ДРУШТВО МАТЕМАТИЧА СРБИЈЕ

АКРЕДИТОВАНИ СЕМИНАР:

345
ДРЖАВНИ СЕМИНАР О НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ И РАЧУНАРСТВА ДРУШТВА МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Компетенција: К1
Приоритети: 3

ТЕМА:

МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

РЕАЛИЗАТОРИ СЕМИНАРА:

др БОЈАН БАШИЋ,
др ДУШАН ЂУКИЋ

БЕОГРАД,
09. – 10. 02. 2019.

МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Бојан Башић, Душан Ђукић

Београд, 10. 2. 2019

На међународним математичким такмичењима средњошколци из Србије редовно постижу резултате на које сви можемо бити поносни. У последње три године Република Србија на Балканској математичкој олимпијади увек је освајала једно од прва три места (2016. године чак прво место). На Међународној математичкој олимпијади одржаној 2017. год. у Рио де Жанеиру (Бразил), наша екипа је освојила врло високо 18. место у конкуренцији од 111 земаља из свих крајева света (поређења ради, на последњим спортским Олимпијским играма, такође у Рио де Жанеиру, 2016. године, Република Србија је по броју освојених медаља заузела 31. место), а 2018. године је овај пласман додатно поправила, завршивши такмичење на чак 13. месту на планети, са освојене освојивши две златне, две сребрне и две бронзане медаље, што је најбољи биланс медаља у историји учешћа наше земље (у свим њеним инкарнацијама) на ММО (једини претходни пут су две златне медаље освојене још далеке 1978. године, када су освојене још и две сребрне али и само једна бронзана медаља; и то, како су предвиђала тадашња правила, у тиму од 8 ученика, селектованих широм тадашње Југославије, наспрам садашњих 6 ученика, селектованих из Србије).

Екипа која представља земљу на међународним математичким такмичењима бира се кроз низ такмичења, почев од општинског нивоа па закључно са Српском математичком олимпијадом и додатним изборним такмичењем за одабир олимпијске екипе. Наравно, сврха такмичења није само да се одабере шест најбољих ученика, већ и да код свих који учествују подстакне интересовање за математику и побуди такмичарски дух. Стога Државна комисија с пажњом припрема задатке за све нивое такмичења, трудећи се (некада с више, а понекад ипак, признајемо, с нешто мање успеха) да нађе прави баланс у погледу тежине задатака за сваки ниво, разноврсности математичких области из којих се задаци постављају итд.

Предавање ће се састојати из три целине. У првој целини биће презентован систем такмичења у земљи, разматране неке његове позитивне и негативне стране и разматран простор за побољшања. Такође ће бити анализиран учинак измена уведених у Правилник о такмичењима пре две сезоне, нарочито у погледу избора оних шест ученика који на крају стичу част и обавезу да представљају земљу на међународним такмичењима, а које су уведене по угледу на земље које традиционално остварују високе пласмане, све са жељом да, иако можемо бити, као што је већ речено, генерално врло задовољни учинком наших ученика, искористимо сваку прилику за додатно побољшање тих резултата.

У другој целини биће презентовани одабрани задаци са свих нивоа такмичења. Биће указано на то с чим се наши ученици углавном добро сналазе а шта им често задаје проблема, биће наглашене неке лепе идеје као и неке типичне грешке итд.

Најзад, последња целина је предвиђена за дискусију. Предавачи су дугогодишњи чланови Комисије и имају вишегодишње искуство с руковођењем екипе

Србије на међународним такмичењима, па верујемо да се у овој целини могу јавити занимљиве теме за дискусију.

О Српској математичкој олимпијади

У математичкој гимназији у Београду је 30. и 31. марта 2018. године одржана 12. по реду Српска математичка олимпијада. На такмичењу је учествовало 30 такмичара средњих школа. Како је један од основних циљева овог такмичења избор екипе Републике Србије за међународна такмичења, пре свега за Међународну математичку олимпијаду, такмичење је осмишљено по угледу на ММО. Према томе, такмичење траје два дана, током сваког дана раде се по три задатка, при чему сваки задатак вреди по 7 бодова. Сличност са ММО не завршава се на техничким детаљима, већ се комисија труди да задаци за СМО по концепцији а и по тежини осликавају задатке са ММО, желећи да се на тај начин постигну што вернији услови, те да као последица тога буде изабрана екипа која ће заиста најбоље представљати Србију на ММО.

Након прегледа задатака као најуспешнији су се показали

1. ***Алекса Милојевић,*** ученик трећег разреда,

као и

2. ***Павле Мартиновић,*** ученик трећег разреда,

обојица са по 29 бодова, а за њима су ишли

3. ***Јелена Иванчић,*** ученица другог разреда,
4. ***Владимир Виктор Мирјанић,*** ученик трећег разреда,
5. ***Игор Медведев,*** ученик четвртог разреда,
6. ***Добрица Јовановић,*** ученик првог разреда,

сви из Математичке гимназије у Београду, са оствареним скором од 27, 25, 24 и 23 бода. Како налажу пропозиције, ових шест ученика су се квалификовали у екипу Републике Србије за Балканску међународну олимпијаду.

Међутим, специфична околност ове године била је та што је управо Србија била домаћин Балканске математичке олимпијаде, те је на основу тога имала могућност да пошаље још једну екипу (тзв. Србија Б) на такмичење (у незавничној конкуренцији). Ову екипу чинили су наредних шест ученика:

7. ***Јован Тороманович,*** ученик 2. разреда Математичке гимназије у Београду;
8. ***Никола Павловић,*** ученик 4. разреда Гимназије „Јован Јовановић Змај“ у Новом Саду;
9. ***Марко Медведев,*** ученик 4. разреда Математичке гимназије у Београду;
10. ***Лазар Корсић,*** ученик 3. разреда Математичке гимназије у Београду;
11. ***Александар Милосављевић,*** ученик 2. разреда Гимназије „Светозар Марковић“ у Нишу;
12. ***Милош Милићев,*** ученик 2. разреда Математичке гимназије у Београду,

са оствареним скором од 22, 21, 20, 19, 18 и 18 бодова.

Поменимо још само податак да је Комисија на СМО, по правилима ММО, одлучила да додели 3 златне, 5 сребрних и 8 бронзаних медаља, као и 5 похвала.

О Балканској математичкој олимпијади

У Београду је, од 7. до 12. маја 2018, у студентском одмаралишту „Радојка Лакић“ на Авали одржана 35. по реду Балканска математичка олимпијада. Малочас су наведени састави две екипе које су представљале Србију, руководство прве екипе чинили су ***Бојан Башић*** и ***Владо Уљаревић,*** Природно-математички факултет у Новом Саду, а руководство друге екипе ***Милош Милосављевић,*** Гимназија „Светозар Марковић“ у Нишу и ***Соња Чукић,*** Математичка гимназија у Београду.

Следећа табела приказује успех ученикана овом такмичењу.

Ученик/Задатак	1	2	3	4	Укупно	
СРБИЈА						
Алекса Милојевић	10	10	10	10	40	златна медаља
Павле Мартиновић	10	10	10	10	40	златна медаља
Јелена Иванчић	10	9	10	10	39	сребрна медаља
Игор Медведев	10	10	10	6	36	сребрна медаља
Добрица Јовановић	10	7	10	0	27	бронзана медаља
Владимир Виктор Мирјанић	10	0	1	0	11	похвала
СРБИЈА Б						
Никола Павловић	10	10	10	9	39	сребрна медаља
Јован Тороманович	10	1	10	7	28	бронзана медаља
Марко Медведев	10	8	0	7	25	бронзана медаља
Милош Милићев	10	5	0	8	23	бронзана медаља
Александар Милосављевић	10	1	10	0	21	бронзана медаља
Лазар Корсић	0	9	10	0	19	бронзана медаља

У незваничном пласману земаља, прва екипа је са 193 поена освојила треће место, док је друга екипа са 155 поена шеста по учинку (рачунајући и сталне и гостујуће земље).

Додељено је 11 златних медаља (9 у званичној и 2 у незваничној конкуренцији), 18 сребрних медаља (14 у званичној и 4 у незваничној конкуренцији) и 46 бронзаних медаља (19 у званичној и 27 у незваничној конкуренцији).

У следећој табели дајемо незваничан пласман земаља учесница према укупном броју освојених поена. У заградама је наведен број златних, сребрних, односно бронзаних медаља које је земља освојила.

Сталне учеснице			Гостујуће учеснице	
1.	Бугарска (3,3,0)	230	Казахстан (2,1,2)	179
2.	Румунија (4,2,0)	223	**СРБИЈА Б (0,1,5)**	155
3.	**СРБИЈА (2,2,1)**	193	Саудијска Арабија (0,0,6)	123
4.	Турска (0,4,1)	182	Италија (0,1,4)	113
5.	Грчка (0,3,1)	135	Азербејџан (0,0,4)	108
6.	Молдавија (0,0,5)	117	Велика Британија (0,1,3)	104
7.	Босна и Херцеговина (0,0,5)	115	Туркменистан (0,0,3)	89
8.	Македонија (0,0,2)	68		
9.	Црна Гора (0,0,2)	54		
10.	Албанија (0,0,1)	52		
11.	Кипар (0,0,1)	42		

Више информација о овогодишњем такмичењу могуће је наћи на званичном сајту https://bmo2018.dms.rs. На читаву организацију такмичења Србија може бити поносна, будући да су сви ситни проблеми (који се практично не могу избећи) решавани у лету и најчешће „иза кулиса“, те су коментари иностраних делегација били изношени искључиво у суперлативу (иако међу њима има и оних који се иначе не либе да упуте критике уколико сматрају да је то смислено).

О изборном такмичењу

„Завршна рунда“, у којој је одређена екипа Србије за Међународну математичку олимпијаду, одржана је 26. и 27. маја на Природно-математичком факултету у Новом Саду. Подсетимо се, пре две године је реформисан систем избора екипе Србије за ММО. Према садашњем систему, након СМО се одржава још једно такмичење (конципирано на исти начин као СМО, тј. као ММО), на које се позивају првих 12 ученика са СМО. По завршетку овог такмичења за сваког ученика се рачуна збир бодова освојених на СМО и на изборном такмичењу, и притом се ученицима који су у текућој школској години освојили златну медаљу на Балканијади на овај збир додаје још 7 бодова, а ученицима који су освојили сребрну се додају још 3 бода. Првих шест ученика по укупној суми чине екипу Србије на ММО.

Након узимања свега у обзир, настале су неке промене у односу на првобитан поредак, те су се, коначно, у екипу Србије за ММО пласирали: ***Алекса Милојевић*** (29 + 36 + 7 = 72 бода), ***Игор Медведев*** (24 + 33 + 3 = 60 бодова), ***Павле Мартиновић*** (29 + 22 + 7 = 58 бодова), ***Јелена Иванчић*** (22 + 29 = 51 бод), ***Јован Тороmановић*** (27 + 21 + 3 = 51 бод) и ***Никола Павловић*** (21 + 22 + 3 = 46 бодова). Конкуренција је била збиља тесна, будући да су наредна два ученика у укупном збиру имали 45, односно 44 бода, тј. свега бод односно два бода мање у односу на последњепласираног члана екипе.

Било каква реформа обично има и своје подржаваоце а и своје критичаре, па тако стоје ствари и с овим уведеним додатним кругом такмичења. Будимо реални, заиста има и позитивних и негативних страна новог система избора екипе. Од негативних страна може се истаћи, пре свега, чињеница да се неизвесност и ишчекивање код ученика хоће ли баш он успети да се избори за то да поносно представља своју земљу на ММО продужава за безмало два месеца. (А, с друге стране, ипак и то има своју позитивну страну, будући да се ученици на овај начин спречавају да се превише „опусте“, јер су свесни да место у екипи није извесно и поред доброг учинка на СМО. Но, било како било, свакако није пријатан осећај накнадног „испадања“ из прве шесторке, а што се, нажалост, десило оба пута откако је уведен нови систем.) Позитивних пак страна, верујемо, има више, чиме смо се и руководили када смо одлучили да уведемо овај систем. Само време може дати коначан суд, али ипак приметимо следеће. Прошле године, први пут откако је уведен нови систем, екипа Србије на ММО у Рио де Жанеиру је освојила врло високо 18. место (поређења ради, на спортским олимпијским играма одржаним годину дана пре тога, игром случаја такође у Рио де Жанеиру, Србија се по освојеним медаљама нашла на 32. позицији, што је медијски окарактерисано као одличан успех). Ове године на ММО Србија је освојила такорећи невероватно **13. место,** освојивши **две златне, две сребрне и две бронзане медаље,** што је најбољи биланс медаља у историји учешћа наше земље (у свим њеним инкарнацијама) на ММО (једини претходни пут су две златне медаље освојене још далеке 1978. године, када су освојене још и две сребрне али и само једна бронзана медаља; и то, како су предвиђала тадашња правила, у тиму од 8 ученика, селектованих широм тадашње Југославије, наспрам садашњих 6 ученика, селектованих из Србије)!!

У наставку прилажемо задатке са ових такмичења, као и са Међународне математичке олимпијаде.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

12. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

30. март 2018.

Први дан

1. Кружница уписана у $\triangle ABC$ има центар у тачки I и додирује страницу BC у тачки D. На дужима BI и CI одабране су тачке P и Q, редом, такве да важи $\measuredangle BAC = 2\measuredangle PAQ$. Доказати: $\measuredangle PDQ = 90^\circ$.

2. Дат је природан број n, $n > 1$. Цео број x зовемо *красним* ако је остатак броја x^2 при дељењу са n непаран. Доказати да не постоји више од $1 + \lfloor\sqrt{3n}\rfloor$ узастопних красних природних бројева.

3. У равни је дато n правих међу којима никоје две нису паралелне и никоје три се не секу у једној тачки. Под *пресечним тачкама* сматрамо све тачке у којима се секу неке две од ових правих.

a) Доказати да постоји права са чије се сваке стране налази бар по

$$\left\lfloor \frac{(n-1)(n-2)}{10} \right\rfloor$$

пресечних тачака (тачке на тој правој се не рачунају).

b) За које вредности n се може достићи једнакост?

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

12. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

31. март 2018.

Други дан

4. Доказати да постоји тачно један полином $P(x)$ с реалним коефицијентима за који је полином

$$(x+y)^{1000} - P(x) - P(y)$$

дељив полиномом $xy - x - y$.

5. Нека су a и b непарни природни бројеви већи од 1. Посматрајмо таблу $a \times b$ којој недостају поља $(2,1)$, $(a-2,b)$ и (a,b) (под пољем (i,j) подразумевамо поље у пресеку врсте i и колоне j). Претпоставимо да је оваква табла поплочана помоћу 2×1 домина и 2×2 квадрата (домине се могу ротирати). Доказати да је употребљено бар $\dfrac{3}{2}(a+b)-6$ домина.

6. За задат природан број k, нека је n_k најмањи природан број такав да постоји коначан скуп A целих бројева са следећим особинама:

- за свако $a \in A$ постоје $x, y \in A$ (не обавезно различити) такви да
$$n_k \mid a - x - y;$$
- не постоји подскуп B скупа A за који важи $|B| \leqslant k$ и
$$n_k \mid \sum_{b\in B} b.$$

Доказати да за све k, $k \geqslant 3$, важи

$$n_k < \left(\frac{13}{8}\right)^{k+2}.$$

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

35. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА
Београд, Србија (9. мај 2018)

Language: Serbian

Задатак 1.

Четвороугао $ABCD$ је уписан у кружницу k, при чему важи $AB > CD$ и права AB није паралелна са CD. Тачка M је пресек дијагонала AC и BD, а подножје нормале из M на AB је тачка E, при чему је E на дужи AB. Ако је EM симетрала $\measuredangle CED$, доказати да је AB пречник кружнице k.

Задатак 2.

Нека је q позитиван рационалан број. Два мрава се иницијално налазе у истој тачки X у равни. У n-том минуту $(n = 1, 2 \dots)$ сваки од њих бира да ли ће се кретати ка северу, истоку, југу или западу, и потом прелази дистанцу од q^n метара. После целог броја минута, они се поново налазе у истој тачки у равни (не нужно тачки X), а дотле пређене путање им нису потпуно идентичне. Одредити све могуће вредности броја q.

Задатак 3.

Ана и Бојан играју следећу игру. Пред њима се налазе две непразне гомиле новчића. Наизменично, почев од Ане, свако бира гомилу на којој је паран број новчића и премешта половину новчића с те гомиле на другу гомилу. Игра се завршава уколико играч на потезу не може да одигра потез, у ком случају други играч побеђује. Одредити све парове (a, b) природних бројева таквих да, уколико гомиле на почетку имају a и b новчића, редом, Бојан има победничку стратегију.

Задатак 4.

Наћи све просте бројеве p и q такве да $3p^{q-1} + 1$ дели $11^p + 17^p$.

Време за израду: 4 **сата и** 30 **минута.**
Сваки задатак вреди 10 **поена.**

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА УЧЕШЋЕ НА МЕЂУНАРОДНОЈ МАТЕМАТИЧКОЈ ОЛИМПИЈАДИ

26. мај 2018.

Први дан

1. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева n таквих да је бар један од бројева $2^{2^n}+1$ и $2018^{2^n}+1$ сложен.

2. Нека је n задат природан број и нека су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ позитивни реални бројеви. Доказати:

$$x_1(1-x_1^2)+x_2(1-(x_1+x_2)^2)+\cdots+x_n(1-(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2)<\frac{2}{3}.$$

3. Ана и Боба играју следећу игру.

1° Најпре Боба нацрта $\triangle ABC$ и бира унутар њега тачку P.

2° Затим Ана и Боба наизменично, почев од Ане, бирају три различите пермутације σ_1, σ_2 и σ_3 скупа $\{A, B, C\}$.

3° Напослетку, Ана црта произвољан $\triangle V_1V_2V_3$.

За $i = 1, 2, 3$, нека је ψ_i трансформација сличности у равни која слика тачке $\sigma_i(A)$, $\sigma_i(B)$ и $\sigma_i(C)$ редом у тачке V_i, V_{i+1} и X_i (узимамо $V_4 = V_1$), при чему је $\triangle V_iV_{i+1}X_i$ у спољашњости $\triangle V_1V_2V_3$. Најзад, означимо $Q_i = \psi_i(P)$. Ана побеђује ако су $\triangle Q_1Q_2Q_3$ и $\triangle ABC$ слични (при неком редоследу темена), а у супротном побеђује Боба. Ко има победничку стратегију?

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА УЧЕШЋЕ НА МЕЂУНАРОДНОЈ МАТЕМАТИЧКОЈ ОЛИМПИЈАДИ

27. мај 2018.

Други дан

4. Назовимо *правим једнакокраким трапезом* једнакокраки трапез чији краци нису паралелни (дакле, паралелограми и правоугаоници нису прави једнакокраки трапези). Посматрамо поделу правоугаоника на n (могуће различитих) правих једнакокраких трапеза. За такву поделу кажемо да је *стриктна* ако унија никојих i трапеза у подели, за $2 \leqslant i \leqslant n$, не чини прави једнакокраки трапез (другим речима, подела је стриктна ако се не може добити од неке поделе тог правоугаоника на мање од n правих једнакокраких трапеза, додатним дељењем неких трапеза из поделе на нове трапезе). Доказати да за све природне бројеве n, $n \geqslant 9$, постоји стриктна подела правоугаоника 2017×2018 на n правих једнакокраких трапеза.

5. Нека је H ортоцентар оштроуглог $\triangle ABC$, $AB \neq AC$, и нека је F, $F \not\equiv A$, тачка на описаној кружници тог троугла за коју важи $\measuredangle AFH = 90^\circ$. Тачка K је централносиметрична слика тачке H у односу на тачку B, тачка P је таква да важи $\measuredangle PHB = \measuredangle PBC = 90^\circ$, а тачка Q је подножје нормале из тачке B на праву CP. Доказати да права HQ додирује кружницу описану око $\triangle FHK$.

6. За природан број n, дефинишимо

$$c_n = \min_{(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \{-1,1\}^n} |z_1 \cdot 1^{2018} + z_2 \cdot 2^{2018} + z_3 \cdot 3^{2018} + \ldots + z_n \cdot n^{2018}|.$$

Да ли је низ $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ограничен?

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Понедељак, 9. јул 2018.

1. задатак. Нека је Γ описана кружница оштроуглог троугла ABC. Тачке D и E налазе се на дужима AB и AC, редом, тако да важи $AD = AE$. Симетрале дужи BD и CE секу краће лукове AB и AC кружнице Γ у тачкама F и G, редом. Доказати да су праве DE и FG паралелне (или једнаке).

2. задатак. Наћи све природне бројеве $n \geqslant 3$ за које постоје реални бројеви $a_1, \ldots, a_{n+2}$, такви да је $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ и

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

за све $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

3. задатак. *Антипаскалов троугао* је таблица у облику једнакостраничног троугла која се састоји од бројева тако да, осим за бројеве у последњем реду, важи да је сваки број једнак апсолутној вредности разлике два броја која су непосредно испод њега. На пример, следећа таблица је антипаскалов троугао са четири реда, који се састоји од свих природних бројева од 1 до 10.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

Да ли постоји антипаскалов троугао са 2018 редова који се састоји од свих природних бројева од 1 до $1 + 2 + \cdots + 2018$?

Време за рад: 4 сата и 30 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.

Уторак, 10. јул 2018.

4. задатак. *Позиција* је свака тачка (x, y) у равни таква да су x и y природни бројеви не већи од 20.

На почетку, свака од 400 позиција је слободна. Андријана и Бојан играју игру у којој наизменично повлаче потезе, при чему Андријана игра прва. У сваком свом потезу Андријана поставља нови црвени каменчић на слободну позицију тако да је растојање између сваке две позиције на којима се налази црвени каменчић различито од $\sqrt{5}$. У сваком свом потезу Бојан поставља нови плави каменчић на неку слободну позицију. (Позиција на којој се налази плави каменчић може бити на било ком растојању од других позиција на којима се налази неки каменчић.) Игра се завршава када неко од њих не може повући потез.

Одредити највеће K тако да Андријана сигурно може поставити барем K црвених каменчића, без обзира на то како Бојан поставља плаве каменчиће.

5. задатак. Нека је $a_1, a_2, \ldots$ бесконачан низ природних бројева. Претпоставимо да постоји природан број $N > 1$ такав да је за све $n \geqslant N$

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

цео број.

Доказати да постоји природан број M такав да је $a_m = a_{m+1}$ за све $m \geqslant M$.

6. задатак. Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао такав да је $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. Тачка X налази се у унутрашњости четвороугла $ABCD$ тако да важи

$$\sphericalangle XAB = \sphericalangle XCD \quad \text{и} \quad \sphericalangle XBC = \sphericalangle XDA.$$

Доказати да је $\sphericalangle BXA + \sphericalangle DXC = 180^\circ$.

Време за рад: 4 сата и 30 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.