ДРУШТВО МАТЕМАТИЧА СРБИЈЕ

АКРЕДИТОВАНИ СЕМИНАР:

# 345
# ДРЖАВНИ СЕМИНАР О НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ И РАЧУНАРСТВА ДРУШТВА МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Компетенција: К1
Приоритети: 3

ТЕМА: 19

# ПАРАДОКСИ И ПАРАДОКСАЛНИ ЗАДАЦИ У ОСНОВНОЈ И СРЕДЊОЈ ШКОЛИ

РЕАЛИЗАТОРИ СЕМИНАРА:

ЈОЖЕФ Б. ВАРГА

БЕОГРАД,
09. – 10. 02. 2019.

## *Увод*

## *Зенонови парадокси*

### Ахил и корњача

У утрци, најбржи тркач никада не може престићи најспоријег, зато што гонитељ прво мора доћи до тачке одакле је гоњени пошао, па према томе најспорији увек има предност.

### Парадокс дихотомије

Кретање је немогуће јер „оно што је у покрету мора прво прећи пола пута прије него што стигне до циља.

### Парадокс стреле

Зенон је доказивао да је стријела у лету непокретна.
Ако је све непомично што заузима простор, и ако све што је у покрету заузима такав простор у неком времену, онда је летећа стријела непокретна.

## *Дефиниција парадокса, класификација парадокса и значај парадокса*

### Парадокс је

(грч. παράδοξος, парадоксос = немогућ; пара- = супротан, докса = мишљење)
истинита тврдња или група тврдњи која води до контрадикције или ситуације која је у супротности са интуицијом. Овај појам се такође користи за очигледну контрадикцију која у ствари изражава не-двојну природу истине. Користи се и да опише ситуације које су ироничне. Говори о томе да тврдње у њему у ствари нису све истините, или не могу обе, заједно, бити истините. Појам парадокса најбоље описује реченица „наизглед апсурдно, али ипак истинито."

### Класификација парадокса

#### Квајнова класификација

Квајн (Willard Van Orman Quine) је 1966 раздвојио три класе парадокса: Истинити парадокси, Лажни парадокси и Антиномије

#### Истинити парадокси

Ови парадокси логички исправним закључивањем воде до истинитих, али неочекиваних резултата. Примери истинитих парадокса:

- Галилејев парадокс
- Монтихолов парадокс
- Хилбертов Гранд хотел парадокс
- Шредингерова мачка
- Парадокс скупа свих скупова
- Парадокси затвореника
- Парадокс рођендана
- Парадокс рођендана 29. фебруар
- Банах-Тарски пардокс.
- Навигациони парадокс

Даља класификација:

- Парадокси логике теорије скупова

- Математички/геометријски парадокси
- Парадокси статистике и вероватноће
- Психолошки филозофски парадокси
- Парадокси физике
- Парадокси економије

**Лажни парадокси**

Погрешним лоогичким размишљањем долазе до погрешних резултата. Најчешће се у „доказ“ кришом увуче дељење нулом, кореновање квадрата израза, чија је вредност негативна, одузимање бесконачних величина, дељење бесконачних величина итд.

Примери:
Доказ да је 0=1
Празно = пуно
1+2+4+8+...= –1
...

**Контрадикције (антиномије)**

Примери:

- Епименидов парадокс
- Раселов парадокс
- Сократов „Знам да ништа не знам“

**Дефиницијски парадокси**

Пример: Тезејев брод

**Остали парадокси**

Примери: Зенонови парадокси

## Значај парадокса

Парадокс даје снажан подстицај за размишљање. Он открива слабости људских способности да суде, али и ограничења интелектуалних инструмената расуђивања.

Често су парадокси на темељу једноставних концепата довели до великог интелектуалног напретка. Понекад је то било питање откривања нових математичких правила или откривања нових физичких закона како би се прихватили закључци који су у почетку били „очигледно неприхватљиви“.

## *Примери парадокса*

## *Парадокси из природних наука*

**Мпемба-парадокс (Мпемба ефекат)**

Мпемба ефекат је појава да топла вода мења своје агрегатно стање из течног у чврсто (односно да се смрзава) брже од хладне воде. Назив је добила по танзанијском студенту Ерасту Б. Мпемби који је први описао ову појаву. Ово не изгледа логично, али је потврђено да је тачно.

**Ефекат лептира**

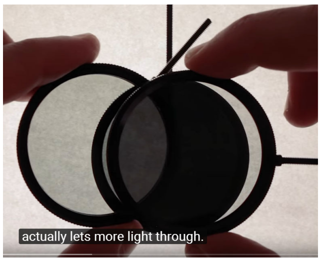
је термин кориштен у теорији хаоса, који описује како мале варијације могу да утичу на огромне и комплексне системе као што је време. Услед овог ефекта временске прогнозе преко одређеног времена постају апсолутно бескорисне.

**Олберс-парадокс**

Ако је свемир бесконачан и има бесконачно много звезда, зашто је небо ипак црно?

**Белова Теорема: Квантум Венов дијаграм парадокс**

Кроз три поларизациона филтра пролази више светла него кроз два.




## *Парадокси теорије скупова и логике*

**Канторов парадокс**

Не постоји скуп свих скупова.

Доказ се заснива на Канторовој теореми која тврди да је кардиналан број пертитивног скупа већи од кардиналног броја скупа и на Шредер-Бернштајновој теореми, која тврди да ако између два скупа постоји инјективно пресликавање у оба смера, онда постоји и бијекција између та два скупа.

**Раселов парадокс**

Раселов парадокс је не само уздрмао већ и оборио наивну теорију скупова

Суштина је следећа:

Нека је $S$ скуп свих скупова који су сами себи елементи, а $N$ скуп свих скупова који нису себи елементи. Да ли је $N$ сам себи елемент? Претпоставимо да није. У том случају је скуп који није сам себи елемент, значи припада скупу $N$. Но у том случају он је сам себи елемент. Контрадикција. Према томе $N$ је сам себи елемент. Но како $N$ садржи само оне скупове који нису сам себи елемент, то и $N$ је скуп који није сам себи елемент. Контрадикција.

**Епименидов парадокс**

Епименид је био са острва Крит. Он је изјавио да су сви људи са острва Крит лажови. Значи и он је лажов. Значи оно што је рекао лаж.

## *Парадокси статистике и теорије вероватноћа*

**Парадокс избора**

У једном градићу су бирају градоначелника. Од три кандидата изабран је онај којег нејвећи број грађана никако не би желео. Ако су кандидати били А, Б и В, једно могуће решење је: 28 гласача за А против Б, 25 гласача за В против А и 24 гласача за Б против А. Највише гласова „за“ добија кандидат А (28>25>24) али он добија и највише гласова против (49>28>0).

**Парадокс повољније коцке**

Кажемо да је коцка $A$ повољнија од коцке $B$ ако је вероватноћа бацања већег броја са коцком $A$ је већа него са коцком $B$. Да ли је могуће нумерисати све стране три коцке тако, да прва буде повољнија од друге, друга повољнија од треће и трећа повољнија од прве. Исправан одговор је „да“. Пример нумерисања: 1. коцка {5, 7, 8, 9, 10, 18}, друга коцка {2 3, 4, 15, 16, 17}, трећа коцка {1, 6, 11, 12, 13, 14}.

**Бертрандов парадокс**

Колика је вероватноћа да случајно изабрана тетива кружнице буде краћа од странице једнакостраничног троугла уписаног у ту кружницу.

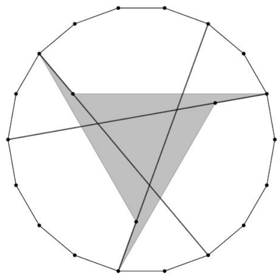
Овај парадокс ће се задати као задатак слушаоцима.

## *Парадокси геометрије*

**Сви троуглови су једнакокраки**

Видети у задацима

**Шестоугао са тачком у унутрашњој области из које се ни једна страница не види у потпуности**



**Банах-Тарски пардокс.**

Банах-Тарски парадокс је теорема из теорије скупова и геометрије која тврди следеће: Ако је дата произвољна лопта у тродимензионалном простору, онда постоји разлагање (декомпозиција) лопте на коначан број дисјунктних скупова, од којих се онда могу саставити две идентичне копије оригиналне лопте. Склапање је процес који подразумева само померање делова  као и њихово ротирање, без мењања њиховог облика (изометријска трансформација). Међутим, сами делови нису "геометријска тела" у уобичајеном смислу, већ бесконачна дисперзија (расејање) тачака, наиме ти делови нису мерњивих запремина. Реконструкција може да ради са само пет делова.

Јачи облик теореме подразумева да се било која два "основна" геометријска објекта (као на пример, мала и велика лопта) могу раставити и поново саставити тако да се од једног објекта добије други и обрнуто. Неформално, "грашак се може исецкати и од добијених делова саставити Сунце", па је теорема позната и као "парадокс грашка и Сунца".

## *Парадоксни задаци на часовима*

**Задаци на које су ученици склони дати погрешан одговор без већег размишљања.**

**1.** За ограђивање баште квадратног облика набавили смо 16 стубова. Ако ћемо стубове ставити на једнаке удаљености, колико ће стубова бити на једној страни баште?

Исправан одговор није 4.

**2.** Отац је старији од сина 4 пута. За 5 година биће старији 3 пута. Колико пута ће бити старији за још пет година?

Исправан одговор није два пута, како би неки ученици брзоплето рекли.

**3.** Колико је $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$?

Исправан одговор није $\frac{2}{5}$.

**4.** Којих има више, природних бројева или парних бројева? Сличан проблем се обрађује у причи „необичан хотел“, који је на крају овог текста приложен.

Исправан одговор није „природних“.

**5.** Којих има више, природних бројева или простих бројева?

Исправан одговор није „природних“.

**6.** Којих има више, природних бројева или декадних јединица?

Исправан одговор није „природних“.

**7.** Колико је 15 подељено на $\frac{1}{5}$?

Исправан одговор није 3.

**8.** Цена неке робе је повећана (снижена) за 20%. После извесног времена је поново повећана (снижена) за 20%. Колико је садашња цена већа (мања) од првобитне?

Исправан одговор није 40%.

**9.** Лубеница у себи има 95 % воде. Једна лубеница од 10 кг је стајала на сунцу и изгубила толико воде да сад има 90% воде у себи. Колика је кг сада та лубеница?

Исправан одговор није 9,5 кг, нити 9 кг нити преко 7 кг.

Следећи задатак је веома сличан овом, и скинут је са Фејсбука, група „Profesori matematike na FB“. Диња је тешкат 5 кг, а 95% тежине је вода. Након што је лежала на сунцу вода чини 75% тежине. Одредите нову тежину диње у кг.

Одговори, који су се појавили били следећи:

- "Isparilo" je 20% težine. Ostalo 80% od 5 kg.
- 4 kg
- 5kg * 5% = x * 25%. Некако се направи обрнута пропорционалност тако да се добије ова једначина. Није сасвим интуитивно. Мислим да то буде проблем.
- Сува материја је (5/20)kg. То је четвртина нове масе. Нова маса је 1kg. Обично се решава пропорцијом.

Последње решење је тачно.

**10.** Бициклист се на путу узбрдо од места А до места Б кретао средњом брзином од 10 км на сат. Од места Б до места А, тј, низбрдо се кретао средњом брзином од 30 км на сат. Колика је била просечна брзина бициклисте на овом путу?

Исправан одговор није 20 километара на сат.

**11.** Цена једне робе на почетку месеца је била 2500 динара. Средином месеца је цена повећана 20%, а крајем месеца је снижена 20%. Колика је цена те робе после ових промена?

Исправан одговор није 2500 динара.

**12.** Локвањ сваког дана дуплира своју површину. 32. дана покрије језеро. Којег дана је покривао осмину језера?

Исправан одговор није 4.

**13.** Са четири аутомобила скинуте су (предње) регистарске таблице. На колико начина се могу вратити те четири таблице на кола, да тачно три буду на својим местима?

Исправан одговор није 4, није 3, није 6, али није ни 1.

**14.** На 2018 картица исписани су цели бројеви од 0 до 2017. Затим су картице постављене у један ред у произвољном поретку. Играчи A и B наизменично узимају по једну картицу, али при том могу да узму само једну од две крајње картице. Игру почиње играч A. Игра се завршава кад су све картице узете, а победник је играч код кога је збир бројева на узетим картицама већи. Докажи да један од играча има победничку стратегију. Који? (државно такмичење 29.04.2017. године VIII разред) Како изгледа победничка стратегија?

Исправан одговор није да се увек узме са оног краја на којој је карта са већим бројем.

**15.** Перица је написао низ од $n$, $\left(n \geq 5\right)$ реалних бројева. Испоставило се, да је звир било која три узастопна броја од тих је позитиван, а збир било којих пет бројева од тих је негативан. Коју највећу вредност може имати број $n$?

Намеће се као „одговор да то није могуће, но то је ипак могуће.

**16.** Колика је вероватноћа да случајно изабрана тетива кружнице буде краћа од странице једнакостраничног троугла уписаног у ту кружницу. (Бертрандов парадокс)

Исправан одговор није 1/4, није 1/3, није 1/2. Да би нашли исправан одговор треба да дефинишемо расподелу по којој изаберемо тетиву.

**17.** Којих има више, природних бројева или рационалних бројева?

Исправан одговор није „рационалних“.

**18.** Два путника у пустињи сретну трећег. Били су уморни и гладни. Први од двојице је имао пет циповки, други три, док трећи није имао код себе храну, само новац. Они поделе тих осам циповки на три једнака дела свакоме и поједу. После тог ручка трећи путник даје осам талира другој двојици за поједене циповке. Како треба та двојица да поделе талире?

Исправан одговор није „пет узима онај који је имао пет циповки и три онај који је имао три циповке". Није ни 4 и 4.

Варијација: Путници су имали три циповке и две циповке, а трећи путник им даје 5 талира.

**19.** Шта је вероватније, да у разреду са 25 ученика има два ученика који истог дана славе рођендан или нема? (парадокс рођендана)

Исправан одговор није „вероватније је да нема".

**20.** Други парадокса осуђеника на смрт. Осуђенику, због доброг владања и извесних услуга понуђена је могућност ослобађања. Услов ослобађања је следећи. Добије 50 куглица црвене и 50 куглица зелене боје. те две куглице треба да распореди у две идентичне кутије. После тога обе кутије се спакују, не би ли осуђеник препознао у коју кутију је сместио које куглице. Осуђеник треба да одабере једну кутију, затим из те кутије да извади једну куглицу коју не види док није извадио. Ако је извађена куглица црвена, осуђеник остаје затворен и не гине му вешање, ако је зелена ослобађа се. Колика је шанса, да се осуђеник ослобађа?

Исправан одговор није 50%.

**21.** Имамо три кутије. У једној кутији су две златне кугле, у другој две сребрне кугле и у трећој једна златна и једна сребрна кугла. Из једне кутије извучемо једну куглу и та кугла је златна. Шта је вероватније, да је друга кугла у тој кутији сребрна или да је златна? Или су те две вероватноће једнаке? (Парадокс Бертрандове кутије. Показује доста сличности са Монтихоловим парадоксом.)

**Да ли је могуће?**

**22.** Постоји ли троугао са површинон већом од 100, чија свака висина има дужину мању од 1?

**23.** Да ли се новински папир може пресавијати на пола 10 пута?

**24.** Може ли троугао чија свака страиица има дужину мању од 1 имати већу површину од троугла чија свака страница има дужину већу од 100?

**25.** Да ли се у равни могу нацртати два троугла тако да су они симетрични један другом у односу на две различите праве?

**26.** Победили сте на ТВ квизу. Следи још један задатак и награда, чија вредност зависи од исхода тог задатка. Водитељ вам показује троја врата – иза једних је једна вредна награда (један супер ауто), а иза друга двоја су неке маловредне награде (по једна коза). Водитељ затим од вас тражи да одаберете једна врата иза којих мислите да се налази вредна награда о којој сте одувек маштали.

Када изаберете, водитељ отвара једна од преосталих врата иза којих се крије маловредна награда, а затим вас пита да ли желите да останете при свом првобитном избору. Да ли промена првобитног избора повећава шансу за добијање вредне награде? (Монтихолов парадокс)

**27.** Парадокс Мике Аласа: Да ли је могуће провући кованицу пречника 25 мм кроз рупу на новчанику кружног облика пречника 20 мм?

**28.** Да ли се на листу папира величине А4 може направити рупа, кроз коју може да прође човек?

**29.** У равни су дате две кружнице тако да свака лежи у спољашњости друге. Да ли у спољашњости обе кружнице постоји тачка, таква да свака права кроз ту тачку сече бар једну од датих кружница?

**30.** Парадокс избора (видети горе)

**31.** Парадокс повољније коцке (видети горе)

**32.** Постоји ли у равни два седмоугла једнаких површина чија су сва темена поклапају, али им се ниједан пар страница не поклапа?

**33.** Један је поуздан човек испричао овај догађај:

„Корњача се кретала у току шест минута по правој, стално унапред. Више је посматрача пратило њен ход и при томе:

а) За тих шест минута стално је неко посматрао корњачу;

б) Сваки је посматрач посматрао тачно један минут;

в) Свакуи је посматрач закључио да је у току минута док је он посматрао, корњача је прешла тачно један метар.

На крају је, међутим, измерено да је корњача у току тих шест минута прешла десет метара.“ Како је то могуће?

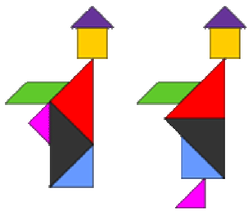
**Парадоксални задаци у којима треба пронаћи грешку**

**34.** 5 = 6

$$35 + 10 - 45 = 42 + 12 - 54$$
$$5 \cdot (7 + 2 - 9) = 6 \cdot (7 + 2 - 9)$$
$$5 = 6$$

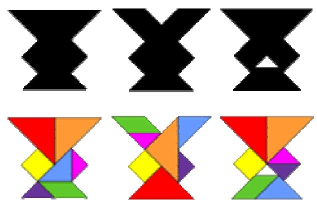
Где је грешка?

**35.** Парадокс два монаха - Два слична облика састављена из истих делова танграма, али једном недостаје стопало



Где је грешка?

**36.** Парадокс магичног коцкастог пехара - Сваки пехар је састављен коришћењем седам истих геометријских облика (танграм), али је први пехар цео док други и трећи имају празнине различитих величина



Где је грешка?

**37.** 2=3

Из једнакости $4-10=9-15$ додавањем $6\frac{1}{4}$ $\left(=\frac{25}{4}\right)$ на обе стране добија се $4-10+6\frac{1}{4}=9-15+6\frac{1}{4}$. Применом формуле за квадрат бинома $\left(2-\frac{5}{2}\right)^2=\left(3-\frac{5}{2}\right)^2$. Из тога $2-\frac{5}{2}=3-\frac{5}{2}$ или додавањем $\frac{5}{2}$ на обе стране $2=3$.

Где је грешка?

**38.** Први парадокса осуђеника на смрт (парадокс ученика осуђених на контролни). Једног осуђеника на смрт су обавестили у понедељак, да ће бити погубњен током те недеље, али неће знати унапред ког дана ће то бити. Он је овако размишљао: У недељу ме неће погубити, јер бих онда у суботу већ знао, да ћу бити у недељу погубљен, а речено ми је да претходни дан то нећу знати. Ако нећу бити погубљен у недељу, онда ћу бити погубљен у уторак, у среду, у четвртак, у петак или у суботу. Ако ме не погубе најкасније у петак, онда ћу знати да ће бити погуљење у суботу, али то није могуће по ономе што су рекли да то нећу претходни дан сазнати. Значи у суботу не могу бити погубљен. И таквим размишљањем он закључи да не може бити погубљен ни у петак, ни у четвртак, ни у среду, ни у уторак и наравно ни у понедељак, тј неће бити погубљен. Но међутим у среду су дошли по њега и одвели на погубљење.

Где је грешка у размишљању осуђеника?

**39.** Пуна флаша једнака празној флаши

До пола пуна флаша садржи исто толико течности као флаша до пола празна. Математички :

$$\frac{1}{2}\text{puna flaša} = \frac{1}{2}\text{prazna flaša}$$

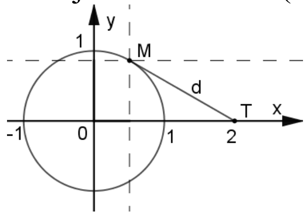
поделимо једнакост (обе стране) са $\frac{1}{2}$ добијамо

$$\text{puna flaša} = \text{prazna flaša}$$

Где је грешка? Да ли је то колапс математике?

**40.** Један проблем екстремума.

Која је тачка кружнице $x^2+y^2=1$ најближа тачки $T(2, 0)$?




Удаљеност које год тачке $M(x,y)$ на кружници од тачке $T(2,0)$ означимо са $d$. Квадрат те удаљености је $d^2 = (x-2)^2 + y^2 = (x-2)^2 + 1 - x^2 = x^2 - 4x + 4 + 1 - x^2$ дакле $d^2 = 5 - 4x$.

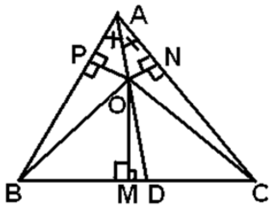
Кад је $d$ најмање, и $d^2$ је најмање, Треба наћи минимум функције $\mathrm{d}^2 = f(x) = 5 - 4x$

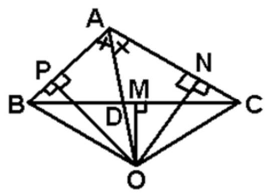
Међутим, знамо да линеарна функција нема екстремум, према томе на кружници не постоји тачка, најближа тачки $T$.

Где је грешка?

**41.** Сви троуглови су једнакокраки

Дат је троугао $ABC$. Нека је $AD$ симетрала угла $BAC$. Нека је тачка $M$ средина странице $BC$. Нормала на страницу $BC$ повучена кроз тачку $M$, сече симетралу $AD$ у тачки $O$ (унутар или ван троугла). Нека је $P$ тачка странице $AB$ таква да је $OP \perp AB$, а $N$ тачка странице $AC$, таква да је $ON \perp AC$.




Имамо да је $OP = ON$, јер је $O$ на симетрали угла $BAC$. $OB = OC$, јер је $O$ једнако удаљена од крајева дужи $BC$.

У правоуглим троугловима $OPB$ и $ONC$, хипотенузе $OB$ односно $OC$ су једнаке и катете $OP$ и $ON$ су такође једнаке. По теореми ССУ троуглови $BOP$ и $CON$ су подударни. Следи

$$BP = CN \qquad (1).$$

Правоугли троуглови $ANO$ и $APO$ су такође подударни, јер имају заједничку хипотенузу и једнаке катете $OP$ и $ON$. Из тога следи

$$AP=AN \qquad (2).$$

Из (1) и (2) следи да је $AB = AC$, тј да је $ABC$ је једнакокраки троугао. Закључак: Сваки троугао је једнакокрак. Гдје је грешка?

**42.** Збир позитивних бројева је негативан

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + \ldots$$
$$2S = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + \ldots$$
$$S - 2S = (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + \ldots) -$$
$$-(2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + \ldots) = 1$$
$$-S = 1$$
$$S = -1$$

Гдје је грешка?

**Задаци који нису парадоксални али су у вези са неким парадоксима**

**43.** Парадокс: На пијаци је већи парадајз по килограму скупљи од ситног парадајза. То је и прихватљиво, али теже је прихватити да ситан кромпир није јефтинији од крупног кромпира.

Задаци везани за то:

- Колико је више отпада ако љуштимо ситан кромпир, него што је отпада ако љуштимо крупан кромпир. Узети да је кромпир облика лопте, ситан кромпир пречника 5 cm, а крупан кромпир 10 cm. Приликом љуштења се одсрањује слој дебљине 3 mm.
- Колико времена треба да се ољушти кг ситног кромпира, ако се за минут ољушти 2 $dm^2$ површине. Колико времена треба за исту количину крупног кромпира.
- Колико динара изађе кг ољуштеног кромпира, ако се купује ситан, и ако се купује крупан кромпир (цене кромпира и радног времена задати).

**44.** Две особе заједно купују аутомобил (вредан 10000 еура). Прва особа има готовину (од 5000 еура), а друга узима кредит (од 5000 динара). Једна особа има возачку дозволу, друга нема. Особа која нема возачку дозволу купује гориво за аутомобил, док особа која има возачку дозволу, превози особу која нема дозволу, али наравно користи кола и за своје потребе. После извесног времена особа која је узела кредит отплатила исто, и то банци је платила укупно 6000 динара. Особа која није имала возачку дозволу, положила је возачки испит. Једна од особа је набавила (од фирме добила) други ауто и због тога овај заједнички више није потребан, па жели да прода свој део сувласнику. Могу се појавити парадоксалних питања у већем броју, али остаје једно главно питање: Колико треба да плати особа која откупњује други део аутомобила?

**45.** Парадокс рулета

Не бих објашњавао шта је рулет, већ бих изнео само следеће: Наводно на рулету сигурно може да се добија уз следећу стратегију:

1.) Играч ставља 1 динар (или најмањи могући улог) на црно. Ако се куглица зауставља на црном пољу играч добија 2 динара, иначе губи тај један динар. Вероватноћа добитка је 18/37, а губитка 19/37. Ако је играч добио, наставља по истом тј од 1.) или завршава игру, ако губи наставља са 2.)

2.) Играч ставља улог дупло већи од претходног на црно. Ако се куглица зауставља на црном пољу играч добија дупли улог, иначе губи уложени новац. Вероватноћа добитка је 18/37, а губитка 19/37. Ако је играч добио, наставља 1.) или завршава игру, ако губи наставља са 2.)

Шта ако је играч уложио један динар и добио. Па у добитку је 1 динар. Шта ако је уложио 1 динар и изгубио је. Па улог дуплира и рецимо ако је после пет узастопних губитака шести пут је добио, он је уложио 1+2+4+8+16+32 динара и првих пет је изгубио, а шести пут је добио 64 динара. Значи уложио је 1+2+4+8+16+32 = 63 динара, што је заправо губитак и добио 64. Он је у добитку један динар. Шта после? Па може почети још једну игру.

Да ли је стварно тако? Задаци везани за ово могу бити:

- Ако играч улази у коцкарницу са 1000 (*b*) динара и најмањи улог је 1 (*a*) динар, која је најдужа серија губитака што може да поднесе?
- Колика је вероватноћа да у *c* круга (*c* пута је стављен улог) појави серија од узастопних *d* црвених, тј повезана серија od *d* губитака?
- Колика је очекивана вредност капитала играча, после *e* кругова, ако је на почетку имао *b* динара?
- Колика је вероватноћа да играч изгуби свих 1000 (*b*) динара у највише 2000 (*fc*) кругова?
- Ако коцкарница (власник рулета) има *g* динара, колико новаца треба dа има играч, da би вероватноћа dогађаја да dобије све паре коцкарнице, буде већа od 1/2.
- ...

## *На крају*

### Парадокси Перице Јокића, српског сатиричара:

**Изгубили смо од тако мале државе да се наш пораз неће ни примијетити.**

**Да је живио само дан дуже, видио би своју читуљу у новинама.**

**Разлог доброг пословања у једном Бироу за изгубљене ствари су стални губици.**

**Имали смо слабог противника. Једва нас је побиједио.**

Прилог:

**Необичан хотел**

Једног јутра пробудило ме звоњење телефона.

– Драги Ијоне, неодложан задатак!- зачуо сам глас свог старог пријатеља и колеге са међузвезданих путовања професора Тарантоге. –Астрономи су открили у васиони неки летећи Објекат који се као нека тајанствена црна линија вуче од једне до друге галаксије. Нико не зна шта је то. Најјачи телескопи, радиотелескопи, постављени на ракетама, не могу нам помоћи да откријемо ту тајну. Сместа полети у правцу маглине АЦД–1587!

Следећег дана враћена ми је са оправке моја стара фотонска ракета (тј.ракета која се креће брзином светлости), на којој сам одмах намонтирао убзивач времена и електронског робота који је знао све језике којима се говори у космосу и све приче о посетиоцима звезда (то ме је обезбедило од досаде бар за пет година путовања) и полетео сам у задатом правцу. Када је робот исцрпео сву залиху својих прича и почео опет из почетка (а нема ничег горег него слушати електронског робота који по десети пут понавља стару причу), у даљини сам угледао циљ свог путовања. Маглине које су заклањале тајанствену линију биле су иза мене а преда мном је стајао...хотел „Космос“, за који дотад нисам био чуо. Убрзо сам чуо да су међузвездане луталице вигонти, којима сам ја некад саградио невелику планету, раскомадали и ту планету на ситне комадиће и поново остали без свог станишта. Тада, да не би више били приморани да лутају по туђим галаксијама, решили су да подигну једну огромну зграду–хотел, за све који путују и тумарају васионом. Тај се хотел протегао кроз скоро све галаксије. Кажем „скоро све“ зато што су вигонти раставили на делове неке ненастањене галаксије, а од сваке од преосталих галаксија одвукли су по неколико лоше постављених сазвежђа.

Но што се тиче тог хотела, свака им част! У свакој соби биле су чесме са хладном и врелом плазмом. Ко је хтео, могао је увече да се разастре у прах; сутрадан изјутра портир је све госте поново састављао према атомској шеми сваког од њих.

А што је најглавније, у хотелу је било бесконачно много соба. Вигонти су се надали да одсад више нико неће чути ону реченицу која им је током дугих лутања бла много дојадила: „Нема слободних соба!“. Па и поред свега тога, ја нисам имао среће. Кад сам ушао у пријемно оделење, прво што сам спазио је плакат: „Делегати конгерса космозоолога треба да се пријаве на 127. спрату!“ Како су космозоолози дошли из свих галаксија, а ових има бесконачно много, све собе су биле заузете и за мене није било места. Додуше, шеф пријемне канцеларије покушавао је да неке космозоологе мало стесни и да мене смести код њих, али кад сам сазнао да један од њих сматра да је за њега нормална температура 860°C, најучтивије сам се одрекао тако „пријатног суседства “.

Срећом, директор хотела био је један вигонт који је добро памтио услуге које сам ја некад учинио том племену. Он се заузео да добијем смештај у хотелу, јер бих, да сам остао да преноћим у међузвезданом простору, могао добити запалење плућа. Пошто је мало размислио, он је рекао шефу пријемне канцеларије

– Сместите га у собу број 1.

– А где да преселимо госта који је сада тамо? – зачуђено је упитао шеф.

– Њега преселите у собу број 2.Госта из броја 2 отпремите у број 3, оног из броја 3 у број 4, итд.

Тек тада сам схватио шта значе необична својства тог хотела. Кад би у њему било само коначно много соба, тада би се гост из последње собе морао пребацити у међузвездани простор. А како хотел има бесконачно много соба, било је места за све, те сам ја успео да се сместим, а да ниједан космозоолог није изгубио своје место.

Следећег јутра нисам се нимало зачудио када су ме замолили да се преселим у собу број 1000000. До тога је морало доћи јер су са закашњењем пристигли космозоолози из галаксије БСК 3472, те је требало сместити још 999999 гостију. Али, кад сам трећег дана борвка пошао у администрацију да платим собу, све ми се смркло пред очима. Пред шалтером се отегао ред чији се крај губио негде око Магелановог облака.

– Мењам две марке маглине Андромеде за марку Сириуса!

– Ко има марку Ерпеје из '57 године космичке ере?

У недоумици, обратио сам се шефу администрације:

– Ко су ови?

– Међугалактички конгрес филателиста.

– Има их много?

– Бесконачно много, по један представник сваке галаксије.

– Па, како ћете их сместити кад космозоолози одлазе тек сутра?

– Не знам; то ћу сада изнети на кратком састанку код директора.

Али, испоставило се да је тај проблем веома компликован, и кратки састанак одужио се читав сат. Најзад, шеф администрације изашао је из директорове канцеларије и почео је да пресељава госте.Прво је наредио да се гост из собе број 1 пресели у собу број 2. Мене је то зачудило. Јер сам из искуства стеченог претходног дана знао да такво пресељавање ослобађа само једну собу, а сада је требало сместити ни мање, ни више него бесконачно много филателиста! Међутим, шеф администрације је наставио да командује:

– А госта из броја 2 преселите у број 4,оног из 3 у број 6, и уопште госта из н број 2н!

Сада ми је његов план постао јасан: на тај начин он је ослободио бесконачно много соба са непарним бројевима, тако да је могао у те собе да смести филателисте. И тако су у свим собама с парним бројевима били космозоолози, а све собе са непарним бројевима заузели су филателисти (што се мене тиче, ја сам се за три дана толико спријатељио с космозоолозима, да су ме изабрали за почасног председника свог конгреса, заједно са свим космозоолозима).

Морао сам да напустим собу бр. 1000000 у којој сам дотле био, да се преселим у собу бр. 2000000. А један мој познаник филателист, који је у реду пред шалтером био 574. добио је собу бр. 1147. Уопште, филателист који је у реду заузимао $n$-то место, добио је собу бр. $2n - 1$.

Следећег дана, ситуација са собама постала је лакша – конгрес космозоолога је био завршен и они су отпутовали. Ја сам прешао у директоров стан где је била једна слободна соба. Али, оно што је било добро за госте није увек добро за администрацију. После неколико дана, приметио сам да је мој гостољубиви домаћин нерасположен.

– Шта вам је? – упитао сам.

– Половина соба су празне. Финансијски план подбацује.

Истина, ја нисам одмах разумео о каквом је финансијском плану реч, јер су преостали гости плаћали за бесконачно много соба, али сам ипак дао један савет:

– А ви преселите госте тако да све собе буду заузете.

Испоставило се да је то сасвим просто учинити. Филателисти су заузимали само собе са непарним бројевима: 1, 3, 5, 7,...итд. Госта из бр. 3 преселили су у бр. 2, госта из бр. 5 у бр 4; итд. Уопште, гост из собе $2n$-1 пресељава се у собу $n$. Пошто је то завршено, све собе су опет биле попуњене, иако, није дошао ниједан нови гост.

Али, директорове бриге нису се тиме завршиле, а ево зашто. Вигонти се нису задовољили тиме да сагреде хотел „Космос“. Неуморни градитељи су саградили још бесконачно много хотела, од којих је сваки имао бесконачно много соба. При томе, они су раставили на делове толико много галаксија, да се нарушила међугактичка равнотежа, а то је могло да изазове веома тешке последице. Зато им је било предложено да затворе све хотеле осим нашег, и да кориштени грађевински материјал врате одакле су га узели. Али, извршење тог задатка, није нимало лако јер су сви хотели (а међу њима и наш) били пуни гостију.Требало је госте из бесконачно много хотела, од којих сваки има бесконачно много гостију, преселити у један хотел, који је већ пун.

– Ја више не могу! – повикао је директор. – Најпре сам у пун хотел сместио само једног госта, затим сам сместио још 999999 гостију, после тога још бесконачно много гостију, а сада од мене траже да у тај хотел сместим још бесконачно много бесконачних мноштава гостију. Не, хотел није од гуме, нека сместе госте где год хоће, овде за њих нема места!

Но, наредба је наредба, и кроз 5 дана требало је све припремити за пријем нових гостију. Тих дана нико у хотелу није радио; сви су мислили како да реше тај проблем. Био је објављен и наградни конкурс, с туристичким путовањем по једној галаксији као наградом. Било је предложено неколико, на први поглед, добрих решења, али се убрзо проверавањем открило да ти предлози не решавају постављени проблем. Дошао је ред и на мене да покажем да нисам узалуд 5 година, учио математику у Звезданој академији.

– Треба искористити просте бројеве којих, како знате, има бесконачно много! Сместите госте првог хотела у собе које редом имају бројеве: 2, 4, 8, 16,..., госте другог хотела у собе које редом имају бројеве: 3, 9, 21, 81,..., госте трећег хотела у собе које редом имају бројеве: 5, 25, 125, 625,..., госте четвртог хотела у собе које редом имају бројеве: 7, 49, 343,..., итд.

– А да не испадне на тај начин да једну исту собу добију два госта? – упита директор.

– Не, то је искључено! – јер, ако узмемо било која 2 проста броја тада су и њихови квадрати, и њихови кубови, њихови четврти степени,... различити међу собом. Зато ће на тај начин сваки гост добити засебну собу.

Директор је прихватио такво решење и одмах је успео да га још више упрости користећи као полазне бројеве, не све просте бројеве, као сам ја предложио, већ само бројеве 2 и 3. Наиме, он је решио да госте из 1. хотела смести редом у собе с бројем: $2^m \cdot 3$ (за првог госта), $2^2 \cdot 3$ (за другог госта), $2^3 \cdot 3$, $2^4 \cdot 3$, итд; госте из 10. хотела редом у собе са бројем: $2^m \cdot 3^{10}$, $2^{2m} \cdot 3^{10}$, $2^{3m} \cdot 3^{10}$,... При томе је сваки гост добио засебну собу.

ОВАКВО РЕШЕЊЕ ЈЕ СВЕ ОДУШЕВИЛО ЈЕР ЈЕ ПРОБЛЕМ БИО РЕШЕН КОЈИ ЈЕ ИЗГЛЕДАО НЕРЕШИВ. Али, награду нисмо добили ни ја ни директор јер је и моје и директорово решење остављало много слободних соба. По моме предолгу остајале су празне собе чији број није степен неког простог броја, а директорово решење оставило је празне све собе чији број не може да се напише у облику производа $2^n \cdot 3^n$.

Најбоље решење, које је омогићило да се сви становници космичких хотела сместе у хотелу „Космос“ и да при томе, ниједна соба у том хотелу не буде празна, а сваки гост добије засебну собу, нашао је један филателиста, председник Математичке академије галаксије Лабуда. О томе решењу говорићемо неком другом приликом. А сада ми преостаје само да се опростим са својим домаћинима и да се својом фотонском ракетом вратим на Земљу, где треба да свим космонаутима испричам о новом пристаништу у космосу. Осим тога, желим да се са најистакнутијим математичарима Земље и са својм пријатељем Тарантогом поразговарам о својствима бесконачних мноштава.