ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

АКРЕДИТОВАНИ ПРОГРАМ:

345.
ДРЖАВНИ СЕМИНАР О НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ И РАЧУНАРСТВА ДРУШТВА МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Компетенција: К1
Приоритети: 3

ТЕМА 14:

КОРИСТЕЋИ ПОВРШИНУ

РЕАЛИЗАТОРИ СЕМИНАРА:

др ВОЈИСЛАВ АНДРИЋ,
МАРИЈАНА СТЕФАНОВИЋ

БЕОГРАД,
09. – 10. 02. 2019.

САДРЖАЈ:

КОРИСТЕЋИ ПОВРШИНУ

Површина геометријских фигура је занимљива и веома значајна наставна материја која је присутна у настави математике од четвртог разреда основне школе па све до краја средње школе.

Циљ овог саоштења је да кроз разноврсне, интересантне и систематично груписане примере укаже на могућности популаризације ових наставних садржаја у редовној и додатној настави математике и коришћењу површина равних фигура у разноврсним наставним, али и практичним, проблемским и животним ситуацијама.

Конкретно биће речи о коришћењу површина у: проблемима егзистенције геометријских објеката; проблемима израчунавања површина геометријских фигура; доказним проблемима везаним за једнакост површина; доказним проблемима везаним за неједнакост површина; конструктивним проблемима везаним за површину; логичко-комбинаторним проблемима везаним за површину; другим проблемским ситуацијама.

Намера аутора је да излагањем неколико десетина проблема у којима се не помиње, а користи површина геометријских фигура, слушаоци мотивишу да активно учествују у раду и размишљају о могућим наставцима проблема и формулацији нових и оригиналних проблема сличним размишљањима, аналогијама, мењањем параметара, евентуалним генерализацијама и нарочито свестраним истраживањима проблема. Конкретно, желимо да анализом елементарних проблема уз идеје присутних наставника, дођемо до нових сазнања и мноштва занимљивих и отворених проблема.

A) ПРОБЛЕМИ ЕГЗИСТЕНЦИЈЕ ГЕОМЕТРИЈСКИХ ОБЈЕКАТА

Математика је наука која се између осталог бави и математичким објектима, при чему ти објекти или њихови модели могу бити реални, видљиви и опипљиви или и најчешће, више или мање апстрактни. Ма о каквим конкретним и апстрактним математичким објектима разне сложености била реч увек се поставља питање њихове егзистенције. Тако да се већ у почетној настави математике ученици нађу пред питањима: Постоје ли четири узастопна непарна броја који су прости бројеви? Постоји ли троугао чије су странице 13, 14 и 28? Постоји ли природан број чији се квадрат завршава цифром 7? Постоји ли шестострана једнакоивична призма? Постоји ли шестострана једнакоивична пирамида?

Проблеми који следе су управо такве „егзистенцијалне" природе и своде се на конструкцију геометријског објекта који испуњава дате услове или доказивање да такав објекат не постоји. Зато проблеми егзистенције представљају врло занимљиву наставну материју, јер ученике упућују на експериментисање, истраживање, конструктивност, аргументацију ... што наставу математике чини занимљивијом а мотивацију ученика подиже на виши ниво. Оно што наредне проблеме чини интересантним је чињеница да се за њихово решавање користи површина геометријских фигура, која је некад директно присутна, а често невидљива, али врло ефикасна за њихово решавање .

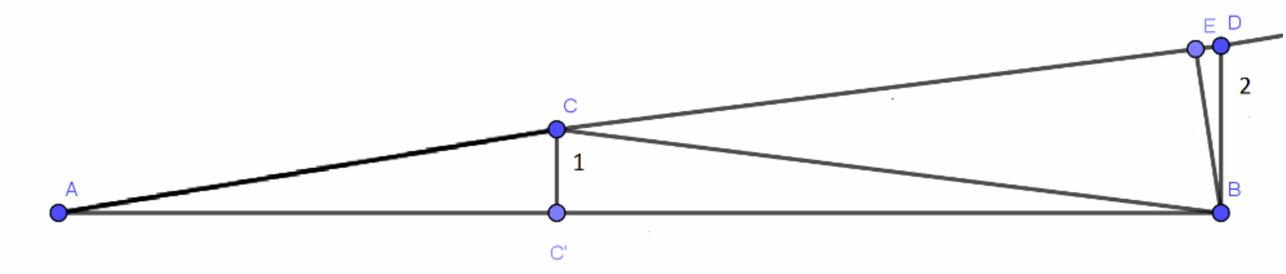
1. Постоји ли троугао чије су висине 5, 9 и 12?

Решење: Нека су странице датог троугла редом a, b и c, а висне $h_a = 5$, $h_b = 9$ и $h_c = 12$. Тада је површина троугла $P = \frac{5a}{2} = \frac{9b}{2} = \frac{12c}{2}$, па је $a = \frac{2P}{5} = \frac{72P}{180}$, $b = \frac{2P}{9} = \frac{40P}{180}$, $c = \frac{2P}{12} = \frac{30P}{90}$.

Један од услова да постоји троугао је $b + c > a$. Како је $b + c = \frac{2P}{9} + \frac{2P}{12} = \frac{14P}{36} < \frac{2P}{5} = a$, то тражени троугао не постоји.

2. За које вредности природног броја n постоји троугао чије су висине n, $n + 1$ и $n + 2$?
3. Нека су a, b и n природни бројеви. Под којим условима постоји троугао чије су висине n, $n + a$, $n + b$? *[1]
4. Постоји ли троугао чија је једна висина једнака збиру других двеју висина? *
5. Постоји ли троугао чије су све странице веће од 2019, а чија је површина мања од 1?
6. Да ли се може конструисати троугао чије су све висине мање од 2, а чија је површина већа од 2019?

Решење: Уочимо једнакокраки троугао ABC такав да је његова основица $AB = 5000$, а висина која јој одговара $CC' = 1$.



Површина троугла ABC је $P = \frac{AB \cdot CC'}{2} = \frac{5000 \cdot 1}{2} = 2500 > 2019$. Како је $CC' = 1$, то је $BD = 2$, а $BE < 2$. Како су висине CC' и BE троугла ABC мање од 2 конструисани троугао је и тражени троугао.

7. Постоји ли троугао чије су све висине веће од 3, а површина мања од 4?
8. Странице троугла су 3, 4 и 5. Да ли у том троуглу постоји тачка чија су сва три растојања од страница троугла мања од 1?

В) ПРОБЛЕМИ ИЗРАЧУНАВАЊА МЕТРИЧКИХ КАРАКТЕРИСТИКА ГЕОМЕТРИЈСКИХ ФИГУРА

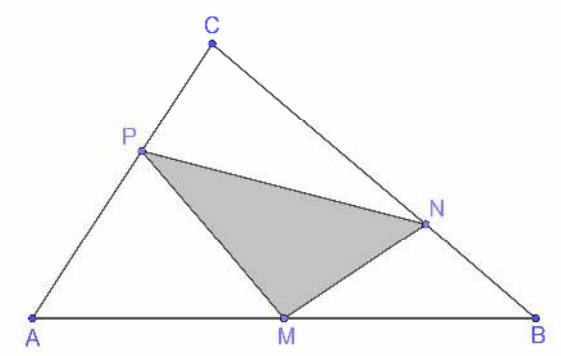
9. Тачке M, N и P деле странице AB, BC и CA троугла ABC у односу: а) 1:1; b) 2:1; c) m:n. Ако је површина троугла ABC једнака S, колика је површина троугла MNP ?
10. Тачке M, N и P деле странице AB, BC и CA троугла ABC тако да је $AM : MB = 1 : 1$, $BN : NC = 1 : 2$ и $CP : PA = 2 : 3$. Ако је површина троугла ABC једнак 30, колика је површина троугла MNP ?

---

[1] Проблеми обележени звездицама су проблеми код којих се могу поставити и друга питања и процес истраживања наставити.

Решење: Површина троугла $P_{\Delta MBN} = \dfrac{\frac{1}{2}AB \cdot \frac{h_c}{3}}{2} = \dfrac{P}{6} = 5$; $P_{\Delta PAM} = \dfrac{\frac{1}{2}AB \cdot \frac{3h_c}{5}}{2} = \dfrac{3P}{10} = 9$.

На исти начин је $P_{\Delta CPN} = \dfrac{\frac{2}{5}AC \cdot \frac{2h_b}{3}}{2} = \dfrac{4P}{15} = 8$.



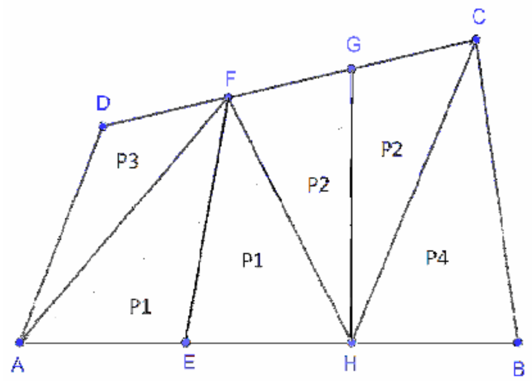
Тада је $P_{\Delta MNP} = P_{\Delta ABC} - (P_{\Delta MBN} + P_{\Delta NCP} + P_{\Delta AMP}) = 30 - (5 + 8 + 9) = 30 - 22 = 8$

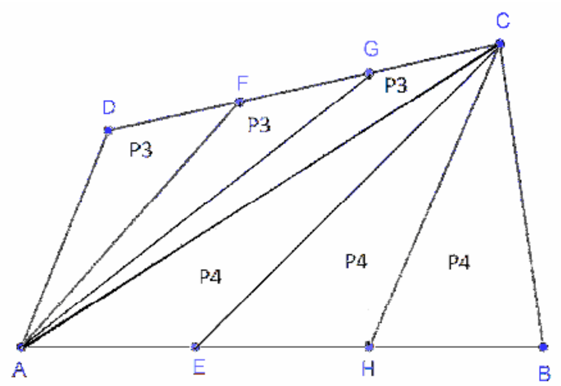
11. Тачке M и N деле странице AB, односно BC троугла ABC, тако да је $AM = MB$ и $BN : NC = 1 : 2$. Ако се праве AN и CM секу у тачки S и ако је површина троугла ABC једнака 30, одредити површину четвороугла $MBNS$.

12. Дат је конвексан четвороугао $ABCD$ површине S. Нека су K, L, M и N редом средишта страница AB, BC, CD и DA четвороугла. Доказати да је $KLMN$ паралелограм и израчунати његову површину .

13. Странице AB и CD конвексног четвороугла $ABCD$ су подељене на три једнака дела и на тај начин је четвороугао подељен на три уздужне траке. Ако је површина четвороугла $ABCD$ једанака P израчунати површину „средње“ траке.

Решење: Нека је површина троугла AEF једнака P_1 и површина троугла CGH једнака P_2. Тада је и $P_{\Delta AEF} = P_{\Delta AEF} = P_1$ и $P_{\Delta CGH} = P_{\Delta FGH} = P_2$ јер су то троуглови који имају једнаке основице и једнаке (заједничке) висине. Слично, ако је $P_{\Delta ADF} = P_3$ то је и $P_{\Delta ACD} = 3P_3$ и ако је $P_{\Delta BCH} = P_4$ то је и $P_{\Delta ACB} = 3P_4$.
Површина четвороугла $ABCD$ је $P = P_{\Delta ABCD} = P_{\Delta ACB} + P_{\Delta ACD} = 3P_3 + 3P_4$, односно $P_3 + P_4 = P/3$.

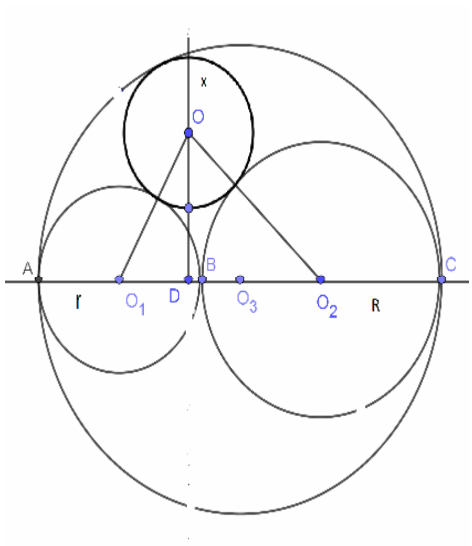




С друге стране површина четвороугла $ABCD$ је $P_{ABCD} = P_3 + 2P_1 + 2P_2 + P_4$. Изједначавањем површина добијамо да је $3P_3 + 3P_4 = P_3 + 2P_1 + 2P_2 + P_4$, тј. $P_1 + P_2 = P_3 + P_4 = P/3$.
Према томе $P_{EFGH} = P_1 + P_2 = P_3 + P_4 = P/3$.

14. Дат је троугао ABC. Тангента t у тачки B на описану кружницу око тог троугла сече праву AC у тачки M. Одредити $\frac{AM}{MC}$, ако је $\frac{AB}{BC}=k$.

15. Тачке A, B и C припадају једној правој. Над AB, BC и AC , као пречницима, са исте стране те праве, конструисане су три полукружнице. Центар кружнице k , која додирује сваку од три дате полукружнице, налази се на растојању d од праве AC . Одреди полупречник кружнице k.



Решење: Нека је $A-B-C$ распоред тачака и нека је $AB=2r, BC=2R, O_1$ средиште AB, O_2 средиште BC, O_3 средиште AC, O центар кружнице k дате у задатку, x њен полупречник и D подножје нормале из O на $AC(OD=d)$. Тада је

$AO_3=O_3C=r+R,\quad O_1O_3=AO_3-AO_1=R,\ \ O_2O_3=CO_3-CO_2=r,$

$O_1O_2=O_1B+BO_2=r+R,\quad O_1O=r+x,\quad O_2O=R+x,\ \ O_3O=R+r-x$

Херонов образац за рачунање површине троугла гласи $P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, где је $s=\frac{a+b+c}{2}$ полуобим троугла. У троуглу ΔO_1OO_3 су странице $r+x, R$ и $R+r-x$, па је $s=R+r$, те имамо $P_{\Delta O_1OO_3}=\sqrt{(R+r)r(R-x)x}$. Са друге стране ова површина је једнака полупроизводу странице и одговарајуће висине, те се добија $P_{\Delta O_1OO_3}=\frac{1}{2}O_1O_3\cdot OD=\frac{1}{2}(R+r)d$. Када изједначимо ове изразе добијамо $\sqrt{(R+r)r(R-x)x}=\frac{1}{2}Rd$.

У троуглу ΔO_1OO_2 су странице $r+x, r+R$ и $R+x$, па је $s=R+r+x$ и $P_{\Delta O_1OO_2}=\sqrt{(R+r+x)Rrx}$. $P_{\Delta O_1OO_2}=\frac{1}{2}O_1O_2\cdot OD=\frac{1}{2}(R+r)d$ па имамо

$$\sqrt{(R+r+x)Rrx}=\frac{1}{2}(R+r)d.$$

Након квадрирања и одузимања ове две једнакости добијамо $rx^2(2R+r)=\frac{1}{4}rd^2(2R+r)$, односно $x=\frac{d}{2}$.

16. У паралелограму са страницама a, b и оштрим углом α конструисане су симетрале унутрашњих углова. Одредити површину четвороугла одређеног тим симетралама.

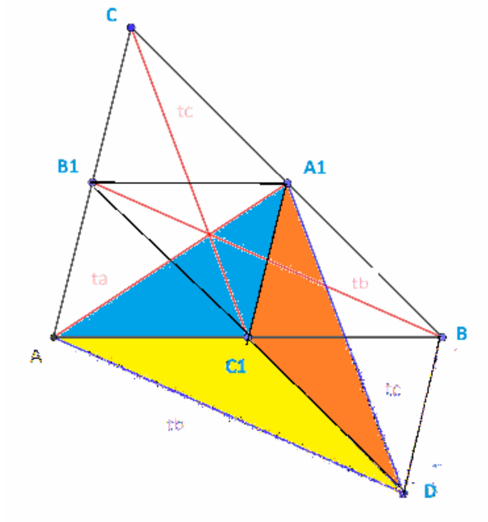
17. Тачка A припада кругу k полупречника r. A_p и A_q су полуправе такве да је $\sphericalangle pAq=60^\circ$. Ако су B и C пресечне тачке тих полуправих и круга k, одредити дужину тетиве BC.

18. У правоугли трапез чије су основице *a* и *b* уписан је круг. Одредити површину трапеза.

19. Израчунај површину круга чији је полупречник једнак *r*.*

20. Од тежишних дужи троугла *ABC* конструисан је троугао који је сличан троуглу *ABC*. Одредити коефицијент сличности та два троугла.*

Решење: Нека су t_a, t_b, t_c тежишне дужи које одговарају страницама a, b, c троугла ΔABC, редом. Тада је $4{t_a}^2 = 2c^2 + 2b^2 - a^2$, $4{t_b}^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2$, $4{t_c}^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$ па већој страници одговара мања тежишна дуж. Без умањена општости, можемо претпоставити да је $a \leq b \leq c$.



Тада је $\frac{t_a}{c} = \frac{t_b}{b} = \frac{t_c}{a} = k$, па коришћењем горњих једнакости имамо $4k^2(a^2 + b^2 + c^2) = 4({t_a}^2 + {t_b}^2 + {t_c}^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$. Како је $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ (а самим тим и $\neq 0$). Следи $4k^2 = 3$ односно $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

C) ДОКАЗНИ ПРОБЛЕМИ ВЕЗАНИ ЗА ЈЕДНАКОСТИ ПОВРШИНА

21. Нека су дужи h_a, h_b и h_c висине троугла ABC ($a \geq b \geq c$). Дужи h_a, h_b и h_c су странице трогла $A'B'C'$. Ако су троуглови ABC и $A'B'C'$ слични онда је $ac = b^2$. Доказати.*

22. Нека су h_a, h_b и h_c висине троугла, при чему је $\left(\frac{h_a}{h_b}\right)^2 + \left(\frac{h_a}{h_c}\right)^2 = 1$. Доказати да је троугао правоугли.

23. Нека је M произвољна тачка у унутрашњој области једнакостраничног троугла странице a и нека су x, y, z редом нормална одстојања тачке M од страница датог троугла. Доказати да је $x + y + z = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

24. Нека је M произвољна тачка у унутрашњој области једнакостраничног троугла висине h. Ако су P, Q и R нормалне пројекције тачке М на висине датог троугла онда је $AP + BQ + CR = 2h$. Доказати.

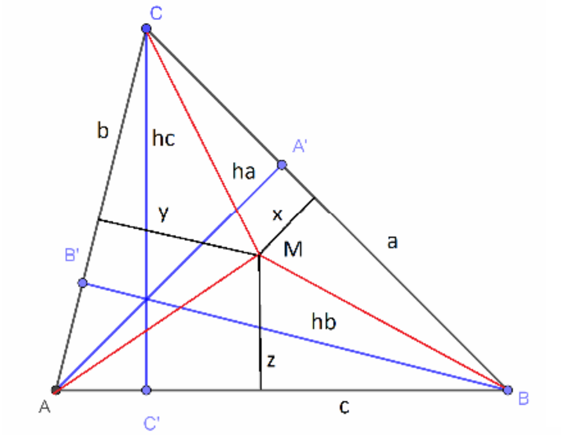
25. Дужине страница троугла образују аритметичку прогресију. Доказати да је једна од висина троугла једнака $3r$, где је r полупречник круга уписаног у троугао.

26. Дат је троугао ABC. У темену B датог троугла конструисана је тангента t на кружницу описану око троугла ABC. Тангента t сече праву AC у тачки M. Одредити $AM : MC$, ако је $AB : BC = к$.

27. Нека су h_a, h_b и h_c висине троугла. Доказати да је $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$ где је r полупречник круга уписаног у троугао.

28. Нека је М произвољна тачка у унутрашњој области троугла чије су странице a, b, c и нека су x, y, z редом нормална одстојања тачке М од страница датог троугла. Ако су h_a, h_b и h_c висине троугла, онда је $\frac{x}{h_a}+\frac{y}{h_b}+\frac{z}{h_c}=1$. Доказати.

Решење:



Површина троугла ABC је

$$P=\frac{ax}{2}+\frac{by}{2}+\frac{cz}{2}.$$

Како је $a=\frac{2P}{h_a}$, $b=\frac{2P}{h_b}$, $c=\frac{2P}{h_c}$ то је

$$P=\frac{2Px}{2h_a}+\frac{2Py}{2h_b}+\frac{2Pz}{2h_c}.$$

Ако добијену једнакост поделимо са P следи да је

$$\frac{x}{h_a}+\frac{y}{h_b}+\frac{z}{h_c}=1.$$

29. Кроз центар S круга уписаног у дати троугао ABC конструисане су праве a', b' и c' паралелне страницама a, b и c датог троугла. Странице датог троугла на правама a', b' и c' одсецају одсечке дужине m, n и p. Доказати да је $\frac{m}{a}+\frac{n}{b}+\frac{p}{c}=2$.

30. Кроз центар S круга уписаног у дати троугао ABC конструисане су праве a', b' и c' паралелне страницама a, b и c датог троугла. Праве a', b' и c' на страницама датог троугла одсецају одсечке дужине m, n и p. Доказати да је $\frac{m}{a}+\frac{n}{b}+\frac{p}{c}=1$.

31. Многоугао који је описан око круга полупречника r, на произвољан начин, разложен је на коначно много троуглова. Доказати да је сума полупречника кругова уписаних у те троуглове већа од r.

32. У конвексном многоуглу чији су сви углови једнаки дата је тачка M. Доказати да је збир нормалних одстојања тачке M од страница многоугла константан и независан од избора тачке M.

33. Доказати Чевину теорему (коришћењем површина).

34. Нека су $a=BC, b=CA$ и $c=AB$ странице троугла ABC и коме је $\sphericalangle BAC=3\cdot\sphericalangle ABC$. Доказати да је тада $bc^2=(a-b)^2(a+b)$.

Решење: Означимо са α, β, γ углове троугла код темена A, B, C. Из услова задатка имамо да је $\alpha=3\beta$ и $\gamma=\pi-4\beta$. Синусна теорема у троуглу ΔABC нам даје

$$\frac{b}{\sin\beta}=\frac{a}{\sin 3\beta}=\frac{a}{\sin\beta(4cos^2\beta-1)}.$$

Следи да је

$$a=b(4cos^2\beta-1)$$

За рачунање траженог израза још треба да искористимо косинусну теорему у троуглу ΔABC,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,$$

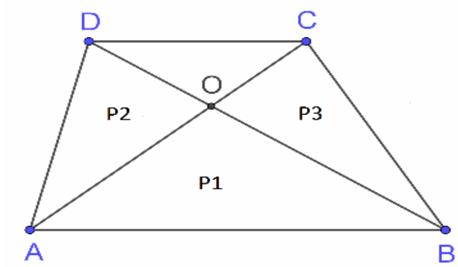
као и формулу за косинус четворострукoг угла:

$$\cos 4\beta = 8\cos^4\beta - 8\cos^2\beta + 1.$$

Тада је

$$\begin{aligned} bc^2 &= a^2b + b^3 - 2ab^2\cos(\pi - 4\gamma) = b^3 + ab[a + 2b\cdot\cos(4\beta)] \\ &= b^3 + ab[b(4\cos^2\beta - 1) + 2b\cdot(8\cos^4\beta - 8\cos^2\beta + 1)] \\ &= b^3 + ab^2(16\cos^4\beta - 12\cos^2\beta + 1) \\ &= b^3 + ab^2[-1 - (4\cos^2\beta - 1) + (4\cos^2\beta - 1)^2] \\ &= b^3 - ab^2 - a^2b + a^3 = (a-b)^2(a+b). \end{aligned}$$

35. Кружница која је уписана у троугао ABC додирује странице AB и AC редом у тачкама M и N. Нека је P тачка пресека симетрале угла $\angle ABC$ и праве MN. Доказати да је површина троугла ABC два пута веће од површине троугла ABP.
36. Круг уписан у правоугли троугао ABC (теме правог угла је C) додирује хипотенузу AB у тачки D. Доказати да је површина троугла једнака $AD \cdot BD$.
37. Дијагонале трапеза $ABCD$ секу се у тачки O. Доказати да је површина троугла AOD једнак површини троугла BOC.



Решење: Нека је површина троугла AOB једнака P_1, површина троугла AOD једнака P_2 и површина троугла BOC једнака P_3. Како је $P_{\Delta ABD} = P_{\Delta ABC}$ јер имају заједничку основицу AB и једнаке висине то је $P_{\Delta ABD} = P_1 + P_2 = P_1 + P_3 = P_{\Delta ABC}$. Следи да је $P_2 = P_3$ што је и требало доказати.

38. Дијагонале конвексног четвороугла $ABCD$ секу се у тачки O. Доказати да је производ површина троуглова AOB и COD једнак производу површина троуглова BOC и DOA.
39. Странице AB и CD конвексног четвороугла $ABCD$ су подељене на пет једнаких делова и на тај начин је четвороугао подељен на пет уздужних трака. Доказати да је површина „средње“ траке једнака петини површине четвороугла $ABCD$.*
40. Дат је оштроугли троугао ABC. Нека су M, N и P средишта страница AB, AC и BC и A_0 подножје нормале из тачке N на страницу BC, и нека је A_1 средиште дужи MA_0. Конструишимо аналогно B_1 и C_1. Доказати да се праве AA_1, BB_1 и CC_1 секу у једној тачки, ако и само ако је троугао ABC једнакокрак.

Решење: Нека је $\{A_2\} = AA_1 \cap BC$, очито је A_2 унутрашња тачка дужи BC.

Такође, нека је Q подножје нормале из M на BC, тако да је очито A_1 центар правоугаоника $MNPQ$. Следи да је

$$\frac{BA_2}{A_2C} = \frac{\sin\sphericalangle BAA_2/\sin\sphericalangle BA_2A\cdot BA}{\sin\sphericalangle A_2AC/\sin\sphericalangle AA_2C\cdot CA} = \frac{\sin\sphericalangle MAA_1}{\sin\sphericalangle A_1AN}\cdot\frac{BA}{CA} = \frac{\sin\sphericalangle AMA_1\cdot MA_1/AA_1}{\sin\sphericalangle ANA_1\cdot A_1N/AA_1}\cdot\frac{BA}{CA} = \frac{\sin\sphericalangle AMP}{\sin\sphericalangle ANQ}\cdot\frac{BA}{CA} = \frac{\sin\sphericalangle MAP\cdot AP/MP}{\sin\sphericalangle QAN\cdot AQ/NQ}$$

.

$\frac{BA}{CA} = \frac{BA\cdot AP\cdot \sin\sphericalangle BAP}{CA\cdot AQ\cdot \sin\sphericalangle QAC} = \frac{P_{\Delta BAP}}{P_{\Delta QAC}} = \frac{BP}{QC}$ (уместо површина могли смо још једном применити синусну теорему). Даље рачунамо применом косинусне теореме.

$BP = BC - PC = a - \frac{1}{2}AC\cos\sphericalangle C = a - \frac{b}{2}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{3a^2-b^2+c^2}{4a}$, $QC = \frac{3a^2-b^2+c^2}{4a}$.

То значи да се услов Чевине теореме на конкурентност правих AA_1, BB_1 и CC_1 :

$\frac{BA_2}{A_2C}\cdot\frac{CB_2}{B_2A}\cdot\frac{AC_2}{C_2B} = 1$ може преписати као

$(3a^2 - b^2 + c^2)(3b^2 - c^2 + a^2)(3c^2 - a^2 + b^2) = (3a^2 + b^2 - c^2)(3b^2 + c^2 - a^2)$
$(3c^2 + a^2 - b^2)$.

Ова реалација се елементарним алгебарским трансформацијама своди на $(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2) = 0$, а то је управо услов да је троугао ΔABC једнакокрак.

41. Нека је трапез $ABCD$ код кога је $AB \parallel CD$ и P тачка на продужетку дијагонале AC тако да је C између A и P . Ако су X и Y средишта основица AB и CD, а M и N пресечне тачке правих PX и PY са дужинама BC и DA , редом, доказати да је права MN паралелна основицама трапеза.

Решење: Приметимо да је $\frac{BM}{MC} = \frac{S_{\Delta PMB}}{S_{\Delta PMC}}$.

Како је $S_{\Delta PMB} + S_{\Delta XMB} = S_{\Delta PXB} = S_{\Delta PXA} = S_{\Delta PCM} + S_{\Delta ACM} + S_{\Delta AXM}$,

добијамо да је $S_{\Delta PMB} = S_{\Delta PMC} + S_{\Delta ACM}$.

Према томе $\frac{BM}{MC} = \frac{S_{\Delta PMC} + S_{\Delta ACM}}{S_{\Delta PMC}} = 1 + \frac{S_{\Delta ACM}}{S_{\Delta PMC}} = 1 + \frac{AC}{CP}$ (1)

Слично као и горе, користићемо да је $\frac{AN}{ND} = \frac{S_{\Delta PNA}}{S_{\Delta PDN}}$. Како је Y средиште дужи CD, важи.

$S_{\Delta PNC} = S_{\Delta PYC} + S_{\Delta YCN} = S_{\Delta PDY} + S_{\Delta DYN} = S_{\Delta PDN}$.Из $S_{\Delta PNA} = S_{\Delta PNC} + S_{\Delta CNA}$ следи да је

$\frac{AN}{ND} = \frac{S_{\Delta PNA}}{S_{\Delta PDN}} = \frac{S_{\Delta PNC} + S_{\Delta CNA}}{S_{\Delta PNC}} = 1 + \frac{S_{\Delta CNA}}{S_{\Delta PNC}} = 1 + \frac{AC}{CP}$ (2)

Из (1) и (2) следи $\frac{AN}{ND} = \frac{BM}{MC}$ што значи да је $NM \parallel AB \parallel CD$.

42. У конвексном четвороуглу $ABCD$ тачка O је пресек дијагонала. Нека су E, F и G редом пројекције тачака B, C и O на AD . Доказати да је површина четвороугла $ABCD$ једнака $\frac{AD\cdot BE\cdot CF}{2\cdot OG}$.

D) ДОКАЗНИ ПРОБЛЕМИ ВЕЗАНИ ЗА НЕЈЕДНАКОСТИ ПОВРШИНА

43. Доказати да површина троугла чија се темена налазе на страницама паралелограма није већа од половине површине паралелограма.

44. У правоуглом троуглу важи $c + h > a + b$, где су a и b катете, c хипотенуза и h хипотенузина висина. Доказати.

45. Конвексан многоугао који је описан око круга полупречника r, разложен је на коначно много троуглова. Доказати да је сума полупречника кругова уписаних у добијене троуглове већа од r.

46. Нека су t_a и t_b тежишне дужи, које одговарају страницама BC и CA троугла ABC, а P његова површина. Доказати да важи: $t_a \cdot t_b \geq \frac{3}{2}P$. Може ли се дата неједнакост уопштити?

47. Нека су a, b, c, d странице, а P површина конвексног четвороугла. Доказати да важи неједнакост $P \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}$. Када важи једнакост?

Решење: Нека су α и β углови између страница $a = AB$ и $b = BC$, односно $c = CD$ и $d = DA$, редом. Тада је

$$P(ABCD) = P_{\Delta ABC} + P_{\Delta ACD} = \frac{1}{2}ab\sin\alpha + \frac{1}{2}cd\sin\beta \leq \frac{1}{2}(ab + cd) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{c^2+d^2}{2}\right) = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}$$

Једнакост у првој неједнакости важи акко је $\alpha = \beta = 90°$, а у другој акко је $a = b$ и $c = d$. Дакле, једнакост важи акко је дати четвороугао квадрат.

48. Нека су A', B' и C' пресеци симетрала углова троугла ABC са страницама BC, CA и AB тог троугла. Ако је свака од дужи AA', BB' и CC' мања од 1, онда је и површина троугла мања од: а) 1; б) $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

49. Квадрат је подељен на коначно много правоугаоника које се међусобно не преклапају. Доказати да је сума површина кругова описаних око тих правоугаоника већа од површине круга описаног око квадрата.

50. У унутрашњој области датог квадрата странице 1 уписан је конвексан многоугао који има n страница. Доказати да постоје темена A, B и C многоугла, таква да површина троугла ABC не прелази $\frac{8}{n^2}$.

51. а) Ако је P површина, а O обим конвексног многоугла, онда постоји круг полупречника $\frac{P}{O}$ који се налази у унутрашњој области многоугла. Доказати.

б) У унутрашњости конвексног многоугла M_1 чија је површина P_1 и обим O_1, уписан је многоугао M_2 чија је површина P_2 и обим O_2. Доказати да је $\frac{2P_1}{O_1} > \frac{P_2}{O_2}$.

Решење: а) Нека су странице датог конвексног многоугла редом a_1, a_2 ... a_n. Ако над сваком од страница многоугла конструишемо правоугаоник чија је друга страница једнака r, онда је $a_1 \cdot r + a_2 \cdot r + \ldots + a_n \cdot r < P$, па је $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \cdot r = O \cdot r < P$, па постоји бар једна тачка S у многоуглу таква да се круг чији је центар S и полупречник $\frac{P}{O}$ налази у унутрашњој области датог многоугла.

б) Нека су странице конвексног многоугла M_1 редом a_1, a_2 ... a_n и нека је S центар круга који се налази у унутрашњој области многоугла M_2. Тада је површина многоугла M_1 једнака $\frac{a_1 \cdot h_1}{2} + \frac{a_2 \cdot h_2}{2} + \ldots + \frac{a_n \cdot h_n}{2}$ где су $h_1, h_2 \ldots h_n$ редом нормална одстојања тачке S од страница многоугла M_1. Како је

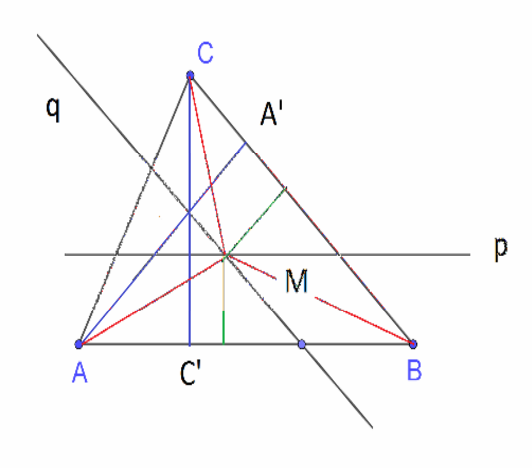
$$P_1=\frac{a_1\cdot h_1}{2}+\frac{a_2\cdot h_2}{2}+\ldots+\frac{a_n\cdot h_n}{2}>\frac{a_1\cdot r}{2}+\frac{a_2\cdot r}{2}+\ldots+\frac{a_n\cdot r}{2}=\frac{O_1\cdot r}{2}=\frac{O_1}{2}\cdot\frac{P_2}{O_2}.$$

Следи да је $\frac{2P_1}{O_1}>\frac{P_2}{O_2}$.

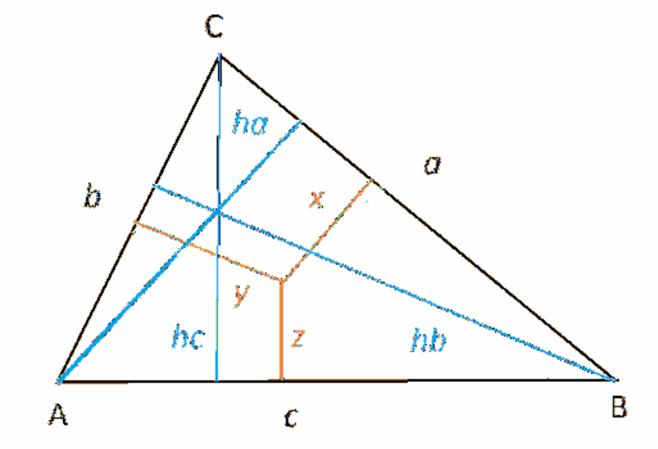
Е) КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЦИ ВЕЗАНИ ЗА ПОВРШИНЕ

52. У унутрашњој области троугла *ABC* одредити тачку *M*, такву да су површине троуглова *AMB, BMC* и *CMA* међусобно једнаке.*

Решење: Како су површине троуглова *AMB, BMC* и *CMA* међусобно једнаке то је свака једнака трећини површине троугла *ABC*. Геометријско место тачака *M* таквих да је површина *AMB* једнака трећини површине троугла је права *p* паралелна са *AB* чије је растојање од *AB* једнако трећини висине *CC'*. Слично је и за остала два троугла, тј. тачка *M* се налази и на правој *q* чије је растојање од праве *BC* једнако једној трећини висине AA'. Пресек правих *p* и *q* одређује тачку *M* која је у ствари тежиште троугла *ABC*.



53. Одредити тачку у унутрашњости троугла, тако да производ растојања од те тачке до страница троугла буде највећи.



Нека су *x, y, z* растојања тачке M од страница троугла $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, редом.

Тада је $P = P_{\Delta ABC} = P_{\Delta MBC}+P_{\Delta MCA}+P_{\Delta MAB} = \frac{ax}{2}+\frac{by}{2}+\frac{cz}{2}=P$.

Како је $ax + by + cz = 2P$ из неједнакости аритметичке и геометријске средине следи да је:

$$\frac{2P}{3}=\frac{ax+by+cz}{3}\geq\sqrt[3]{axbycz}, \text{ тј. } \left(\frac{2P}{3}\right)^3\geq axbycz, \text{ па је } abcxyz\leq\left(\frac{2P}{3}\right)^3.$$

Како је за тачно одређени троугао десна страна неједнакости $\left(\frac{2P}{3}\right)^3$ константна то лева страна неједнакости своју највећу вредност добија када је $ax = by = cz = \frac{2P}{3}$.

Дакле тражена тачка M је она тачка за коју је $x=\frac{2P}{3a}=\frac{h_a}{3}$, $y=\frac{2P}{3b}=\frac{h_b}{3}$, $z=\frac{2P}{3c}=\frac{h_c}{3}$, то је очигледно када је тачка M тежиште троугла.

54. Конструисати троугао чија је једна висина 2, дуга висина 3, а трећа висина једнака збиру датих висина.*

55. Конструисати троугао чија је површина једнака површини датог конвексног четвороугла.*

56. Конструисати правоугаоник чија је површина једнака површини датог троугла.

57. Дат је правоугаоник чије су странице a и b. Конструиши квадрат чија је површина једнака површини правоугаоника.*

58. Дат је једнакостранични троугао странице a. Конструисати квадрат чија је површина једнака површини датог једнакостраничног троугла.

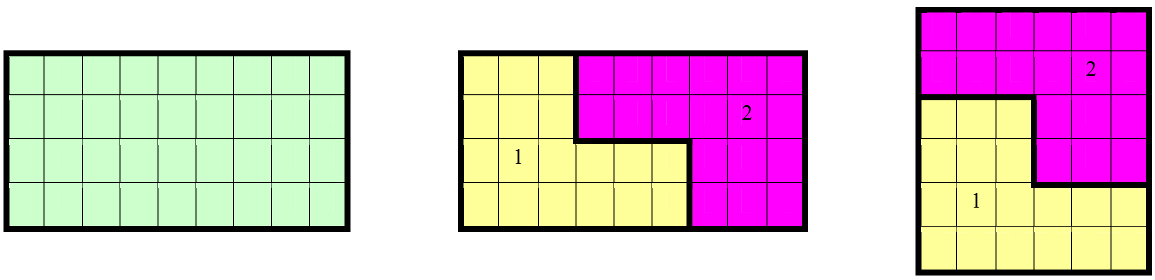
59. Конструисати правилни шестоугао чија је површина једнака збиру површина датог конвексног петоугла и датог конвексног седмоугла. *

    Претходни проблем је пример конструктивног „сабирања“ површина и представља веома лепу илустрацију и асоцијацију на тему „Како ћу решити математички задатак?“ јер показује како свестрана анализа једног проблема и синтеза низа претходно стечених знања обезбеђују поступни, а сигуран ход ка решењу.

60. Од свих троуглова чији је обим 30 конструиши онај који има највећу површину. *

61. Да ли је могуће правоугаоник чије су странице 9 и 4, разрезати само на два дела од којих је могуће саставити квадрат?

Решење:

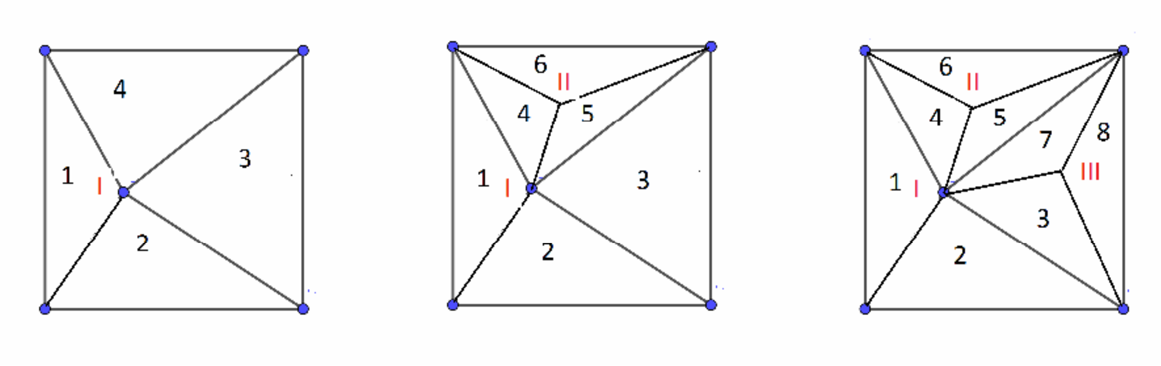


F) ЛОГИЧКО-КОМБИНАТОРНИ ЗАДАЦИ ВЕЗАНИ ЗА ПОВРШИНЕ

62. Доказати да се у сваки конвексни многоугао површине један може уписати троугао чија површина није мања од 1/4.*

63. У квадрату странице 1 уочено је n тачака. Доказати да је површина једног од троуглова чија су темена уочене тачке или темена квадрата мања или једнака $\frac{1}{2(n+1)}$. *

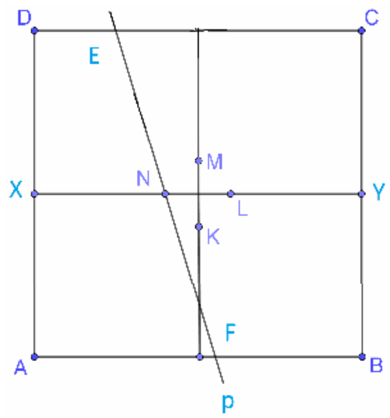
Решење: Са наредне слике је јасно да једна тачка унутар квадрата „производи“ 4 троугла. Ако додамо другу тачку, онда „уништимо“ један, а добијемо 3 нова троугла, па се број троуглова у суштини повећа за $3 - 1 = 2$ и имамо укупно $4 + 3 - 1 = 6$ троуглова. Ако процес наставимо за 3 тачке ћемо имати $6 + 3 - 1 = 8$ троуглова ... а за n тачака ћемо имати $2(n + 1)$ троуглова.



Ако би површина сваког од $2(n+1)$ троуглова била већа од $\frac{1}{2(n+1)}$ онда би укупна површина свих троуглова била већа од $2(n+1)\cdot\frac{1}{2(n+1)} = 1$, што је немогуће, јер је површина квадрата једнака 1.

64. Дато је 2019 правих од којих свака дели дати квадрат на два четвороугла чије се површине односе као 2 : 3. Доказати да бар 505 датих правих пролази кроз једну тачку.*

Решење: Нека права p дели дати квадрат $ABCD$ на два четвороугла чије се површине односе као 2 : 3. Како су оба четвороугла трапези чије су средње линије XN и YN, њихове површине P_1 и P_2 су редом једнаке: $P_1 = AD \cdot XN$ и $P_2 = AD \cdot YN$. Како је $P_1 : P_2 = 2 : 3$, то је и $XN : YN = 2 : 3$, па тачака N дели средњу линију квадрата XY у односу 2 : 3.



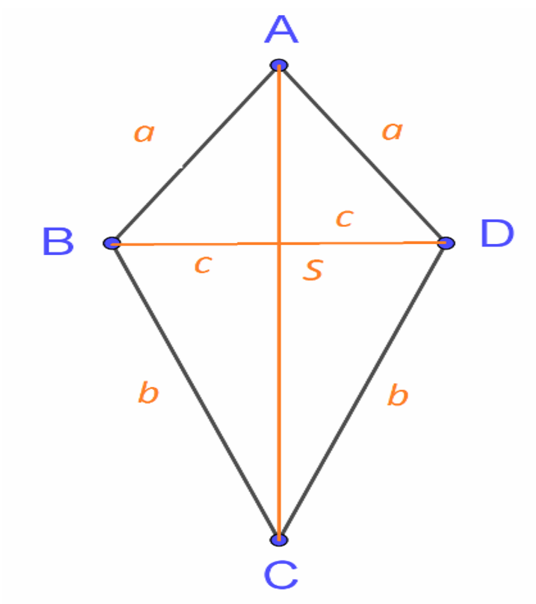
Међутим тачака које имају особину као тачка N има још три K, L, M, јер свака од њих средњу линију квадрата дели у односу 2 : 3. То значи да свака од 2019 правих „пролази“ кроз једну од четири тачке K, L, M, N. Користећи Дирихлеов принцип доказујемо бар $504 + 1 = 505$ правих пролази кроз једну од уочених тачака.

65. У равни је дато 100 тачака, таквих да међу свим дужинама, чије су оне крајеви, најдужа има дужину 1. Доказати да је дужина d, најкраће међу овим дужинама, мања од $\frac{2}{9}$.

66. У јединичном квадрату дато је 2019 тачака, од којих је једна центар квадрата. За сваку тачку је узето растојање до до најближе од осталих 2018 тачака. Доказати да је збир квадрата оваквих растојања мањи од 3,6.

G) АЛГЕБАРСКИ ПРОБЛЕМИ КОЈИ СЕ РЕШАВАЈУ КОРИШЋЕЊЕМ ПОВРШИНА

67. Ако су *a, b, c* позитивни реални бројеви такви да је $a > c$ и $b > c$, онда важи неједнакост $\sqrt{a^2-c^2} + \sqrt{b^2-c^2} \le \frac{ab}{c}$. Доказати.*



Решење: Уочимо делтоид *ABCD* чије су странице $AB = AD = a$ и $BC = DC = b$, а дијагонала $BD = BS + SD = 2c$.

Како је $AS = \sqrt{a^2-c^2}$ и $CS = \sqrt{b^2-c^2}$ то је површина делтоида једнака полупроизводу дијагонала, тј. $P = \frac{2c\left(\sqrt{a^2-c^2} + \sqrt{b^2-c^2}\right)}{2}$.

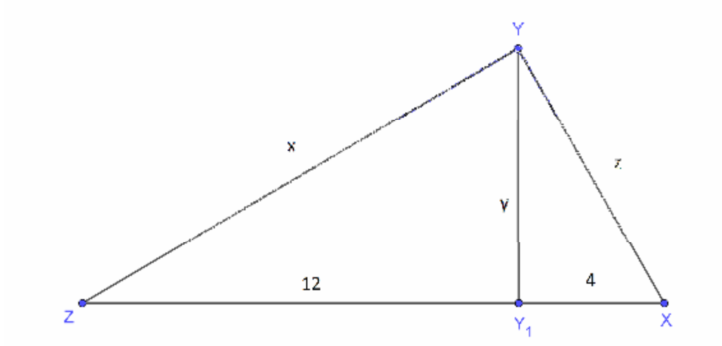
С друге стране површина делтоида је и $P = 2\,\frac{ab\cdot\sin\varphi}{2}$. Тада је

$2P = c\left(\sqrt{a^2-c^2} + \sqrt{a^2-c^2}\right) = ab\sin\varphi \le ab$,

па је $\sqrt{a^2-c^2} + \sqrt{b^2-c^2} \le \frac{ab}{c}$.

68. Решити систем једначина $\begin{cases} x^2 - y^2 = 144 \\ z^2 - y^2 = 16 \\ xz = 16y \end{cases}$ где су *x, y* и *z* позитивни реални бројеви.

Решење: Нека су *x* и *z* дужине страница, а *y* висина из темена *Y* троугла *XYZ* и нека је $ZX = 12 + 4 = 16$ трећа страница уоченог троугла.



Тада је из Питагорине теореме $x^2 - y^2 = 144$ и $z^2 - y^2 = 16$. Површина уоченог троугла је $P = \frac{16\cdot y}{2} = \frac{xz\cdot\sin\varphi}{2}$. Из услова задатка је $xz = 16y$, па је $xz = xz\cdot\sin\varphi$. Дакле $\sin\varphi = 1$, па је угао φ прав, тј. уочени троугао је правоугли. На основу Питагорине теореме за уочени правоугли троугао је $x^2 + z^2 = 16^2 = 256$, а из услова задатка је $x^2 - z^2 = 144 - 16 = 128$.
Решавањем добијеног система једначина добија се $x = 8\sqrt{3}$, $y = 4\sqrt{3}$, $z = 8$.

69. Нека су *a, b, c, x, y, z* позитивни реални бројеви такви да је $a + x = b + y = c + z = 1$. Доказати да је $ay + bz + cx < 1$. Може ли се дата неједнакост уопштити?*

ЛИТЕРАТУРА

[1] Виктор Васиљевич Прасолов: Задачи по планиметрии (први део)
„Наука“, Москва, 1986.

[2] Виктор Васиљевич Прасолов: Задачи по планиметрии (други део)
„Наука“, Москва, 1986.

[3] Владимир Стојановић: Математископ 3
„Математископ“, Београд, 1995.

[4] Милан Шарић: Математика помаже математици
„Архимедес“, Београд, 1996.

[5] Војислав Андрић: Математика X = 1236
„Круг“, Београд, 2006.

[6] Ђорђе Дугошија, Живорад Ивановић: Тригонометрија
„Круг“, Београд, 2006.

[7] Владимир Балтић, Душан Ђукић, Ђорђе Кртинић, Иван Матић: Припремни задаци за математичка такмичења средњошколаца у Србији, ДМС, Београд, 2011.

[8] Ђорђе Баралић: 300 припремних задатака за јуниорске математичке олимпијаде
„Клет“, Београд, 2014.

[9] Школа за љубитеље математике „Интеграл“ (материјали за младе математичаре)
„Интеграл“, Ваљево 1986 – 2019.