Matematičko takmičenje „Kengur bez granica” finale 2018.
11 – 12. razred

Zadaci koji vrede 3 poena

1. $(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \cdots + (-1)^{2018} =$

A) -1 **B)** 0 **V)** 1008 **G)** 1009 **D)** 2018

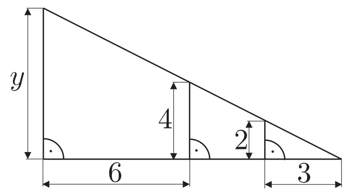
2. Koji od sledećih brojeva može biti jednak broju ivica zarubljene piramide?

A) 2017 **B)** 2018 **V)** 2019 **G)** 2020 **D)** 2021

3. Ako za kvadratni polinom $P(x) = ax^2 + bx + c$ za svako x važi jednakost $P(x) = P(1-x)$, tada je vrednost izraza $a + b$ jednaka:

A) 0 **B)** 1 **V)** -1 **G)** 2 **D)** nije moguće odrediti

4. Odredi dužinu y na slici desno.

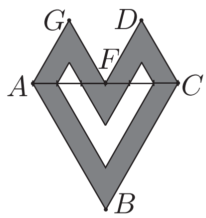


A) 6 **B)** 8 **V)** 9 **G)** 10 **D)** 12

5. Koliko različitih realnih vrednosti x zadovoljava jednakost $2018^x - 2017^x = 1$?

A) 1 **B)** 2 **V)** 3 **G)** 4 **D)** više od 4

6. Duž je podeljena na 6 jednakih delova (vidi sliku desno). Svi trouglovi na slici su jednakostranični. Ako je površina figure $ABCDFG$ na slici jednaka P, a površina bele figure unutar nje jednaka Q, onda je $\dfrac{Q}{P}$ jednako:



A) $\dfrac{1}{3}$ **B)** $\dfrac{2}{9}$ **V)** $\dfrac{5}{21}$ **G)** $\dfrac{6}{25}$ **D)** $\dfrac{7}{27}$

7. Koliko uređenih parova (x, y) celih brojeva x i y zadovoljava jednakost $x^2 + 7y = xy$?

A) 2 **B)** 3 **V)** 4 **G)** 6 **D)** 8

8. Koliko sabiraka treba da ima izraz $2 + (-4) + 6 + (-8) + \cdots$ tako da zbir bude 2018?

A) 1009 **B)** 1008 **V)** 2019 **G)** 2018 **D)** 2017

9. Ako su tačke $A(1, 2)$, $B(5, t)$ i $C(t, 7)$ kolinearne i nalaze se u prvom kvadrantu, $t \in \mathbb{R}$, tada vrednost t pripada intervalu:

A) $(-4, -2)$ **B)** $(-2, -0)$ **V)** $(0, 2)$ **G)** $(2, 4)$ **D)** $(4, 8)$

10. Celi brojevi a i b zadovoljavaju nejednakosti $|a| < 4$ i $3 < |b| \leqslant 7$. Maksimalna vrednost izraza $-2a - 3b$ je:

A) -3 **B)** -1 **V)** 27 **G)** 28 **D)** 29

Zadaci koji vrede 4 poena

11. Ako je $A = \big(\sin(\sin 1) - \sin 1\big)\big(\cos(\cos 1) - \cos 1\big)$, tada je:

A) $A < 0$ **B)** $A = 0$ **V)** $A \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ **G)** $A \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ **D)** $A > 1$

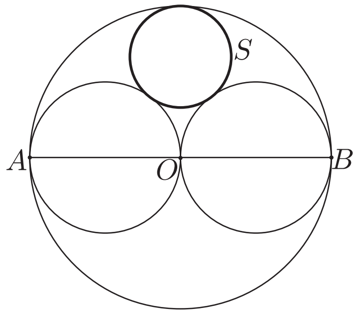
12. Ako polinom $P(x)$ podelimo sa $x-18$, ostatak je 20, a ako polinom $P(x)$ podelimo sa $x-20$, ostatak je 18. Koliki je ostatak pri deljenju polinoma $P(x)$ sa $(x-20)(x-18)$?

A) 2018 **B)** $-x-2$ **V)** $x+2$ **G)** $-x+38$ **D)** $x+38$

13. Ako su a i b prirodni brojevi takvi da je $2^a - 2^b = 992$, tada je $a+b$ jednako:

A) 12 **B)** 16 **V)** 30 **G)** 32 **D)** nijedan od odgovora **A)** – **G)**

14. Neka je AB duž dužine 20 sa središtem u tački O. Krug S sa spoljašnje strane dodiruje krugove sa prečnicima AO i BO, a sa unutrašnje strane dodiruje krug prečnika AB. Dužina poluprečnika kruga S je:



A) $\frac{5}{2}$ **B)** $\frac{10}{3}$ **V)** 5 **G)** $\sqrt{5}$ **D)** $2\sqrt{5}$

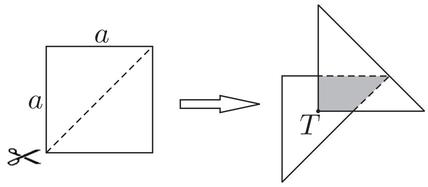
15. U jednom redu stoji 25 belih, 14 sivih i 10 crnih kengura. Bilo koja dva susedna kengura su različite boje. Koji od sledećih zaključaka je sigurno tačan?

A) Takav red ne postoji.
B) Prvi i poslednji kengur su beo i siv.
V) Neki sivi kenguri imaju bar jednog crnog suseda.
G) Postoje 3 bela kengura takva da su oba njihova suseda sivi.
D) Postoje 4 bela kengura takva da su oba njihova suseda sivi.

16. Maksimalan broj prirodnih brojeva većih od 1 čiji je zbir 99, takvih da su svaka dva uzajamno prosta je:

A) 5 **B)** 6 **V)** 7 **G)** 8 **D)** 9

17. Jovan je presekao karton oblika kvadrata dimenzije $a \times a$ duž dijagonale i dobio dva podudarna pravougla trougla. Zatim je preklopio trouglove tako da im katete budu paralelne i da se teme pravog ugla jednog trougla poklapa sa težištem T drugog trougla, kao što je prikazano na slici ispod. Kolika je površina sivog dela na slici?



A) Ne može se odrediti. **B)** $\frac{a^2}{3}$ **V)** $\frac{a^2+1}{3}$ **G)** $\frac{a^2}{6}$ **D)** $\frac{a^2+1}{6}$

18. Članovi niza (a_n) su pozitivni brojevi takvi da je $a_n^2 = (n-3)a_{n+1} + 2n + 3$ za sve $n \geqslant 1$. Odredi a_1.

A) 4 **B)** 3 **V)** 2 **G)** 1 **D)** Ne može se odrediti.

19. Razlika između broja Adamovih i broja Bojanovih godina je 1. Brojevi Bojanovih i Dejanovih godina se razlikuju za 2. Brojevi Dejanovih i Savinih godina razlikuju se za 3. Brojevi Savinih i Mirkovih godina razlikuju se za 4. Brojevi Mirkovih i Adamovih godina razlikuju se za 5. Ko je od ovih dečaka najstariji?

A) Adam **B)** Bojan
V) Dejan **G)** Mirko **D)** Takva situacija je nemoguća.

20. Miloš je zaboravio svoj četvorocifreni kod za otključavanje telefona. Zna samo da u kodu ne učestvuje cifra 0. On je ukucao 5 slučajno odabranih četvorocifrenih kodova i dobio je sledeće informacije: kod 1973 ima jednu tačnu cifru na tačnom mestu i jednu tačnu cifru na pogrešnom mestu; kod 8274 nema tačnih cifara; kod 9582 ima jednu tačnu cifru na pogrešnom mestu; kod 7642 ima jednu tačnu cifru na pogrešnom mestu; kod 1928 ima jednu tačnu cifru na tačnom mestu. Ako Miloš podeli kod brojem 9, ostatak je:

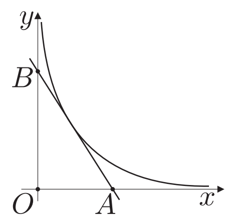
A) 1 **B)** 2 **V)** 4 **G)** 6 **D)** 0

Zadaci koji vrede 5 poena

21. Broj 2018 je zapisan kao zbir tri trocifrena broja, takvih da su svih 9 cifara različite. Koja cifra nije upotrebljena?

A) 6 **B)** 0 **V)** 2 **G)** 9 **D)** 7

22. Tangenta na grafik funkcije $y = \frac{2}{x}$, $x > 0$, seče koordinatne ose u tačkama A i B (vidi sliku desno). Kolika je površina trougla OAB?

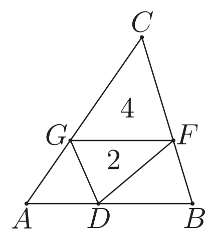


A) 2 **B)** 3
V) 4 **G)** 8 **D)** nije jedinstveno određena

23. Ako je $x > y$, $v + w = x + y$ i $x + w < y + v$, tada je

A) $y < x < w < v$ **B)** $w < v < y < x$ **V)** $v < w < y < x$
G) $w < y < x < v$ **D)** $v < y < x < w$

24. Tačke D, F i G su izabrane redom na stranicama AB, BC i CA trougla ABC, tako da je $FG \parallel AB$. Površine trouglova GFC i GFD su 4 i 2, respektivno. Površina trougla ABC je:

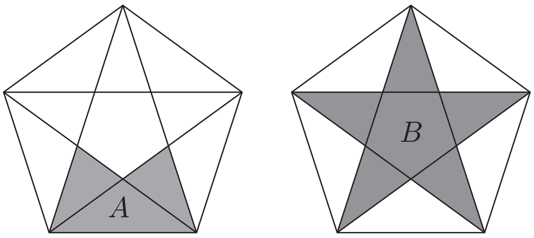


A) 16 **B)** 12
V) 9 **G)** 8 **D)** ne može se odrediti

25. Ako je 2022-ocifreni broj $a\underbrace{22\ldots22}_{2018}111$ deljiv brojem 13, tada je cifra a jednaka

A) 1 **B)** 3 **V)** 5 **G)** 7 **D)** 8

26. U pravilnom petouglu nacrtane su sve dijagonale kao što je prikazano na slici ispod. Ako je površina sivog dela označenog sa A jednaka S, tada je površina sivog dela označenog sa B jednaka:



A) $2S$ **B)** $\frac{3}{2}S$ **V)** $\sqrt{5}S$ **G)** $\frac{2+\sqrt{5}}{2}S$ **D)** $3S$

27. Za okruglim stolom sedi 15 osoba, svaka od njih ili uvek laže ili uvek govori istinu i bar jedna osoba za stolom uvek govori istinu. Svaka osoba kaže: „Jedan od mojih prvih suseda govori istinu, a jedan od mojih prvih suseda laže." Nakon toga, za sto seda 16. osoba tako da sve što je 15 osoba pre reklo i dalje važi. Ta 16. osoba takođe ili uvek govori istinu ili uvek laže. Šta će reći ta osoba?

A) „Oba moja prva suseda govore istinu."
B) „Tačno jedan od mojih prvih suseda govori istinu."
V) „Oba moja prva suseda lažu."
G) Zavisi od toga gde je ta osoba sela.
D) Zavisi od toga da li ta osoba laže.

28. Oko pravilnog n-tougla stranice dužine a opisan je i u njemu je upisan krug. Ako je P površina kružnog prstena određenog sa ova dva kruga, tada važi:

A) $P = \frac{a^2\pi}{2}$ **B)** $P = \frac{a^2\pi}{4}$ **V)** $P = \frac{a^2\pi}{4\sin^2\frac{\pi}{n}}$
G) $P = \frac{a^2\pi\sin^2\frac{\pi}{n}}{2}$ **D)** $P = \frac{a^2\pi}{4\cos^2\frac{\pi}{n}}$

29. Koliko najviše zajedničkih prirodnih delilaca mogu imati dva različita dvocifrena prirodna broja?

A) 12 **B)** 11 **V)** 10 **G)** 9 **D)** 8

30. U kutiji je 7 belih, 5 zelenih i 4 plave kuglice. Kolika je verovatnoća da izvučemo 2 kuglice iste boje ako se iz kutije izvlače ukupno 3 kuglice?

A) 40% **B)** 45% **V)** 55% **G)** 65% **D)** 75%