

Математичко такмичење „Кенгур без граница” финале 2018.
11 – 12. разред

Задачи који вреде 3 поена

1. $(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^{2018} =$

- А) -1 Б) 0 В) 1008 Г) 1009 Д) 2018

2. Који од следећих бројева може бити једнак броју ивица зарубљене пирамиде?

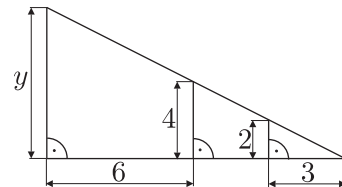
- А) 2017 Б) 2018 В) 2019 Г) 2020 Д) 2021

3. Ако за квадратни полином $P(x) = ax^2 + bx + c$ за свако x важи једнакост $P(x) = P(1 - x)$, тада је вредност израза $a + b$ једнака:

- А) 0 Б) 1 В) -1 Г) 2 Д) није могуће одредити

4. Одреди дужину y на слици десно.

- А) 6 Б) 8 В) 9 Г) 10 Д) 12

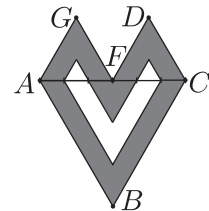


5. Колико различитих реалних вредности x задовољава једнакост $2018^x - 2017^x = 1$?

- А) 1 Б) 2 В) 3 Г) 4 Д) више од 4

6. Дуж је подељена на 6 једнаких делова (види слику десно). Сви троуглови на слици су једнакостранични. Ако је површина фигуре $ABCD$ на слици једнака P , а површина беле фигуре унутар ње једнака Q , онда је $\frac{Q}{P}$ једнако:

- А) $\frac{1}{3}$ Б) $\frac{2}{9}$ В) $\frac{5}{21}$ Г) $\frac{6}{25}$ Д) $\frac{7}{27}$



7. Колико уређених парова (x, y) целих бројева x и y задовољава једнакост $x^2 + 7y = xy$?

- А) 2 Б) 3 В) 4 Г) 6 Д) 8

8. Колико сабирака треба да има израз $2 + (-4) + 6 + (-8) + \dots$ тако да збир буде 2018 ?

- А) 1009 Б) 1008 В) 2019 Г) 2018 Д) 2017

9. Ако су тачке $A(1, 2)$, $B(5, t)$ и $C(t, 7)$ колинеарне и налазе се у првом квадранту, $t \in \mathbb{R}$, тада вредност t припада интервалу:

- А) $(-4, -2)$ Б) $(-2, -0)$ В) $(0, 2)$ Г) $(2, 4)$ Д) $(4, 8)$

10. Цели бројеви a и b задовољавају неједнакости $|a| < 4$ и $3 < |b| \leq 7$. Максимална вредност израза $-2a - 3b$ је:

- А) -3 Б) -1 В) 27 Г) 28 Д) 29

Задачи који вреде 4 поена

11. Ако је $A = (\sin(\sin 1) - \sin 1)(\cos(\cos 1) - \cos 1)$, тада је:

- А) $A < 0$ Б) $A = 0$ В) $A \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ Г) $A \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ Д) $A > 1$

12. Ако полином $P(x)$ поделимо са $x - 18$, остатак је 20, а ако полином $P(x)$ поделимо са $x - 20$, остатак је 18. Колики је остатак при дељењу полинома $P(x)$ са $(x - 20)(x - 18)$?

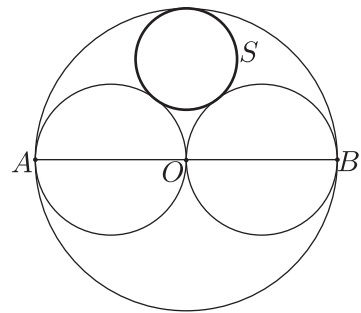
- А) 2018 Б) $-x - 2$ В) $x + 2$ Г) $-x + 38$ Д) $x + 38$

13. Ако су a и b природни бројеви такви да је $2^a - 2^b = 992$, тада је $a + b$ једнако:

- А) 12 Б) 16 В) 30 Г) 32 Д) ниједан од одговора А) – Г)

14. Нека је AB дуж дужине 20 са средиштем у тачки O . Круг S са спољашње стране додирује кругове са пречницима AO и BO , а са унутрашње стране додирује круг пречника AB . Дужина полупречника круга S је:

- А) $\frac{5}{2}$ Б) $\frac{10}{3}$ В) 5 Г) $\sqrt{5}$ Д) $2\sqrt{5}$



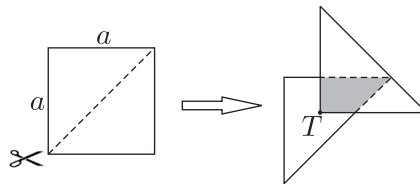
15. У једном реду стоји 25 белих, 14 сивих и 10 црних кенгура. Било која два суседна кенгура су различите боје. Који од следећих закључака је сигурно тачан?

- А) Такав ред не постоји.
 Б) Први и последњи кенгур су бео и сив.
 В) Неки сиви кенгури имају бар једног црног суседа.
 Г) Постоје 3 бела кенгура таква да су оба њихова суседа сиви.
 Д) Постоје 4 бела кенгура таква да су оба њихова суседа сиви.

16. Максималан број природних бројева већих од 1 чији је збир 99, таквих да су свака два узајамно проста је:

- А) 5 Б) 6 В) 7 Г) 8 Д) 9

17. Јован је пресекао картон облика квадрата димензије $a \times a$ дуж дијагонале и добио два подударна правоугла троугла. Затим је преклопио троуглове тако да им катете буду паралелне и да се теме правог угла једног троугла поклапа са тежиштем T другог троугла, као што је приказано на слици испод. Колика је површина сивог дела на слици?



- А) Не може се одредити. Б) $\frac{a^2}{3}$ В) $\frac{a^2 + 1}{3}$ Г) $\frac{a^2}{6}$ Д) $\frac{a^2 + 1}{6}$

18. Чланови низа (a_n) су позитивни бројеви такви да је $a_n^2 = (n - 3)a_{n+1} + 2n + 3$ за све $n \geq 1$.
Одреди a_1 .

- А) 4 Б) 3 В) 2 Г) 1 Д) Не може се одредити.

19. Разлика између броја Адамових и броја Бојанових година је 1. Бројеви Бојанових и Дејанових година се разликују за 2. Бројеви Дејанових и Савиних година разликују се за 3. Бројеви Савиних и Миркових година разликују се за 4. Бројеви Миркових и Адамових година разликују се за 5. Ко је од ових дечака најстарији?

- А) Адам Б) Бојан В) Дејан Г) Мирко Д) Таква ситуација је немогућа.

20. Милош је заборавио свој четвороцифрени код за откључавање телефона. Зна само да у коду не учествује цифра 0. Он је укуцао 5 случајно одабраних четвороцифрених кодова и добио је следеће информације: код 1973 има једну тачну цифру на тачном месту и једну тачну цифру на погрешном месту; код 8274 нема тачних цифара; код 9582 има једну тачну цифру на погрешном месту; код 7642 има једну тачну цифру на погрешном месту; код 1928 има једну тачну цифру на тачном месту. Ако Милош подели код бројем 9, остатак је:

- А) 1 Б) 2 В) 4 Г) 6 Д) 0

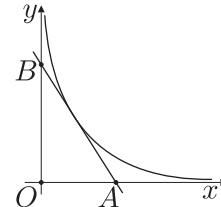
Задачи који вреде 5 поена

21. Број 2018 је записан као збир три троцифрена броја, таквих да су свих 9 цифара различите. Која цифра није употребљена?

- А) 6 Б) 0 В) 2 Г) 9 Д) 7

22. Тангента на график функције $y = \frac{2}{x}, x > 0$, сече координатне осе у тачкама A и B (види слику десно). Колика је површина троугла OAB ?

- А) 2 Б) 3
В) 4 Г) 8 Д) није јединствено одређена

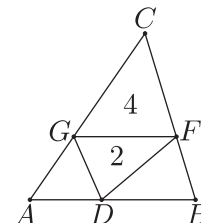


23. Ако је $x > y, v + w = x + y$ и $x + w < y + v$, тада је

- А) $y < x < w < v$ Б) $w < v < y < x$ В) $v < w < y < x$
Г) $w < y < x < v$ Д) $v < y < x < w$

24. Тачке D, F и G су изабране редом на страницама AB, BC и CA троугла ABC , тако да је $FG \parallel AB$. Површине троуглова GFC и GFD су 4 и 2, респективно. Површина троугла ABC је:

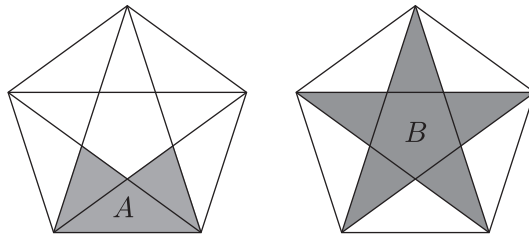
- А) 16 Б) 12 В) 9 Г) 8 Д) не може се одредити



25. Ако је 2022-оцифрени број $a \underbrace{22 \dots 22}_{2018} 111$ дељив бројем 13, тада је цифра a једнака

- А) 1 Б) 3 В) 5 Г) 7 Д) 8

26. У правилном петоуглу нацртане су све дијагонале као што је приказано на слици испод. Ако је површина сивог дела означеног са A једнака S , тада је површина сивог дела означеног са B једнака:



- А) $2S$ Б) $\frac{3}{2}S$ В) $\sqrt{5}S$ Г) $\frac{2+\sqrt{5}}{2}S$ Д) $3S$

27. За округлим столом седи 15 особа, свака од њих или увек лаже или увек говори истину и бар једна особа за столом увек говори истину. Свака особа каже: „Један од мојих првих суседа говори истину, а један од мојих првих суседа лаже.” Након тога, за сто седа 16. особа тако да све што је 15 особа пре рекло и даље важи. Та 16. особа такође или увек говори истину или увек лаже. Шта ће рећи та особа?

- А) „Оба моја прва суседа говоре истину.”
 Б) „Тачно један од мојих првих суседа говори истину.”
 В) „Оба моја прва суседа лажу.”
 Г) Зависи од тога где је та особа села.
 Д) Зависи од тога да ли та особа лаже.

28. Око правилног n -тоугла странице дужине a описан је и у њему је уписан круг. Ако је P површина кружног прстена одређеног са ова два круга, тада важи:

- А) $P = \frac{a^2\pi}{2}$ Б) $P = \frac{a^2\pi}{4}$ В) $P = \frac{a^2\pi}{4\sin^2\frac{\pi}{n}}$
 Г) $P = \frac{a^2\pi\sin^2\frac{\pi}{n}}{2}$ Д) $P = \frac{a^2\pi}{4\cos^2\frac{\pi}{n}}$

29. Колико највише заједничких природних делилаца могу имати два различита двоцифрена природна броја?

- А) 12 Б) 11 В) 10 Г) 9 Д) 8

30. У кутији је 7 белих, 5 зелених и 4 плаве куглице. Колика је вероватноћа да извучемо 2 куглице исте боје ако се из кутије извлаче укупно 3 куглице?

- А) 40% Б) 45% В) 55% Г) 65% Д) 75%