



ДРУШТВО МАТЕМАТИЧА СРБИЈЕ

АКРЕДИТОВАНИ СЕМИНАР:

345

ДРЖАВНИ СЕМИНАР О НАСТАВИ
МАТЕМАТИКЕ И РАЧУНАРСТВА
ДРУШТВА МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Компетенција: К1

Приоритети: 3

ТЕМА:

ПРИМЕНА ГРАФИКА ФУНКЦИЈЕ
ЈЕДНЕ ПРОМЕНЉИВЕ У РЕШАВАЊУ
ЈЕДНАЧИНА И НЕЈЕДНАЧИНА

РЕАЛИЗАТОРИ СЕМИНАРА:

ДРАГОЉУБ ЂОРЂЕВИЋ
МИЛОСАВ МИЛЕНКОВИЋ

БЕОГРАД,
09. – 10. 02. 2019.

ПРИМЕНА ГРАФИКА ФУНКЦИЈЕ ЈЕДНЕ ПРОМЕНЉИВЕ У РЕШАВАЊУ ЈЕДНАЧИНА И НЕЈЕДНАЧИНА

Наставни процес математике у основним и средњим школама у нашој земљи у највећој мери сведен је на решавање задатака. Процес едукације ученика је најчешће у облику: упознавање са терминологијом и симболиком која се користи, дефинисање нових појмова, упознавање са својствима који су дефинисани и решавање задатака. Дакле задатак и поступак његовог решавања заузимају централно место у настави математике.

Највећи број задатака је облика: Реши једначину... или Реши неједначину... Циљ је остварен када се правилним поступком дође до тачног решења. Збирке задатака су препуне задацима са „лепим решењима“. Искуства из неких других земаља су понекад и битно другачија. Приручници из математике, који замењују и уџбенике и збирке уједно, у Аустрији, Швајцарској и неким другим земљама препуни су примера израчунавања обима и површине сложених фигура у најранијем узрасту ученика, са акцентом на приближним вредностима и поређењу добијених вредности. У старијем узрасту систематизација наставне теме се изводи кроз решавање сложеног проблема, на пример примена тригонометрије у оријентацији на отвореном мору помоћу координата објеката на мору и њихових раздаљина.

Решавање задатака је само једна од неопходних фаза у обради неке теме, али никако не би требало да буде и једини циљ. Анализа примењеног поступка решавања, анализа врсте, облика и броја решења морају бити саставни део решавања сваког математичког проблема, јер имају велики утицај на развијање како критичког става, тако и креативности код ученика, као веома пожељних особина.

Стечена знања и вештине у скицирању графика многих категорија функција једне променљиве: линеарне, квадратне, експоненцијалне, логаритамске, тригонометријске и многих других, могу бити искоришћена за ефикасно и ефектно решавање проблема који су везани за одређивање врсте и броја решења једначина и неједначина. Супериорност оваквог приступа над традиционалним алгебарским, је у томе што се процес визуализује, што разлике у врсти и типу функција које се користе често олакшавају анализу врсте и броја решења и слично, управо супротно од алгебарског приступа решавања који тек по окончању поступка омогућава такву анализу.

Потреба за оваквим приступом у решавању, који ће бити изложен је у томе што наши ученици усвојене компетенције из многих области математике, често нису у стању да преточе у функционалне компетенције у решавању различитих математичких проблема.

ОСНОВНИ ПОЈМОВУ О ФУНКЦИЈАМА ЈЕДНЕ ПРОМЕНЉИВЕ И ЊИХОВИМ ГРАФИЦИМА

Нека су x и y координате тачке P у правоуглом Декартовом координантном систему $P(x, y)$.

Скуп $\{P(x, y) \mid x \in D_f, y = f(x)\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ назива се *график функције* f .

Координанта x се назива *апсциса*, координанта $y = f(x)$ *ординанта*, а једначина $y = f(x)$ *функционална зависност*.

Користећи се основним знањима везаним за примену графика функција могуће је на једноставан, разумљив и визуелно убедљив начин решити многе сложене облике једначина и неједначина.

Решења једначине облика: $f(x) = g(x)$ су апсцисе (x -координате) пресечних тачака графика функција $y = f(x)$ и $y = g(x)$.

Решења неједначине облика: $f(x) > g(x)$ је област $(a, b) \subseteq D_f \cap D_g$ за коју важи да је за сваки $x \in (a, b)$ ордината графика функције $f(x)$ већа од ординате функције $g(x)$, односно график функције $y = f(x)$ је "изнад" графика функције $y = g(x)$.

Решења неједначине облика: $f(x) < g(x)$ је област $(a, b) \subseteq D_f \cap D_g$ за коју важи да је за сваки $x \in (a, b)$ ордината графика функције $f(x)$ мања од ординате функције $g(x)$, односно график функције $y = f(x)$ је "испод" графика функције $y = g(x)$.

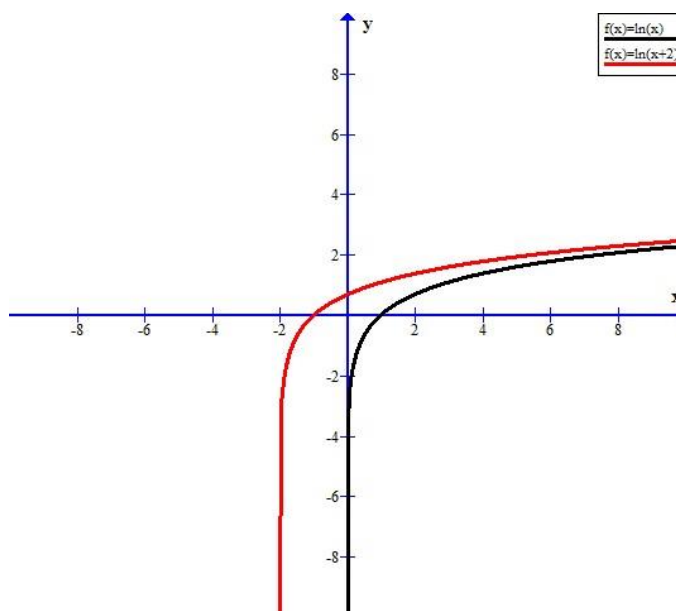
Термини "изнад" и "испод" имају значење у складу са визуелним представама које ученици имају са нацртаним графицима и веома лако се усвајају.

ТВРЂЕЊА КОЈА СЕ КОРИСТЕ ЗА ДОБИЈАЊЕ ГРАФИКА ФУНКЦИЈА ЈЕДНЕ ПРОМЕНЉИВЕ НА ОСНОВУ ПОЗНАТИХ ГРАФИКА

- График функције $y = f(x-a)$, добија се хоризонталном translацијом (по x -оси) познатог графика функције $y = f(x)$.

Translација је „у десно“ ако је $a > 0$, или „у лево“ ако је $a < 0$.

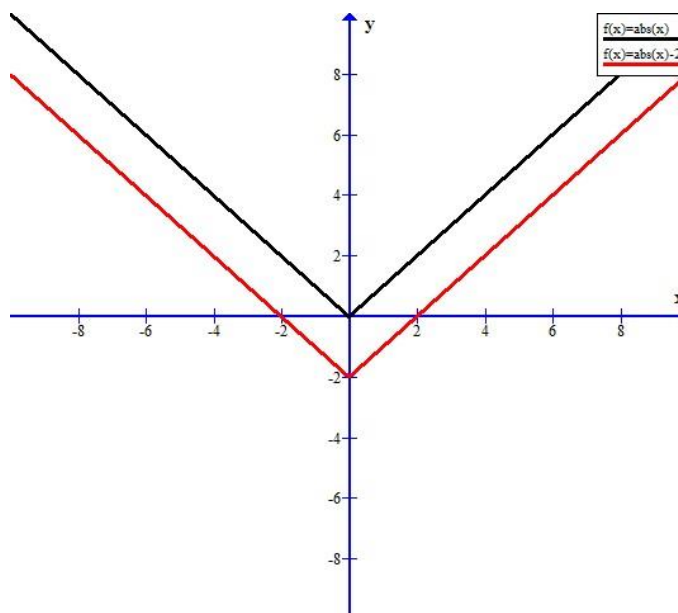
Пример: $f(x) = \ln x$
 $y = f(x+2) = \ln(x+2)$



- График функције $y = f(x)+a$, добија се вертикалном translацијом (по y -оси) познатог графика функције $y = f(x)$.

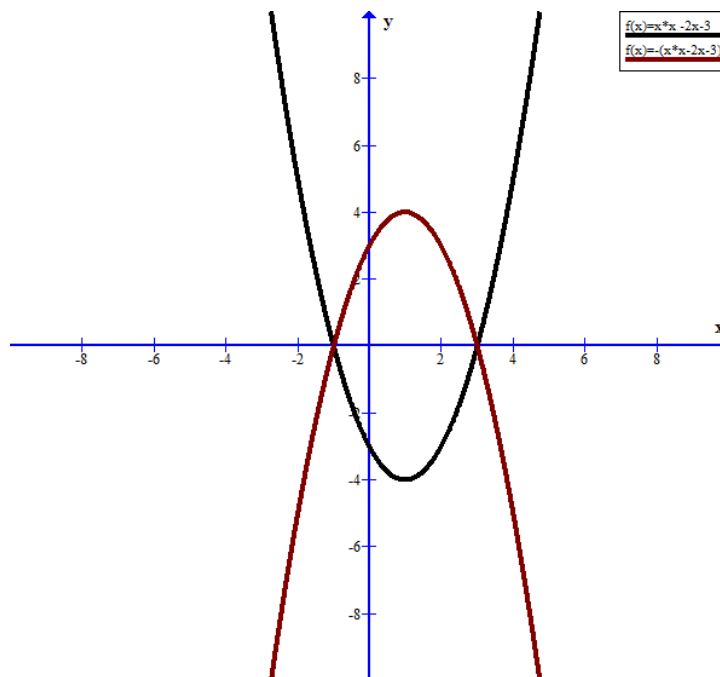
Translација је „на горе“ ако је $a > 0$, или „на доле“ ако је $a < 0$.

Пример: $f(x) = |x|$
 $y = f(x) - 2 = |x| - 2$



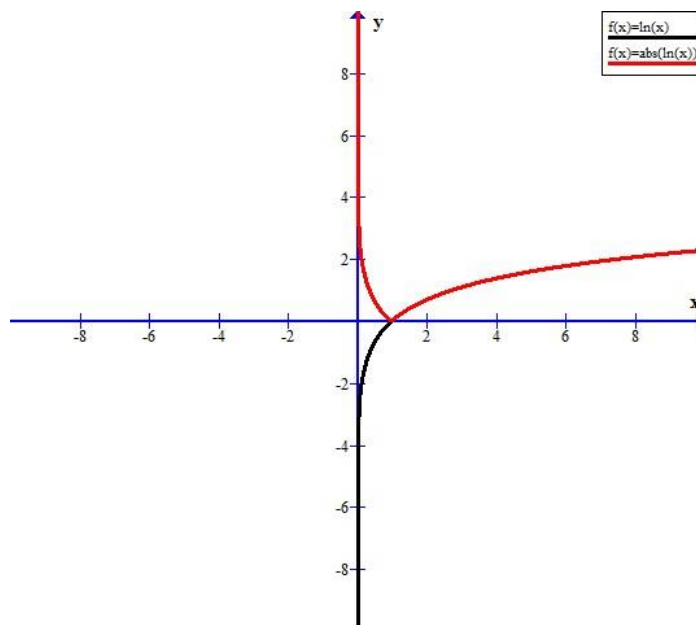
- График функције $y = -f(x)$, добија се симетричним пресликавањем у односу на x -осу познатог графика функције $y = f(x)$.

Пример: $f(x) = x^2 - 2x - 3$
 $y = -f(x) = -(x^2 - 2x - 3)$



- График функције $y = |f(x)|$ је скуп тачака $G_y = \{P(x, y) \mid x \in D_f, y = |f(x)|\}$ и добија се симетричним пресликавањем у односу на x -осу познатог графика функције $y = f(x)$, који је испод x -осе, а део графика функције $y = f(x)$ који је изнад x -осе, пресликава се у график функције $y = |f(x)|$ идентички.

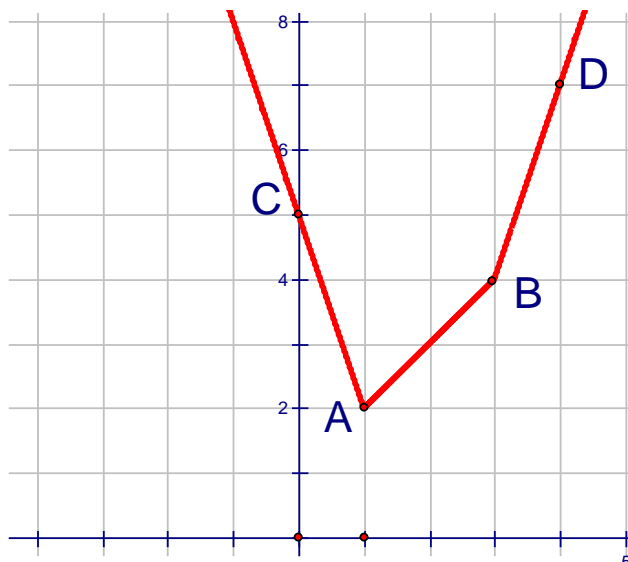
Пример: $f(x) = \ln x$
 $y = |f(x)| = |\ln x|$



ПРИМЕРИ ЦРТАЊА ГРАФИКА ФУНКЦИЈЕ ЈЕДНЕ ПРОМЕНЉИВЕ

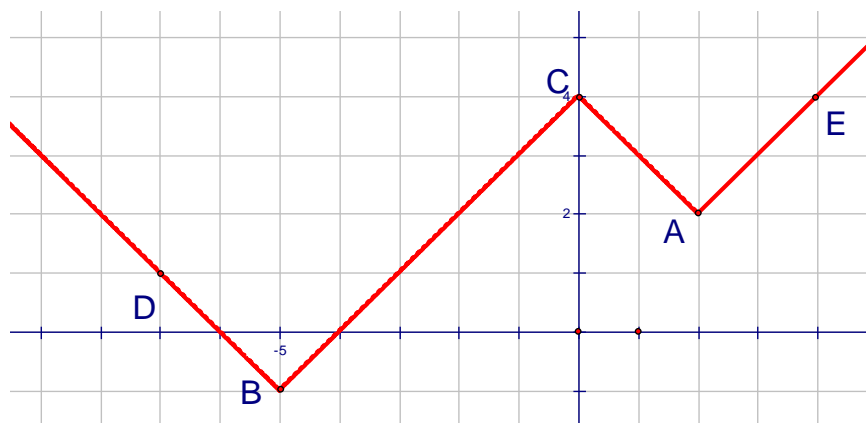
Пример 1. Нацртати график функције $f(x) = 2|x - 1| + |x - 3|$.

Решење: График функције ће бити изломљена линија која се састоји од једне дужи и две полуправе. Једина темена (чворови) те изломљене линије су тачке $A(1, f(1))$ и $B(3, f(3))$ тј. тачке $A(1, 2)$ и $B(3, 4)$ па је график унија дужи AB и полуправих које полазе из тачака A и B . У циљу што бржег цртања графика ове функције треба израчунати координате двеју тачака C и D чије апсцисе су било која тачка мања од 1 и било која већа од 3 на пример $C(0, 5)$ и $D(4, 7)$ јер тада имамо одређене полуправе AC и BD .



Пример 2. Нацртати график функције: $f(x) = |x - 2| + |x + 5| - |x| - 3$

Решење: График функције ће бити изломљена линија која се састоји од две дужи и две полуправе на крајевима те изломљене линије. Једина темена те изломљене линије су тачке $A(2, f(2))$, $B(-5, f(-5))$ и $C(0, f(0))$ тј. $A(2, 2)$, $B(-5, -1)$ и $C(0, 4)$, па је график функције $f(x)$ унија дужи BC , CA и полуправих које полазе из тачака B и A . Треба још израчунати координате двеју тачака D и E , $x_D < -5$ и $x_E > 2$ на пример $D(-7, 1)$ и $E(4, 4)$ јер тада имамо одређене полуправе BD и AE .



Прикажимо сада графички једну функцију у којој се јавља "двојна" апсолутна вредност.

Пример 3. Приказати графички функцију $f(x) = 1 - ||x - 1| - 3|$.

Решење: Поступак ослобађања модула је сличан поступку ослобађања заграда. Најпре се ослобађамо унутрашњих модула.

Израз $|x - 1| = 0$ за $x = 1$, дакле $x = 1$ је нула модула "првог реда".

1) За $x < 1$ дата функција се трансформише у функцију $f(x) = 1 - |-x + 1 - 3|$,

тј. $f(x) = 1 - |-x - 2|$.

Израз $|-x - 2| = 0$ за $x = -2$, дакле $x = -2$ је нула модула "другог реда".

За $x < 1$ и $x < -2$, односно само $x < -2$ последњи облик функције се трансформише у функцију $f(x) = x + 3$.

За $-2 \leq x < 1$ функција $f(x) = 1 - |-x - 2|$ добија облик $f(x) = -x - 1$.

2) За $x \geq 1$ дата функција се трансформише у функцију $f(x) = 1 - |x - 1 - 3|$,

тј. $f(x) = 1 - |x - 4|$.

Израз $|x - 4| = 0$ за $x = 4$, дакле $x = 4$ је нула модула "другог реда".

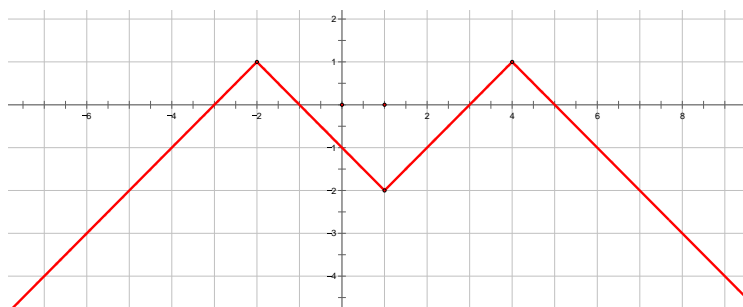
За $1 \leq x < 4$ функција $f(x) = 1 - |x - 4|$ се трансформише у функцију $f(x) = x - 3$.

За $x > 4$ функција $f(x) = 1 - |x - 4|$ добија облик $f(x) = -x + 5$.

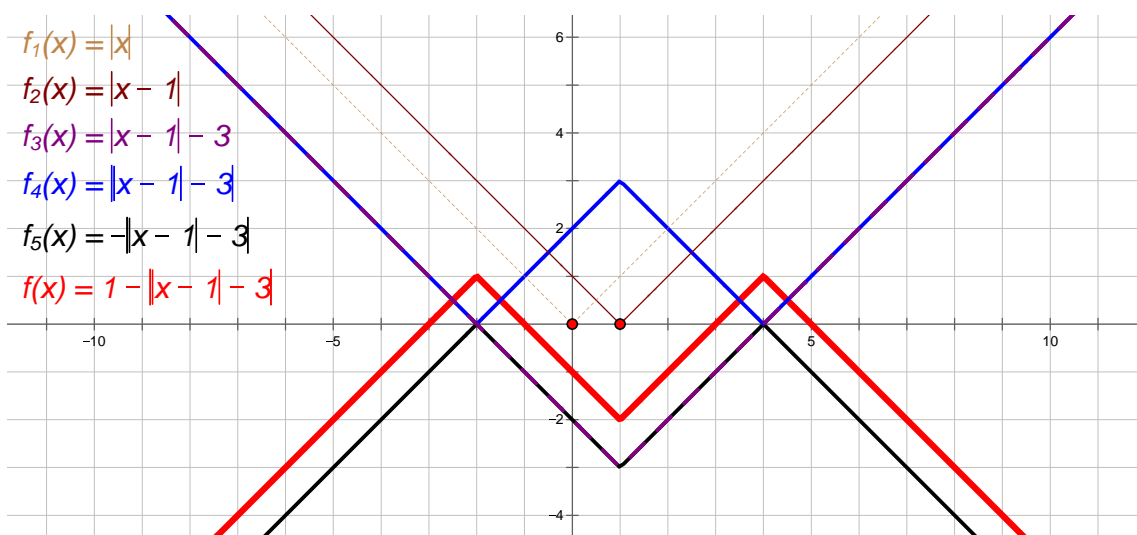
Дату функцију смо раставили на "обичне" линеарне функције у сваком интервалу чије су границе, овом приликом, нуле модула.

$$f(x) = 1 - ||x - 1| - 3| = \begin{cases} x + 3, & x < -2 \\ -x - 1, & -2 \leq x < 1 \\ x - 3, & 1 \leq x < 4 \\ -x + 5, & x \geq 4 \end{cases}$$

График дате функције је скуп графика свих „обичних“ линеарних функција у одговарајућим интервалима:



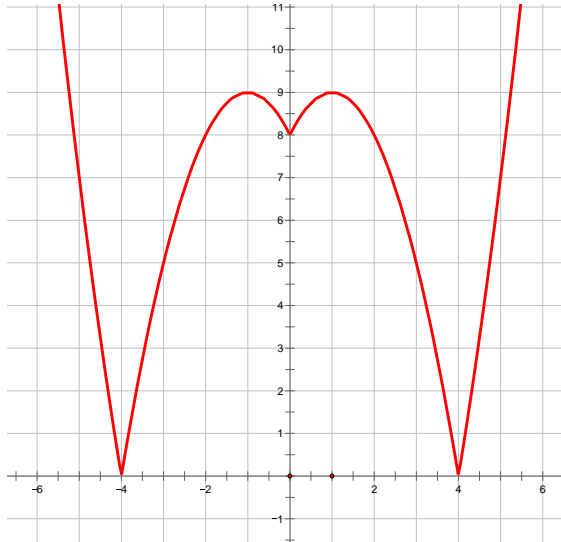
До графика функције $f(x) = 1 - ||x - 1| - 3|$ се могло доћи и на следећи начин: прво нацртамо график функције $f_1(x) = |x|$ а затим га транслирамо удесно дуж x -осе за јединичну дуж; тако добијамо график функције $f_2(x) = |x - 1|$. Ако график функције $f_2(x)$ транслирамо дуж y -осе у негативном смеру за три јединичне дужи добијамо график функције $f_3(x) = |x - 1| - 3$. Ако делове графика функције $f_3(x)$ који су испод x -осе (негативне вредности функције) пресликамо симетрично у односу на x -осу а ненегативне вредности функције $f_3(x)$ остану исте онда добијамо график функције $f_4(x) = ||x - 1| - 3|$. Затим график функције $f_4(x)$ пресликамо симетрично у односу на x -осу и добијамо график функције $f_5(x) = -||x - 1| - 3|$. График функције $f(x)$ се добија тако што се график функције $f_5(x)$ транслира дуж y -осе у позитивном смеру за јединичну дуж.



Пример 4. Нацртати график функције $f(x) = |x^2 - 2|x| - 8|$.

Решење: С обзиром на апсолутну вредност функција има облик

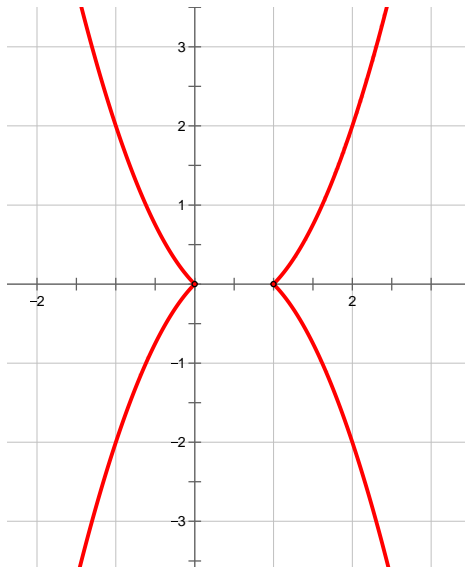
$$f(x) = \begin{cases} |x^2 - 2x - 8|, & x \geq 0 \\ |x^2 + 2x - 8|, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 2x - 8, & x \geq 4 \\ -x^2 + 2x + 8, & 0 \leq x < 4 \\ x^2 + 2x - 8, & x \leq -4 \\ -x^2 - 2x + 8, & -4 < x < 0 \end{cases}.$$



Пример 5. Одредити скуп тачака у координатној равни који је дефинисан на следећи

начин: $|y| = x^2 - x$.

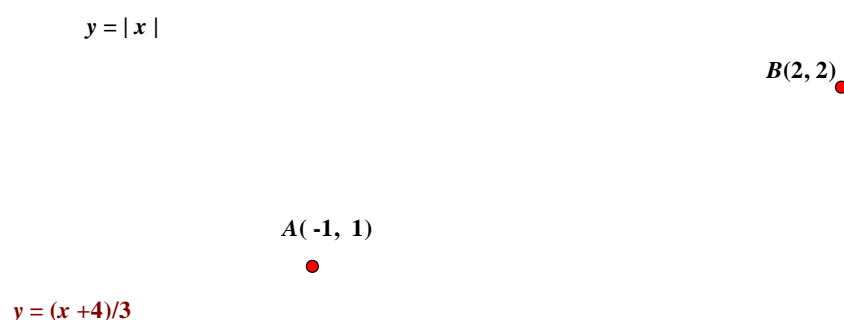
Решење: Једначина датог скупа је дефинисана за $x^2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$ и за такве x има облик $y = \pm(x^2 - x)$.



ПРИМЕРИ ЗАДАТАКА СА РЕШАВАЊЕМ ЈЕДНАЧИНА И НЕЈЕДНАЧИНА НА ОСНОВУ ПОЗНАТИХ ГРАФИКА ФУНКЦИЈА ЈЕДНЕ ПРОМЕНЉИВЕ

- ПРИМЕР: а) Реши једначину: $3|x| = x + 4$ т.ј. $|x| = (x + 4)/3$
 б) Реши неједначину: $3|x| > x + 4$ т.ј. $|x| > (x + 4)/3$
 в) Реши неједначину: $3|x| < x + 4$ т.ј. $|x| < (x + 4)/3$

РЕШЕЊА: За добијање решења прво ћемо формирати графике функција



- а) За решења једначине $3|x| = x + 4$ која је еквивалентна са једначином $|x| = \frac{x+4}{3}$ односно $|x| = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ користићемо графике функција: $f(x) = |x|$ и $g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$. Како су пресечне тачке тих графика: $A(-1, 1)$ и $B(2, 2)$ решење једначине облика: $f(x) = g(x)$ су апцисе тих пресечних тачака: $x = -1$ и $x = 2$, т.ј. $x \in \{-1, 2\}$
- б) За решење неједначине $3|x| > x + 4$ користимо графике истих функција као и у претходном случају а решење за $f(x) > g(x)$ је област за коју важи да је график функције $y = f(x)$ "изнад" графика функције $y = g(x)$, а то је: $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$
- в) За решење неједначине $3|x| < x + 4$ користимо графике истих функција као и у претходном случају а решење за $f(x) < g(x)$ је област за коју важи да је график функције $y = f(x)$ "испод" графика функције $y = g(x)$, а то је: $x \in (-1, 2)$

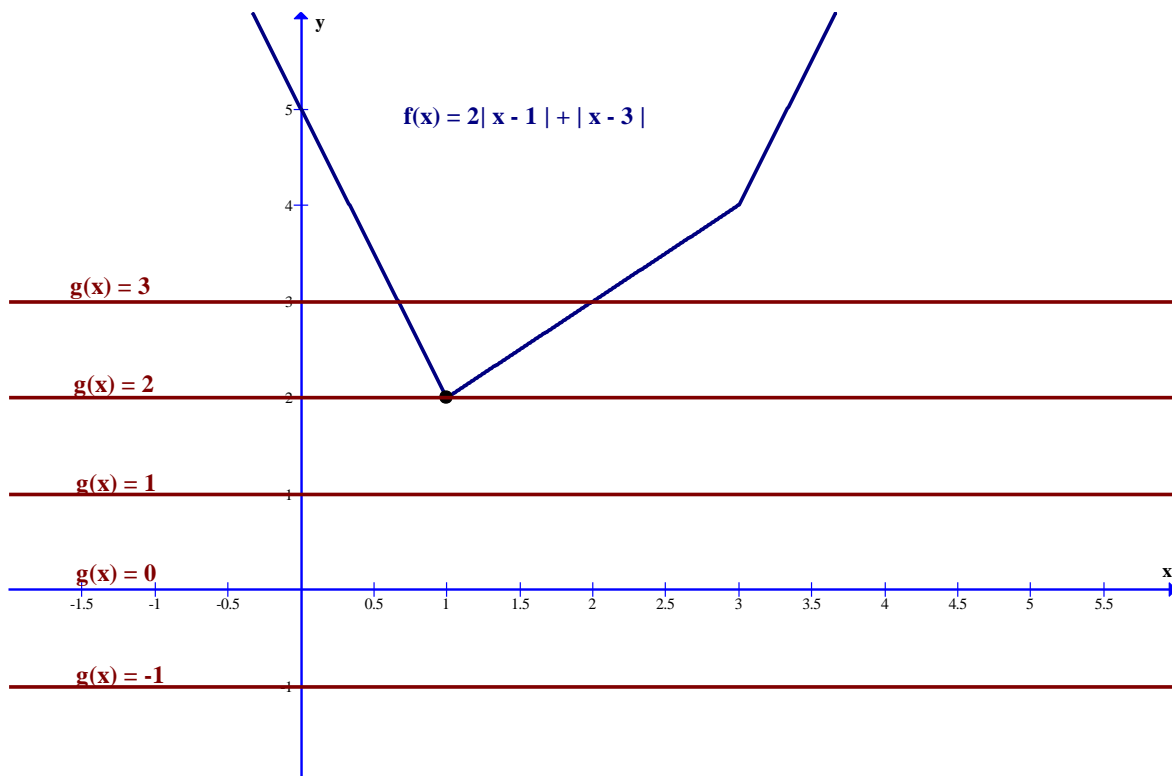
ЗАДАТАК 1: Одреди реалан параметар a тако да једначина $2|x - 1| + |x - 3| = a$ има тачно једно решење.

РЕШЕЊЕ:

Прво ћемо формирати график функције $f(x) = 2|x - 1| + |x - 3|$ на већ познати начин, а након тога и графике за функцију $g(x) = a$ (хоризонталне праве које секу y -осу у тачки $(0, a)$)

$$f(x) = \begin{cases} -3x + 5 & \text{ако } x \in (-\infty, 1) \\ x + 1 & \text{ако } x \in [1, 3) \\ 3x - 5 & \text{ако } x \in [3, +\infty) \end{cases} \quad \text{и} \quad g(x) = a, \quad a \in \{-1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

На основу графика функција $f(x)$ и $g(x)$ у истом координатном систему, лако се може закључити да задата једначина има једно решење за $a = 2$ (апциса једне пресечне тачке графика), јер за $a < 2$ нема решења (нема пресечних тачака графика), а за $a > 2$ једначина има два решења (апцисе две пресечне тачке графика).

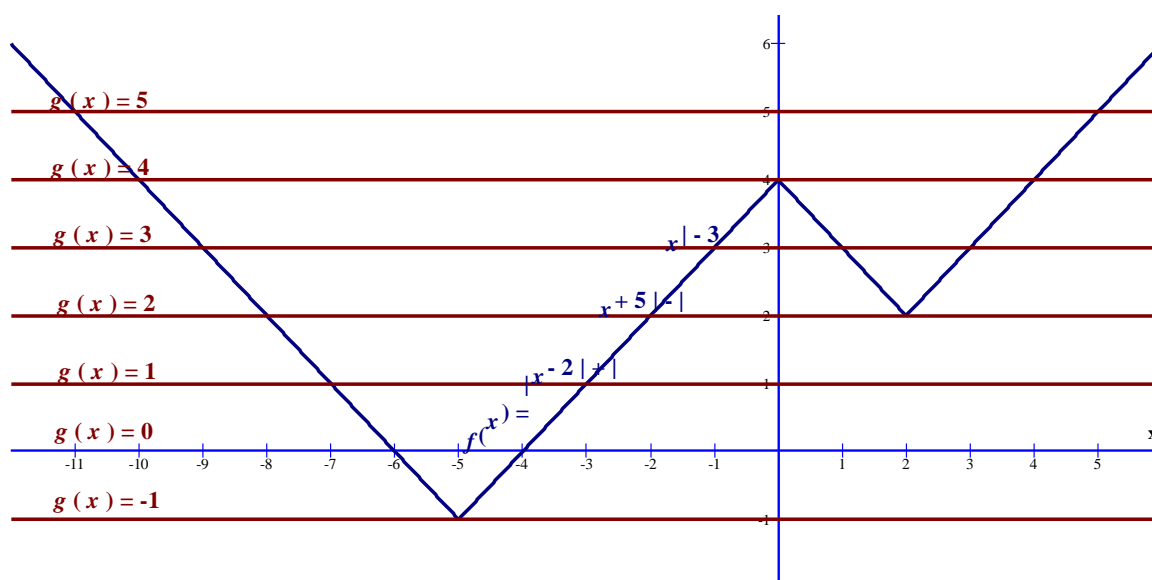


ЗАДАТАК 2: Одреди реалан параметар a тако да једначина

$$|x - 2| + |x + 5| - |x| = a + 3 \text{ има највећи број решења.}$$

РЕШЕЊЕ: За решење овог задатка користићемо графике функција:

$$f(x) = |x - 2| + |x + 5| - |x| - 3 \quad \text{и} \quad g(x) = a, \quad a \in \{-1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$



Са графика се лако може закључити да задата једначина:

- | | |
|-----------------|--------------------|
| за $a < -1$ | нема решења, |
| за $a = -1$ | има једно решење, |
| за $-1 < a < 2$ | има два решења, |
| за $a = 2$ | има три решења, |
| за $2 < a < 4$ | има четири решења, |
| за $a = 4$ | има три решења и |
| за $a > 4$ | има два решења. |

Коначно решење задатка је: $2 < a < 4$ тј. $a \in (2, 4)$.

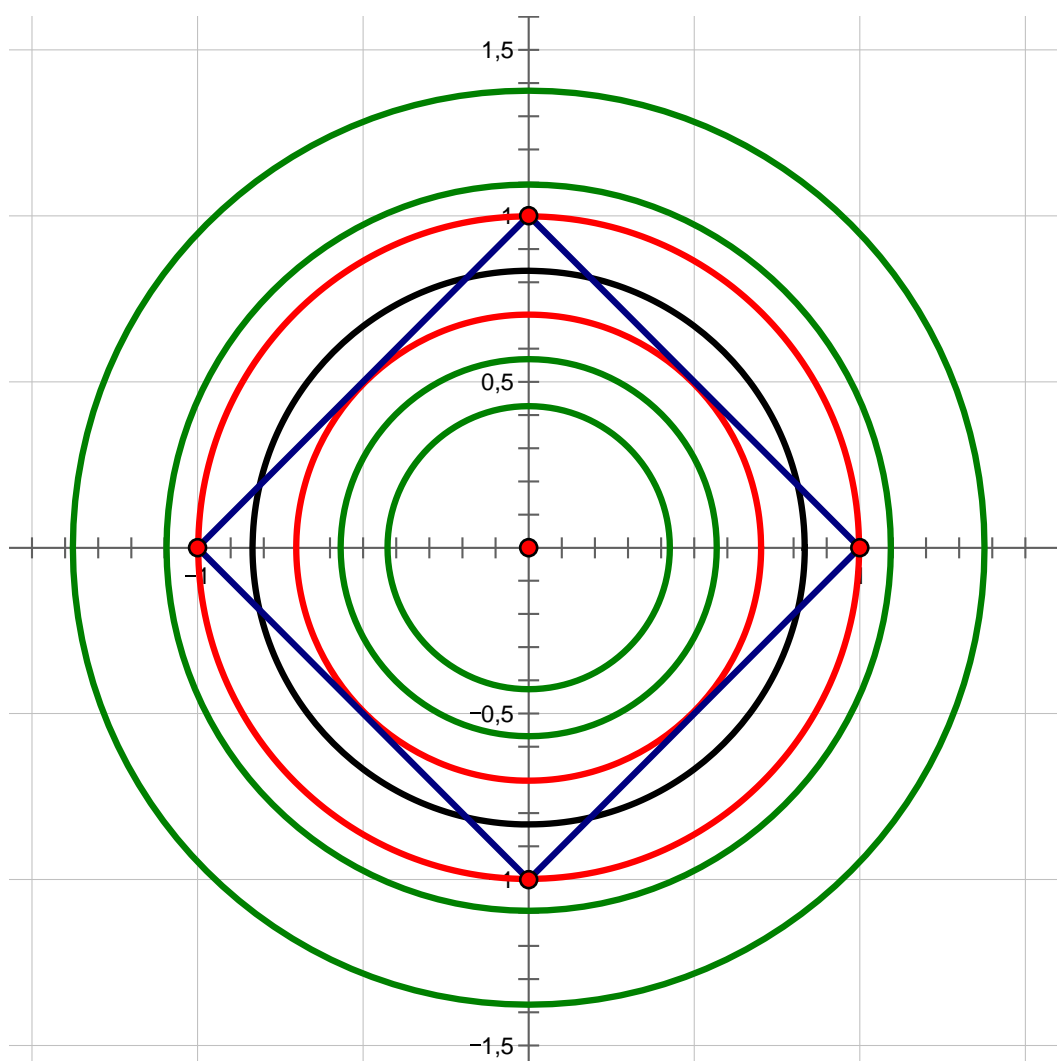
ЗАДАТАК 3: У зависности од реалног параметра a одредити колико решења има систем : $|x|+|y|=1 \wedge x^2 + y^2 = a^2$.

РЕШЕЊЕ:

Број решења је 0 ако је $|a| < \frac{\sqrt{2}}{2} \vee |a| > 1$;

Број решења је 4 ако је $|a| = \frac{\sqrt{2}}{2} \vee |a| = 1$;

Број решења је 8 ако је $\frac{\sqrt{2}}{2} < |a| < 1$.



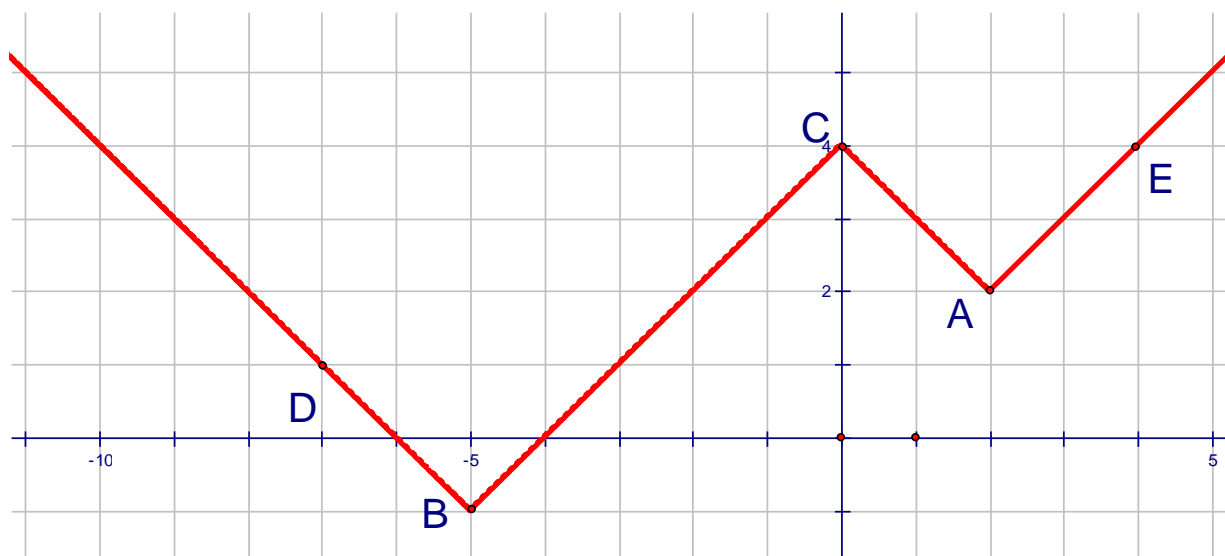
ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБУ РЕШАВАЊА ГРАФИЧКОМ МЕТОДОМ: (са коришћењем графика функција)

Задатак 1. Дана је функција: $f(x) = |x - 2| + |x + 5| - |x| - 3$.

- 1) Решити једначину $f(x) = 0$; (тј. $|x - 2| + |x + 5| - |x| - 3 = 0$).
- 2) Решити једначину $f(x) = 3$.
- 3) Решити једначину $f(x) = -3$.
- 4) Решити неједначину $f(x) > 3$.
- 5) Наћи минималну вредност израза $|x - 2| + |x + 5| - |x| - 3$.
- 6) Одредити $a \in \mathbb{R}$ тако да једначина $|x - 2| + |x + 5| - |x| - 3 = a$ има тачно:
а) нула решења б) једно реш. в) два реш. г) три реш. д) четири реш. е) пет реш.
- 7) Једначина $|x - 2| + |x + 5| - |x| - 3 = a$, $a \in \mathbb{R}$, има максималан број различитих реалних решења ако и само ако вредности реалног параметра a припадају интервалу:
а) $(-\infty, -1)$ б) $(-1, 2)$ в) $(2, 4)$ г) $(4, \infty)$ е) $[-1, 2]$

РЕШЕЊЕ: Ако нацртамо график функције $f(x) = |x - 2| + |x + 5| - |x| - 3$

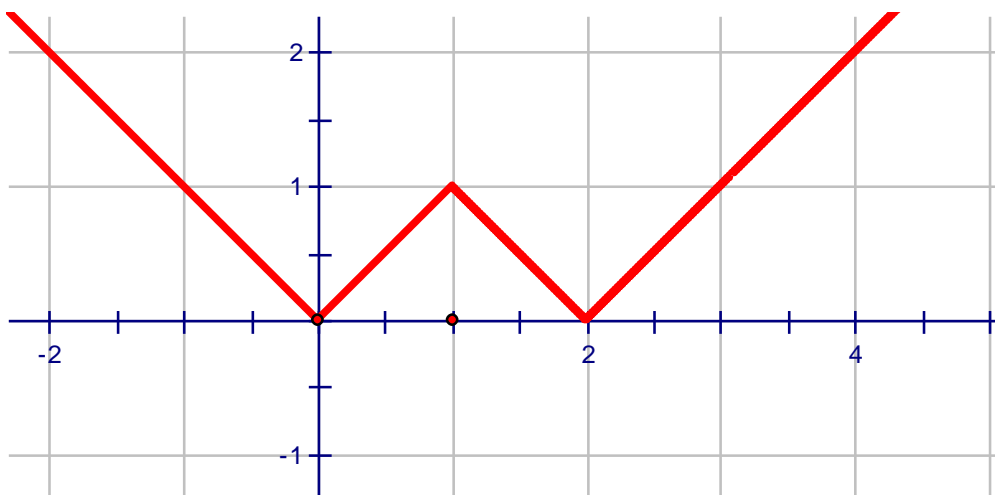
онда лако долазимо до решења свих постављених задатака.



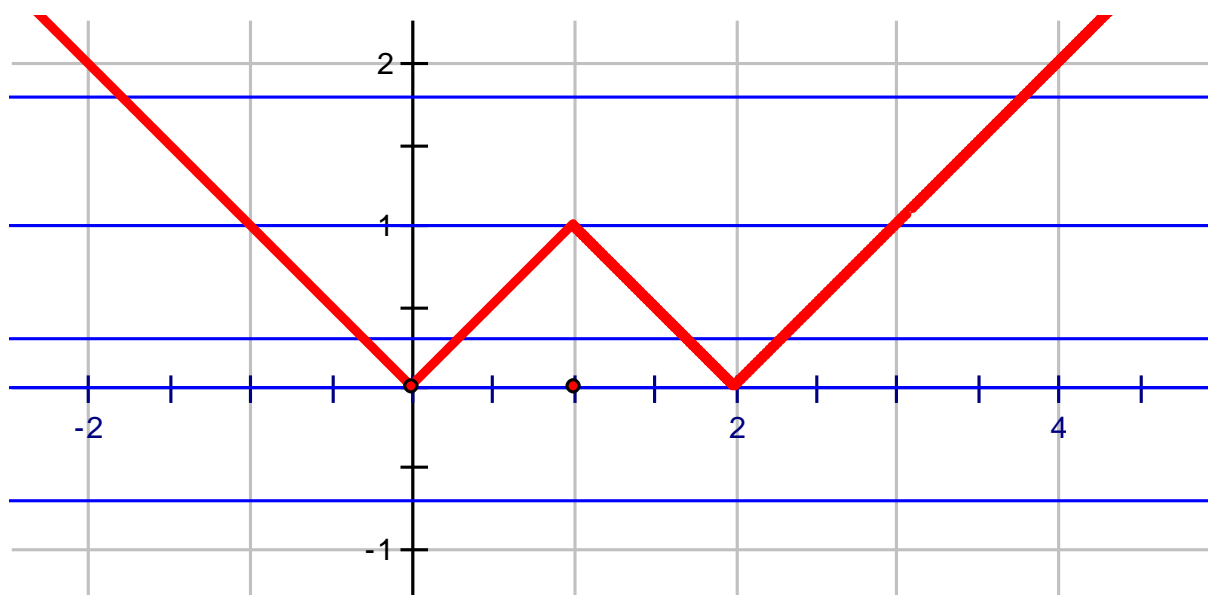
Задатак 2. За које вредности реалног броја a једначина $||x-1|-1|=a$ има највише реалних решења по x ? Одредити сва та решења.

Решење:

Прво се нацрта график функције $y = ||x-1|-1|$.



Права $y = a$ не сече добијени график ако је $a < 0$; сече у двама тачкама ако је $a = 0 \vee a > 1$; сече у трима тачкама ако је $a = 1$; сече у четири тачке ако је $0 < a < 1$. Према томе тражени интервал је $0 < a < 1$, а добијена решења су тада $-a, a, 2-a, 2+a$.

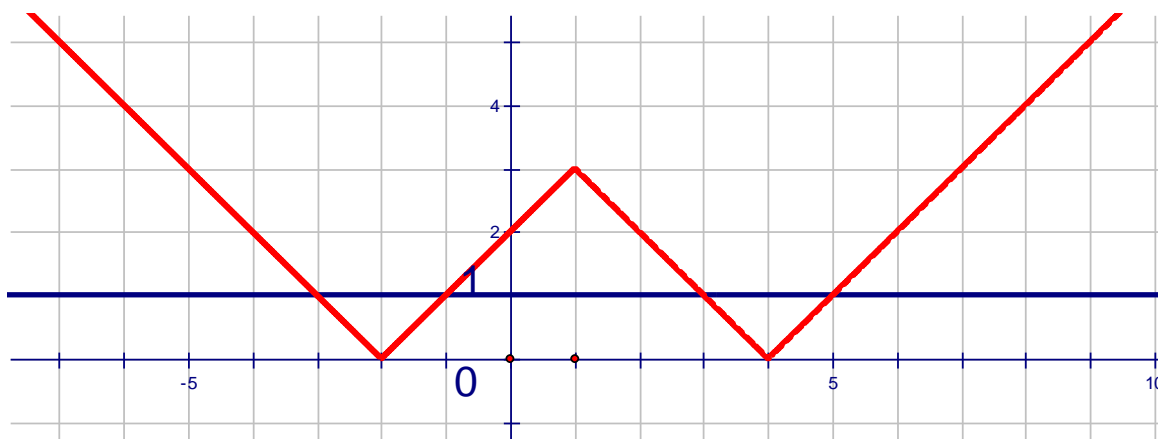


Задатак 3: Број решења једначине $\left| \sqrt{x^2 - 2x + 1} - 3 \right| = 1$ је:

- А) мањи од 3 В) 3 С) 4 Д) 5 Е) већи од 5

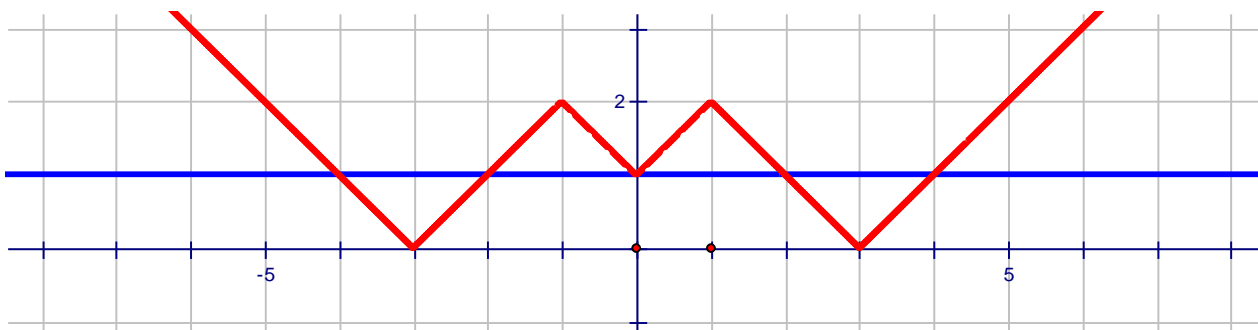
Решење: Израз $\left| \sqrt{x^2 - 2x + 1} - 3 \right| = 1$ је еквивалентан следећим изразима

$\left| \sqrt{(x-1)^2} - 3 \right| = 1$, $\left| |x-1| - 3 \right| = 1$. Цртањем графика функција $y = \left| |x-1| - 3 \right|$ и $y = 1$ долазимо до одговора под С.



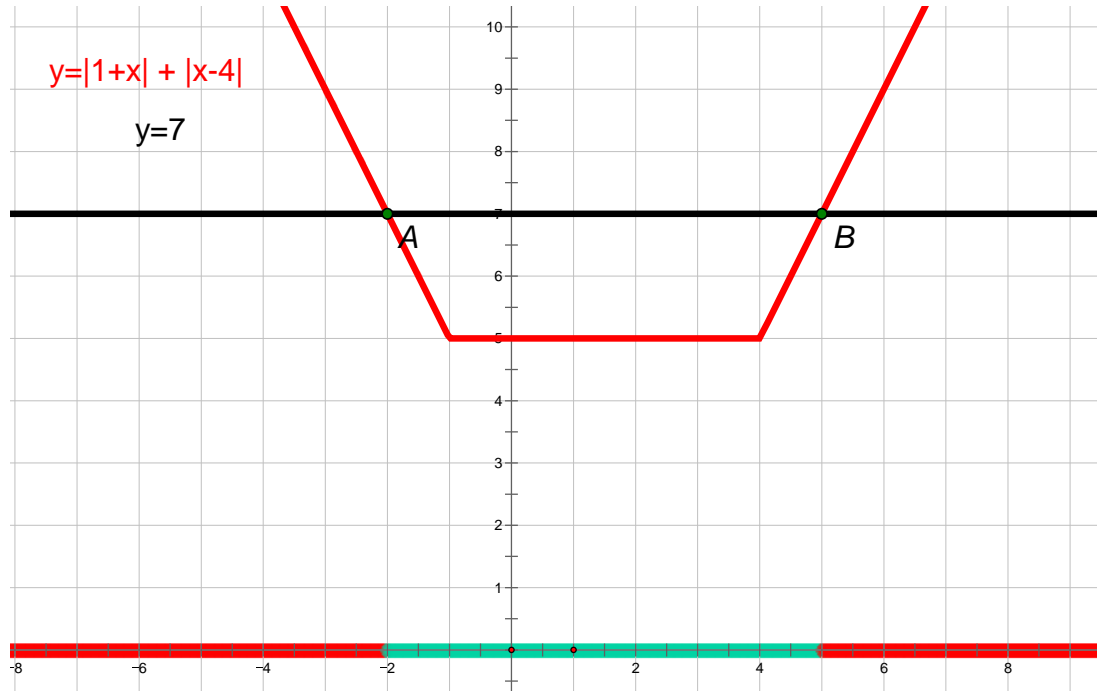
Задатак 4: Решити једначину $\left| 2 - \left| 1 - |x| \right| \right| = 1$.

Решење: $x \in \{-4, -2, 0, 2, 4\}$



Задатак 5: Решити неједначину $\sqrt{1+2x+x^2} + \sqrt{x^2-8x+16} > 7$.

Решење: Задатак се своди на цртање графика функције $y = |1+x| + |x-4|$ и $y = 7$.



Решење неједначине је $x \in (-\infty, -2) \cup (5, +\infty)$.

Задатак 6: Збир свих решења једначине $||2x-3|-4| = 6$ је:

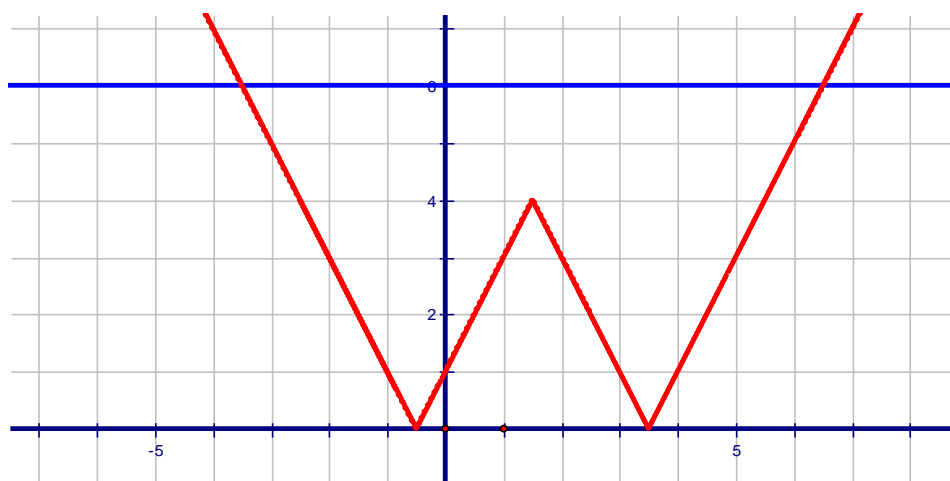
A) $\frac{13}{2}$

B) 6

C) 3

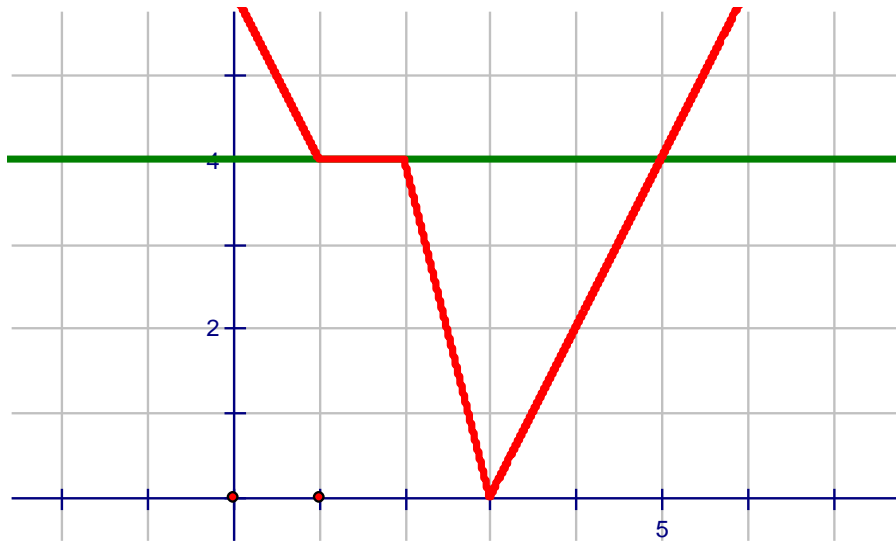
D) $-\frac{7}{2}$

E) 10



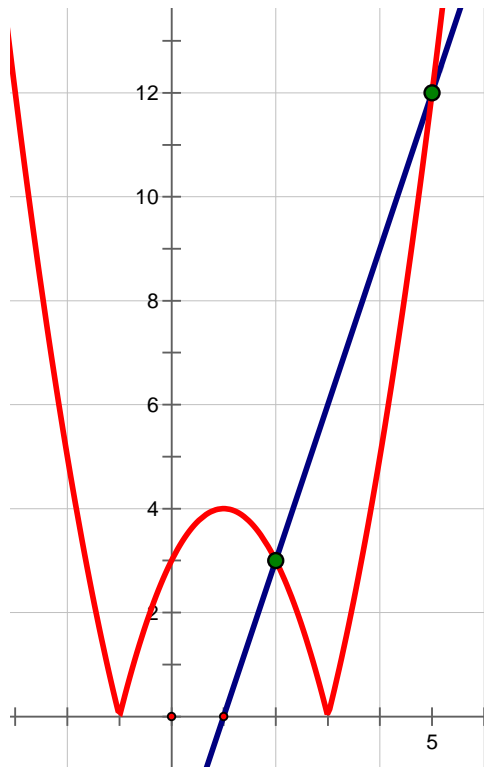
Решење: Под С.

Задатак 7: Решити једначину $|x-1| - 2|x-2| + 3|x-3| = 4$.



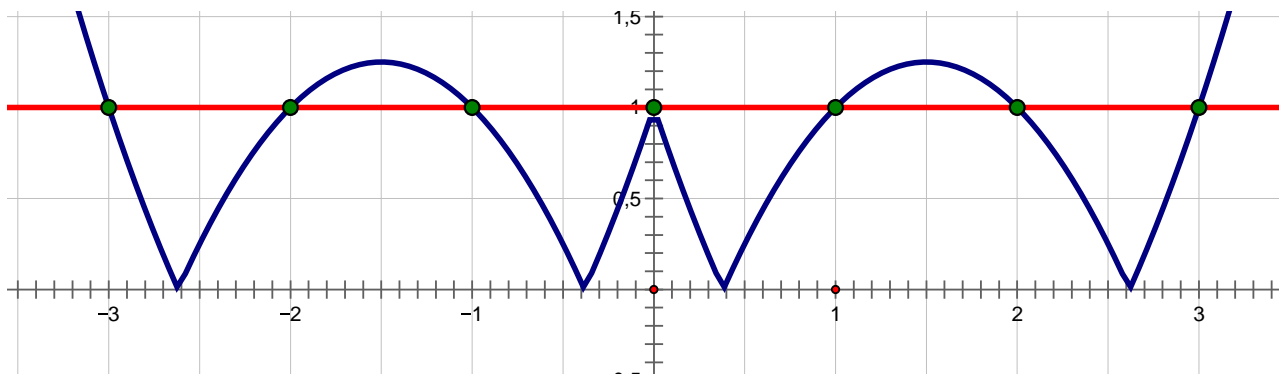
Решење: $1 \leq x \leq 2 \vee x = 5$.

Задатак 8: Решити неједначину: $|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3$.



Решење: $x \in (2, 5)$

Задатак 9: Решити једначину: $|x^2 - 3|x| + 1| = 1$.

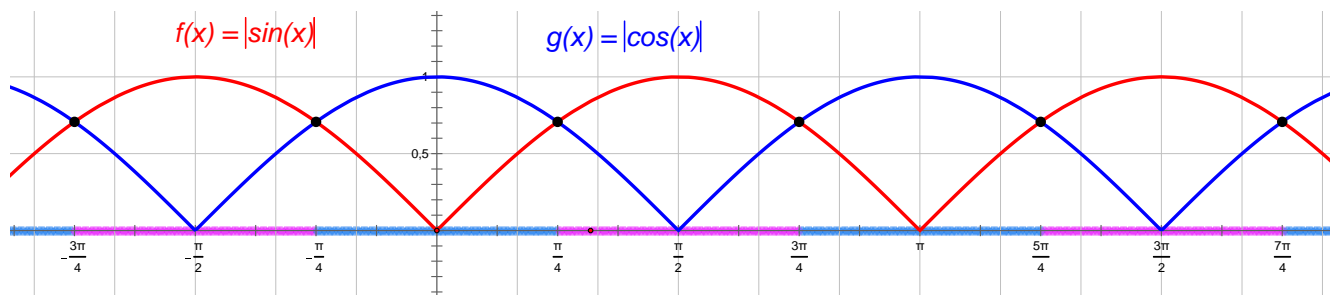


Решење: $x \in \{-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3\}$

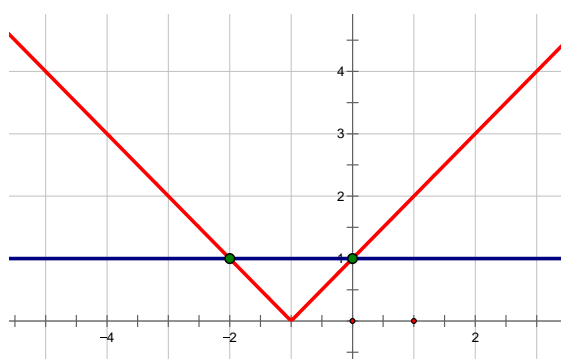
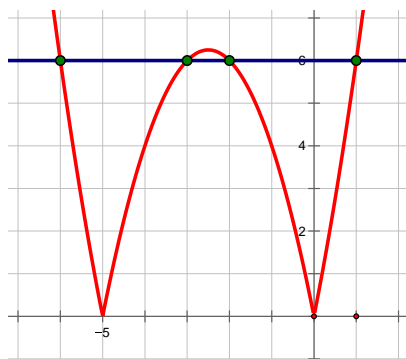
Задатак 10: Решити неједначину: $10^{|\sin x|} > 10^{|\cos x|}$.

Решење: Задатак се своди на решавање неједначине $|\sin x| > |\cos x|$. Са графика функција $y = |\sin x|$ и $y = |\cos x|$ видимо да је решење дате неједначине

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

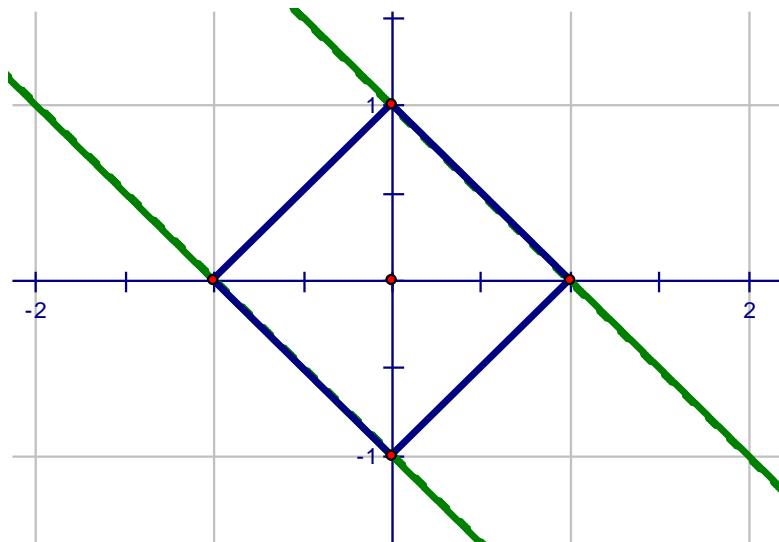


Задатак 11: Решити систем неједначина: $|x^2 + 5x| < 6 \wedge |x + 1| \leq 1$.



Решење: $(x \in (-6, -3) \cup (-2, 1) \wedge x \in [-2, 0]) \Leftrightarrow x \in (-2, 0]$

Задатак 12: Решити систем једначина: $|x + y| = 1 \wedge |x| + |y| = 1$.



Решење: $\{(c, 1 - c)\}$ ако је $0 \leq c \leq 1$,
 $\{(c, -1 - c)\}$ ако је $-1 \leq c \leq 0$.