\right) \right) \\ \\ \sqrt{2x^2 - 3x - 5} = -x - 1, \quad x < 0 \quad \left((-\infty, -1] \right) \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \\ x = -1. \end{cases}$$

Решење једначине је скуп $\{3, -1\}$

6 .Решити једначину.

$$\sqrt{3x + 1} - \sqrt{x + 4} = 1$$

Домен дефинисаности је скуп

$$\left[-1/3, +\infty\right).$$

$$\sqrt{3x + 1} = 1 + \sqrt{x + 4} \leftrightarrow \left(\sqrt{3x + 1}\right)^2 = \left(1 + \sqrt{x + 4}\right)^2$$

$$\leftrightarrow \quad 3x + 1 = 1 + 2\sqrt{x + 4} + x + 4$$

$$\leftrightarrow \quad 2\sqrt{x + 4} = 2x - 4 \qquad \text{и} \qquad 2x - 4 \geq 0$$

$$\leftrightarrow \sqrt{x + 4} = x - 2 \qquad \text{и} \qquad x \geq 2 \quad \left(\left[-1/3, +\infty\right) \right)$$

$$\leftrightarrow x + 4 = x^2 - 4x + 4 \qquad \text{и} \qquad x \geq 2$$

$\leftrightarrow x^2 - 5x = 0$

$\leftrightarrow x = 0$ или $x = 5$ и $x \geq 2$

$\leftrightarrow x = 5.$

7. Решити једначину

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$$

Домен дефинисаности једначине је скуп

$[1, +\infty).$

Транформишимо једначину на следећи начин

$\sqrt{x-1+4-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-1+9-6\sqrt{x-1}} = 1$

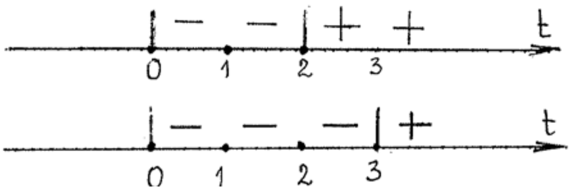
$\leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2} = 1$

$\leftrightarrow \left|\sqrt{x-1} - 2\right| + \left|\sqrt{x-1} - 3\right| = 1$

$\leftrightarrow |t-2| + |t-3| = 1$ (*)

Увели смо смену $t = \sqrt{x-1}, t \geq 0$

Прикажимо графички знак израза $t - 2$ и $t - 3$ на скупу $t \in [0, +\infty).$



$\leftrightarrow t = 2$.

Број 2 није из интервала $[0, 2).$

Ако $t \in [2, 3)$, тада је једначина $(*)$

$\leftrightarrow t - 2 - (t - 3) = 1$

$\leftrightarrow 0\, t = 0$

Решење је свако t из интервала $[2, 3).$

Ако $t \in [3, +\infty)$ тада је једначина (*)

$\leftrightarrow\ t-2+t-3=1$

$\leftrightarrow\ 2t=6$

$\leftrightarrow\ t=3.$

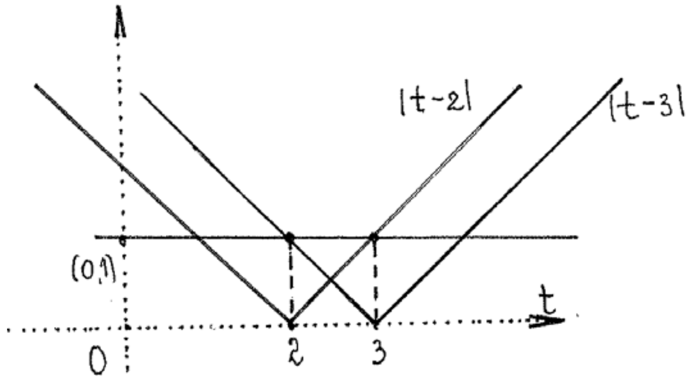
Број 3 је из интервала $[3,+\infty)$. Дакле решење једначине по $t=\sqrt{x-1}$

Је $\forall t\in[2,3]$, па је решење полазне једначине $\forall\, x\in[5,10]$.

Лако се чита са графика решење једначине $|t-2|+|t-3|=1$.

$f(t)=|t-2|+|t-3|$, а $g(t)=1$.

Решење је свако $\forall\, t\in[2,3]$. $t=\sqrt{x-1}$, па $\forall x\in[5,10]$.



Весна Бал, Марија Бал

marijamajabal@gmail.com