ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

АКРЕДИТОВАНИ СЕМИНАР:

345
ДРЖАВНИ СЕМИНАР О НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ И РАЧУНАРСТВА ДРУШТВА МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Компетенција: К1
Приоритети: 3

ТЕМА:

МИСТЕРИЈЕ БЕСКОНАЧНОСТИ

РЕАЛИЗАТОРИ СЕМИНАРА:

др БОРИС ШОБОТ,
ГОРДАНА ШОБОТ

БЕОГРАД,
09. – 10. 02. 2019.

Теорија скупова је комплексна област математике, коју због своје апстрактности просечан ученик средње школе тешко може прихватити. Међутим, она већ међу својим фундаменталним резултатима садржи фасцинантне чињенице које напредне ученике могу значајно заинтересовати и приближити математици. На овом предавању представићемо неколико таквих резултата и њихов утицај на свеопшту слику коју ученик (али и наставник) може имати о математици. Притом нећемо подразумевати никакво предзнање слушаоца из ове области, а ниво формализације биће подређен интуитивном схватању представљених појмова. Уместо доказа већину тврђења представићемо кроз примере. Надамо се да ће ово предавање омогућити наставницима да одговоре заинтересованим ученицима на разна питања, као и да изношењем неких од приказаних чињеница подигну њихово опште интересовање за математику.

Предавање ће бити подељено на неколико целина.

1. Појам кардиналности

Поређење „величине“ коначних скупова A и B обично је налакше извршити директним пребројавањем елемената сваког од тих скупова. Код бесконачних скупова, међутим, ситуација је знатно сложенија, те је неопходно увести неки други метод поређења.

Дефиниција. Кажемо да су скупови A и B исте кардиналности (пишемо $|A|=|B|$) ако постоји бијекција $f: A \to B$.

Ова дефиниција је сасвим природна, јер бијекција уствари „упарује“ сваки елемент скупа A с неким елементом скупа B (и обратно) па на тај начин гарантује да та два скупа имају исти број елемената. Постоје и примери коначних скупова код којих је брже на овај начин упоредити величине скупова него директним пребројавањем; неки такви задаци јављали су се на средњошколским такмичењима из математике.

Пример. Да ли међу низовима декадних цифара дужине 6 има више оних чији је збир цифара једнак 27 или оних којима је збир прве три цифре једнак збиру последње три?

Решење. Обележимо са A скуп низова цифара дужине 6 чији је збир цифара једнак 27, а са B скуп оних којима је збир прве три цифре једнак збиру последње три. Нека је $\underline{abcdef}$ један низ скупа A; тада је $\underline{abc(9-d)(9-e)(9-f)}$ низ скупа B, јер је $(9-d)+(9-e)+(9-f) = 27-d-e-f = a+b+c$. Није тешко увидети да је функција $g: A \to B$ дата са $g(\underline{abcdef})= \underline{abc(9-d)(9-e)(9-f)}$ бијекција између скупова A и B, па они имају исти број елемената.

За скуп A кажемо да је коначан ако за неки природан број $n \in N$ постоји бијекција $f: \{1,2,...,n\} \rightarrow A$. У супротном A је бесконачан.

Начини резоновања уобичајени за коначне скупове често падају у воду при раду с бесконачним скуповима. Типичан пример, који управо карактерише бесконачне скупове, је следећа теорема.

Теорема. Скуп A је бесконачан ако и само ако је исте кардиналности као неки његов прави подскуп.

Пример. (Хилбертов хотел) Хотел има бесконачно много соба нумерисаних свим природним бројевима 1, 2, 3, итд. Једног дана у хотел стиже нови гост, али испоставља се да су све собе већ попуњене. Може ли рецепционер ипак сместити новог госта?

Решење. Може; он треба госта из собе број 1 да замоли да пређе у собу број 2, госта из собе број 2 да пређе у собу број 3, и тако даље. На тај начин соба 1 остаје испражњена, а сви стари гости и даље смештени.

Посматрајмо претходни пример нешто формалније. У њему смо, уствари, конструисали бијекцију између скупа природних бројева N и скупа $N\backslash\{1\}$. У питању је пресликавање дато са $f(n)=n+1$; дакле $|N|=|N\backslash\{1\}|$. Претходна теорема гарантује да се тако нешто може увек извести са бесконачним скуповима. Штавише, као што показује наредни пример, може се доказати и знатно више.

Пример. (Хилбертов хотел 2) Једног дана у хотел из претходног примера стиже бесконачно много нових гостију, и опет се испоставља да су све собе већ попуњене. Може ли рецепционер сместити све нове госте?

Решење. Може; он треба госта из собе број 1 да замоли да пређе у собу број 2, госта из собе број 2 да пређе у собу број 4, госта из собе број 3 у собу број 6 и тако даље. На тај начин све собе обележене непарним бројевима остају испражњене, а сви стари гости и даље смештени.

Овог пута конструисали смо бијекцију $f: N \rightarrow 2N$, где је са 2N обележен скуп свих парних бројева, дату са $f(n)=2n$. Дакле, $|N|=|2N|$. Овако нешто је могуће иако скуп N очигледно има бесконачно много елемената који нису у 2N.

За скупове који су исте кардиналности као скуп природних бројева кажемо да су пребројиви. Дакле, скупови $N\backslash\{1\}$ и 2N су пребројиви. Сличном идејом може се показати да је и скуп целих бројева Z пребројив. Испоставља се, штавише, да је и скуп рационалних бројева Q пребројив, мада тај доказ захтева нешто више труда. Поставља се природно питање: да ли је и скуп реалних бројева R пребројив?

За поређење различитих кардиналности користимо следећу дефиницију.

Дефиниција. Кажемо да скуп A има кардиналност мању или једнаку од скупа B (пишемо $|A| \leq |B|$) ако постоји 1-1 функција $f: A \to B$.

И ова дефиниција је сасвим природна, јер 1-1 функција придружује сваком елементу скупа A неки елемент скупа B, али притом неке елементе скупа B можда оставља „непокривене“, дозвољавајући тако могућност да B има више елемената него A. Ако важи $|A| \leq |B|$, али не и $|A| = |B|$, пишемо $|A| < |B|$.

Следећа теорема даје еквивалентан начин поређења величине два скупа.

Теорема. $|A| \leq |B|$ ако и само ако постоји „на“ функција $f: B \to A$.

Са P(X) означавамо партитивни скуп скупа X, тј. скуп свих његових подскупова. Треба нагласити да није необично да елементи скупова буду други скупови (такве „скупове скупова“ некад називамо фамилије скупова); штавише, у аксиоматској теорији скупова скупови и јесу једини објекти који се посматрају, па се и природни, реални бројеви итд. конструишу као скупови.

Следећа теорема изазвала је праву революцију у математици, потпуно изменивши слику коју су научници имали о појму бесконачности. Када се појавила, крајем XIX века, многим математичарима је и поред јасног доказа било изузетно тешко да је прихвате. Због сталних напада које је трпео, пре свега од стране Кронекера, Кантор је чак део свог живота провео у менталној установи.

Теорема. (Канторова теорема) За сваки скуп X важи $|P(X)| > |X|$.

Пре доказа, размотримо шта ова теорема тврди за коначне скупове X. Ако је $|X| = n$, није тешко доказати да је $|P(X)| = 2^n$, па теорема тврди да је $2^n > n$, неједнакост која се лако доказује математичком индукцијом.

Доказ. Докажимо прво да је $|X| \leq |P(X)|$. Дефинишимо функцију $f: X \to P(X)$ овако: $f(x)=\{x\}$; она је очигледно 1-1. Треба још показати да не важи и обратно, да је $|P(X)| \leq |X|$. Претпоставимо супротно; према претходној теореми то би значило да постоји „на“ функција $g: X \to P(X)$. Дефинишимо скуп A на следећи начин: $A = \{x \in X : x \notin g(x)\}$. (Ова дефиниција има смисла јер је x неки елемент скупа X, а g(x) неки подскуп тог скупа.) И скуп A је подскуп скупа X, па пошто је g „на“, постоји неки елемент $x \in X$ такав да $g(x) = A$. Али сада $x \in A$ ако и само ако $x \notin g(x)$, тј. $x \notin A$. Контрадикција.

Претходна теорема води до закључка да, не само што нису све бесконачности „једнако велике“, него постоји бесконачно много бесконачности „различите величине“. Наиме, за $X = N$ добијамо $|P(N)|>|N|$. Још једном применом исте теореме закључујемо $|P(P(N))|>|P(N)|$, итд. добијамо скупове све веће и веће кардиналности.

Теорема. $|R| = |P(N)|$.

Сада из Канторове теореме следи да скуп реалних бројева има већу кардиналност него скуп природних бројева, дакле није пребројив.

Кардиналност скупа R обично се назива континуум и обележава са **c**. Наведимо још неке скупове кардиналности **c**. Како је функција $f:(-\pi/2, \pi/2) \rightarrow R$ дефинисана са $f(x)=tg(x)$ бијекција, следи да је $|(-\pi/2, \pi/2)| = \mathbf{c}$. Даље, између $|(-\pi/2, \pi/2)|$ и било ког другог отвореног интервала (a,b) није тешко успоставити бијекцију, па су сви такви интервали кардиналности **c**. Затворени интервали $[a,b]$ и полуотворени $[a,b)$, $(a,b]$ такође су исте кардиналности. Како између скупа R и скупа тачака било које праве еуклидског простора постоји бијекција (сетимо се бројевне праве), број тачака на правој је такође **c**. Узимајући у обзир то да постоји и бијекција између скупа тачака равни и скупа $R\times R$ парова реалних бројева, из следеће теореме следи да је и број тачака равни исти.

Теорема. За сваки бесконачан скуп A важи $|A\times A| = |A|$.

Како је велики број значајних скупова у математици кардиналности $|N|$ или $|R|$, а $|N|$ је најмања бесконачна кардиналност, природно се поставља питање: да ли постоји скуп A који је по величини између ова два, дакле $|N| < |A| < |R|$? Закључак по којем такав скуп не постоји назива се Хипотеза континуума. Питање њене тачности истакао је Давид Хилберт 1900. године као једно од најважнијих нерешених математичких питања на прелазу са XIX на XX век. Чињеница да га је ставио на прво место те листе од 23 проблема говори у прилог тези да је Хилберт можда сматрао Хипотезу континуума и најважнијом међу њима. На разрешење се чекало до 1963. године када је показано да је ову претпоставку немогуће доказати нити оповргнути, дакле да је она независна од аксиома теорије скупова. Притом је у теорију скупова уведен метод форсинга, који је од тада изузетно развијен и примењен на доказе независности великог броја тврђења.

2. Аксиоматизација

Значај аксиоматизације за математику је огроман; посебно, недостатак прецизне карактеризације појма скупа води до бројних парадокса.

Пример. Дефинишимо један подскуп A скупа природних бројева на следећи начин: $A = \{n \in N : \text{број } n \text{ се може описати помоћу највише 20 речи српског језика}\}$. Јасно је да нису сви природни бројеви у скупу A, јер српски језик има коначно много речи, које се могу комбиновати на коначно много начина у изразе од највише 20 речи; с друге стране, скуп N је бесконачан. Нека је m најмањи природан број који не припада скупу A. Тада је m најмањи природан број који се не може описати помоћу највише 20 речи српског језика. Али ми смо управо описали m помоћу 14 речи, контрадикција.

Разлог због којег је дошло до овог парадокса је то што смо дефинисали један скуп на врло произвољан начин, користећи нематематичке појмове попут „речи српског језика“. Овај пример јасно показује да, ако желимо да избегнемо овакве неприлике, при грађењу скупова морамо имати јасна и прецизна правила која треба поштовати. Кантор је први покушао да направи једну такву аксиоматизацију, тј. да опише начине на које се могу градити скупови.

Пример. (Раселов парадокс) Канторове аксиоме дозвољавале су изградњу оваквог скупа: $A = \{x : x \notin x\}$. Али тада $A \in A$ ако и само ако $A \notin A$, контрадикција. (Треба приметити сличност између ове конструкције и доказа Канторове теореме; заједничка идеја која се у њима користи назива се дијагонализација.)

<u>3. Аксиома избора</u>

Како су Канторове аксиоме водиле до парадокса, изграђен је нови, тзв. Зермело-Франкелов систем аксиома (ZFC) који на пажљивији начин прецизира како се смеју градити скупови, и који је и данас у употреби. Једна од његових аксиома (слово C у ZFC, означава choice) је тзв. аксиома избора. Она тврди да се за било коју фамилију скупова $\{A_i : i \in I\}$ може из сваког од скупова A_i „изабрати“ по један елемент $a_i \in A_i$. Интересантна је као једина неконструктивна аксиома овог система: она не описује начин бирања тих елемената него само тврди његово постојање, због чега је често била оспоравана.

Аксиома избора темељ је многих значајних тврђења из свих области математике. Наведимо нека од њих: сваки векторски простор има базу, сваки повезан граф има покривајуће стабло, свако поље има јединствено алгебарско затворење, теорема компактности исказне логике, Хан-Банахова теорема из функционалне анализе, Ремзијева теорема,... Велики део данашње математике зависи од употребе аксиоме избора. Ипак, она са собом носи и неке необичне последице. На пример, уз коришћење аксиоме избора може се конструисати немерљив подскуп скупа R, тзв. Виталијев скуп. Још чудније звучи тзв. Банах-

Тарски парадокс: било која сфера S се може поделити на 5 дисјунктних подскупова од којих се потом могу саставити две сфере подударне са S. Наравно, тим деловима је тада немогуће „измерити“ површину.

Један од значајних еквивалената аксиоме избора је принцип доброг уређења: неформално речено, елементи сваког скупа се могу поређати у низ. Притом, реч „добро“ означава да је такав низ уређење у којем не постоји бесконачан опадајући низ (као нпр. у скупу природних бројева). Наравно, како постоје скупови већи од N, за индексирање таквих низова нису довољни природни бројеви. У ту сврху се уводе ординали – посебна врста скупова, која омогућава и јаснију презентацију кардиналних бројева као посебне врсте ординала. Користећи ординале, уопштава се и метод математичке индукције на тзв. трансфинитну индукцију. Слично томе, уводи се и конструкција тзв. трансфинитном рекурзијом, која омогућава примену рекурзивних идеја и на скупове веће од N. Трансфинитном рекурзијом се, потом, на ординалима уводи ординална аритметика: операције сабирања, множења и степеновања које су уопштење одговарајућих операција на N.

Пример. Да ли је могуће раван обојити у 2019 боја тако да свака кружница садржи тачке свих боја?

Идеја решења. Могуће је. Како је број тачака у равни (могућих центара кружница) **c,** и број позитивних реалних бројева (тј. могућих полупречника) такође **c**, кружница у равни има такође **c.** На свакој од њих налази се по **c** тачака (колико и на свакој дужи). Користећи принцип доброг уређења поређамо све кружнице у равни у један низ. Затим рекурзијом за једну по једну кружницу низа бирамо 2019 тачака које још нису обојене и бојимо их различитим бојама; ово је могуће учинити јер је број обојених тачака у свим претходним корацима мањи од **c**. На крају конструкције, свака кружница ће садржати тачке свих боја.

4. Геделове теореме некомплетности

За сваку теорију задату аксиоматски, па и за теорију скупова, поставља се питање да ли је она комплетна, тј. да ли се помоћу ње за свако тврђење о објектима које проучава та теорија може разрешити: да ли је оно тачно или не? Испоставља се да ZFC теорија није комплетна; рецимо Хипотеза континуума не може се ни доказати нити оповргнути из ње. Може ли се онда та теорија допунити још неким аксиомама тако да постане комплетна? Одговор је одричан. Али то не значи да ZFC теорија није добро осмишљена; следећа теорема тврди да ће исту судбину имати свака теорија која у себи садржи основне чињенице о аритметици на природним бројевима. Доказао ју је Гедел 1931. године.

Теорема. (Прва Геделова теорема некомплетности) Ниједна конзистентна рекурзивно аксиоматизабилна теорија која садржи аритметику на природним бројевима није комплетна.

Овде „конзистентна“ значи теорија која не води у контрадикцију. Појам рекурзивне аксиоматизабилности је нешто сложенији, али интуитивно он значи да теорија не мора чак да има ни коначан број аксиома, али мора да постоји алгоритам који за сваку формулу проверава да ли је она аксиома; другим речима ово је захтев да теорија буде практично употребљива.

Претходна теорема значи да су математичари „осуђени“ да своје теорије (барем оне које укључују рад са природним бројевима) заувек развијају кроз „паралелне универзуме“: колико год додатних аксиома било прихваћено, увек ће остати тврђења која се не могу доказати нити оповргнути.

Теорема. (Друга Геделова теорема некомплетности) Ниједна конзистентна рекурзивно аксиоматизабилна теорија која садржи аритметику на природним бројевима не може доказати своју конзистентност.

Ова теорема показује да теорију ZFC, као и било коју другу која садржи аритметику на N, морамо прихватити „на поверење“, јер нема наде да ћемо икада моћи да покажемо да она не води до контрадикције. Дакле, над главом сваког математичара виси својеврсни Дамоклов мач: могуће је да се, после векова развијања математичких теорија, једног дана испостави да оне воде до неког парадокса сличног Раселовом. Ипак, можемо се сложити да је ово мало вероватно ако узмемо у обзир фантастичне умове који су учествовали у развоју теорије скупова током XX века, а нису наишли на неки нови парадокс.

5. Неколико интересантних задатака

У последњем делу предавања представићемо (без доказа, који захтевају знатно детаљнији увид у теорију скупова) неколико необичних задатака са неочекиваним решењима. Први од њих посебно је изненађујући, јер је у питању проблем у којем се не помињу никакви бесконачни објекти.

Пример. (Херкулес и хидра) Нека је дато стабло (у графовском смислу) H са једним издвојеним чвором k који називамо корен. Ово стабло представља чудовиште хидру, а његови висећи чворови (чворови степена 1) главе хидре. Херкулес у сваком потезу може одсећи једну главу u након чега, ако је v чвор суседан са u, а w чвор суседан са v (у смеру корена, ако сам чвор v није корен), из чвора w израсте још n подстабала изоморфних оном који већ расте из w према v. Да ли Херкулес може победити хидру, тј. одсећи јој све главе тако да преостане само корен?

Одговор. Може; штавише, Херкулес увек побеђује хидру независно од редоследа којим јој одсеца главе! Идеја доказа подсећа на такмичарска решења задатака методом инваријанти: сваком чвору стабла придружи се посебним поступком по један ординал тако да сваки Херкулесов потез смањује укупан збир свих ординала придружених чворовима стабла. Али не постоји бесконачан опадајући низ ординала, па се борба мора завршити након коначно много корака и Херкулес побеђује.

Наредни задатак показује да се, чак и у домену бесконачног, игре на срећу на дуже стазе увек завршавају лоше по играча.

Пример. Слот машина за сваки убачен новчић враћа играчу пребројиво много новчића. Да ли ће играч који креће са једним новчићем после континуум много корака остати без ичега?

Одговор. Да, и то уствари након само пребројиво много корака игре! Доказ овог тврђења захтева увођење појма тзв. стационарних скупова, и још је један пример чињенице да уобичајена, „коначна“ логика престаје да важи када неки поступак има бесконачно много корака: иако играч у сваком кораку добија више него што је уложио, на крају ће остати без ичега.