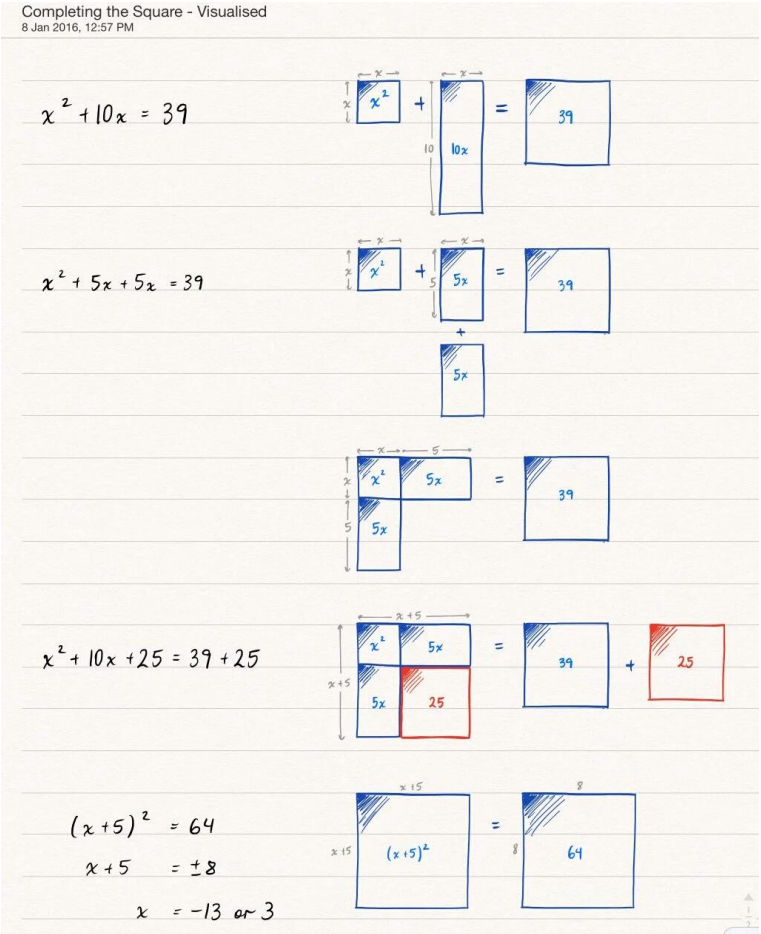
Квадратна функција – шта ће то мени?

Александра Равас
Јован Кнежевић
Нела Спасојевић



Републички семинар 2018.

о настави математике и рачунарства у основним и средњим школама

Београд, 10. фебруар 2018.

Кратка историја квадратних једначина

Зашто *квадратне* једначине?

Као што је познато, израз облика $ax^2 + bx + c$ који чине променљива x и неки реални бројеви a, b и c (при чему је $a \neq 0$) назива се квадратни трином. Решити квадратну једначину значи решити једначину која може бити записана у облику $ax^2 + bx + c = 0$.

Префикс *quad* долази од латинске речи *quattuor* и има значење „четири“, а квадратне једначине подразумевају да је непозната највише степена два, а не четири. Зашто су квадратне једначине повезане с бројем четири? Зар не би било очекивано да у имену имају асоцијацију на број два: дијадне? Дуомне? Биномне? Можда два-ратне?

Квадратне једначине су блиско повезане с проблемима који се тичу квадрата и четвороуглова. Штавише, реч квадратна изведена је из латинске речи *quadratus*, са значењем квадрат. Та веза се у српском језику очувала, пошто се правилан четвороугао назива квадратом, за разлику од, на пример, енглеског, где се за квадрат користи реч *square*.

Класификација једначина

Данашњи начин класификације једначина према највећем степену непознате савремено је достигнуће. Интересантно је да је ел Хорезми (око 800.) дао класификацију различитих типова квадратних једначина који су се појавили као последица чињенице да у својим разматрањима није користио нулу ни негативне бројеве. У својој *Алгебри* он посвећује квадратним једначинама шест поглавља, свако за нови тип. Једначине су описане речима, а формирају их три типа величина – квадрати (оно што бисмо данас означили са x^2), корени (данас бисмо их означили са x) и бројеви. У савременој нотацији, у питању су следећи типови:

квадрат једнак корену ($ax^2 = bx$)
квадрат једнак броју ($ax^2 = c$)
корен једнак броју ($bx = c$)
квадрат и корен једнаки броју ($ax^2 + bx = c$)
квадрат и број једнаки корену ($ax^2 + c = bx$)
корен и број једнаки квадрату ($bx + c = ax^2$)

Још један систематичан покушај класификације може се наћи у *Алгебри* Омара Хајама (око 1100.), међутим, и његова се знатно разликује од оне коју користимо данас. Хајам дели наше једначине првог, другог и трећег степена на просте и сложене. Просте једначине су облика:

$$r = x \qquad ax = x^2$$
$$r = x^2 \qquad ax = x^3$$
$$r = x^3 \qquad ax^2 = x^3$$

Сложене једначине најпре дели на триноме и квадриномне, и затим наводи њихове облике.

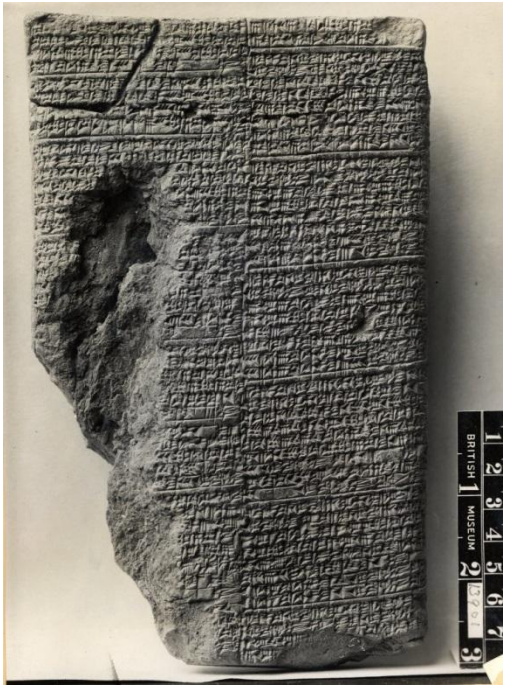
Класификација према степену, уз могућност да словни коефицијент буде позитиван или негативан број ушла је у употребу тек почетком XVII века, захваљујући утицају Симона Стевина, Франсоа Вијета,

Албера Жирара, Томаса Хариота, Вилијама Отреда и Ренеа Декарта. Посебно, Декарт је у својој *Геометрији* истакао идеју степена једначине, односно, како он каже, димензије једначине.

Квадратне једначине - почеци

Месопотамија

Често се може чути како су Вавилонци први у историји решавали квадратне једначине. Такве тврдње представљају поједностављивање чињенице да они нису познавали једначине у данашњем смислу, већ су поседовали развијен алгоритамски приступ решавању проблема, који би, у савременој терминологији могао да сведе полазни проблем на решавање квадратне једначине. Њихови задаци увек су имали позитивна решења, пошто су обично тражили одређивање неке дужине.



Наводимо два примера који потичу из времена Старог вавилонског царства, и датирају[1] се око 1700. године пре нове ере. Трећи пример припада времену владавине Селеукида, и датира се негде у прва три века пре нове ере.

1) (BM 13901[2], шести задатак) Сабрао сам површину и две трећине странице мог квадрата и резултат је 0;35. Узми 1, „коефицијент". Две трећине од 1, од коефицијента, је 0;40. Половину од тога, 0;20, помножи са 0;20 (и добијени резултат) 0;6,40 додај на 0;35, и (резултат) 0;41,40 има 0;50 за свој квадратни корен. 0;20, које си помножио самим собом, одузми од 0;50 и 0;30 је (страница) квадрата.

Овај пример најпре поставља квадратну једначину $x^2 + \frac{2}{3}x = 0;35$, а одмах затим даје и упутство како доћи до тражене странице квадрата. Како је за две трећине употребљена посебна ознака, први корак је да се тај број изрази у систему с основом шездесет, односно да се замени са 0;40. Уколико се даље упутство испрати корак по корак, добија се једнакост коју бисмо данас записали на следећи начин:

$$x = \sqrt{\left(\frac{0;40}{2}\right)^2 + 0;35} - \frac{0;40}{2} = 0;30.$$

✳ За вежбу, показати да се решење једначине облика $x^2 + px = q$, може записати у облику

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}.$$

2) (BM 13901, седми задатак) Додао сам седам страница мог квадрата на једанаест његових површина и добио 6;15. Узми 7 и 11. Помножи 11 са 6;15 и резултат је 1,8;45. Располови 7 (и добићеш

[1] Датирање се не може спровести на основу садржаја глинених таблица, већ се чини на основу стила којим су писане.
[2] Глинена таблица BM 13901 се данас чува у Британском музеју и садржи двадесет четири проблема.

3;30). Помножи 3;30 са 3;30. Додај (резултат) 12;15 на 1,8;45 и (нови резултат) 1,21 има 9 за свој квадратни корен. Одузми 3;30, које си помножио самим собом, од 9, добићеш 5;30. Реципрочна вредност броја 11 не може се поделити. Чиме треба да помножим 11 да би резултат био 5;30? Чинилац је 0;30. (Страница) квадрата је 0;30.

У овом примеру решена је једначина $11x^2 + 7x = 6;15$. Множење бројем 11 има за циљ добијање квадратне једначине по $11x$:

$$(11x)^2 + 7 \cdot (11x) = 6;15 \cdot 11 = 1{,}8;45,$$

при чему је коефицијент уз квадратни члан једнак јединици. Новодобијена једначина облика $t^2 + 7 \cdot t = 1{,}8;45$ се, затим, решава попут оне из претходног примера.

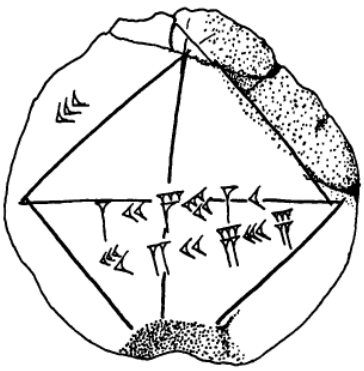
$$t = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 1{,}8;45} - \frac{7}{2} = 5;30,$$

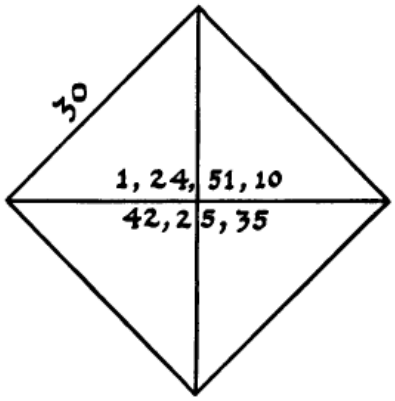
а како је $11x = t = 5;30$, биће $x = 0;30$. У решењу је наглашено да се ово последње дељење не може спровести на уобичајен начин, множењем с реципрочном вредношћу броја 11, пошто он нема коначни еквивалент у систему с основом шездесет.

Може се приметити да наведени задаци нису практичне природе. Сабирање површина и дужина указује на то да они не осликавају реалан геометријски проблем. Штавише, појам „квадрат“ у овом контексту нема ништа јачу геометријску конотацију од оне која се појављује у данашњој алгебри. Поред тога, јасно је да ови задаци не наводе општу формулу за решавање произвољне квадратне једначине, што је карактеристично за вавилонску математику. С друге стране, инструкције су толико прецизне да је општи поступак савршено јасан. Након што се уради велики број оваквих задатака, сигурно је да неће бити места дилеми како доћи до решења задатка сличног типа.

У вавилонским текстовима не постоји експлицитно објашњење како су употребљена правила откривена. Тек у грчкој математици појам доказа тврђења добиће главну улогу, коју има и данас.

3) Трећи пример преузет је с глинене таблице YBC[3] 7289 која припада вавилонској колекцији данас у власништву америчког Универзитета Јејл.





На таблици се налазе три броја:

[3] Yale Babylonian Collection

$$a = 30$$
$$b = 1{,}24{,}51{,}10$$
$$c = 42{,}25{,}35$$

Може се приметити да важи једнакост $c = a \cdot b$, уколико се тачка зарез постави на право место, пошто множење бројем 30 није ништа друго до дељење са 2 у систему с основом 60. Уколико претпоставимо да је са a задата страница квадрата, као што слика на таблици сугерише, а са c означена дијагонала квадрата, онда према Питагориној теореми, важи да је $c = a\sqrt{2}$, што значи да би b требало да буде апроксимација за $\sqrt{2}$, под условом да га читамо као 1;24,51,10. Ова претпоставка је тачна, пошто је

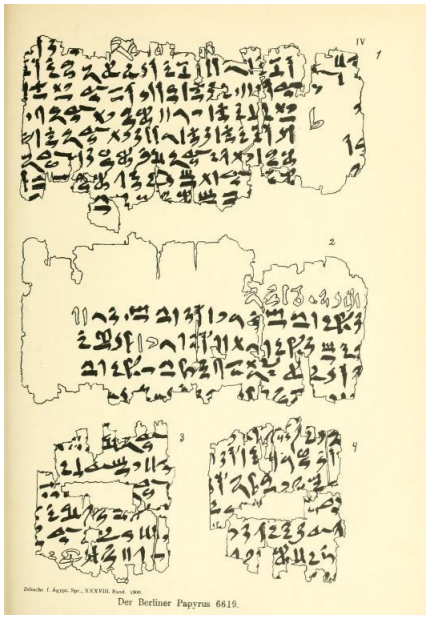
$$(1; 24{,}51{,}10)^2 = 1; 59{,}59{,}59{,}38{,}1{,}40$$

врло блиско броју 2.

Како се с ове таблице на којој се налазе три броја и једна геометријска фигура, може видети дужина дијагонале квадрата чија је страница 30, као и јако добра апроксимација за $\sqrt{2}$ сигурно је да су Вавилонци познавали макар посебан случај везе коју данас називамо Питагорином теоремом (Питагора је живео скоро 1200 година након што је ова таблица настала), као и да су баратали аритметичким техникама довољним да добију добру апроксимацију за $\sqrt{2}$.

Египат

Први трагови задатака који се своде на једначине с више непознатих величина појављују се на два египатска папируса из доба средњег краљевства (око 2055 – 1650. г. пре н. е).



Један од њих се данас чува у берлинском Новом музеју и познат је као Берлински папирус 6619, а дешифрован је почетком XX века. На њему се налази задатак који се може свести на следећи систем једначина:

$$x^2 + y^2 = 100$$

$$4x - 3y = 0,$$

а формулисан је на следећи начин:

Уколико ти кажем... да је површина квадрата 100 [квадратних кубита] једнака површини два мања квадрата. Страница једног је $\overline{2}\,\overline{4}$ странице другог. Кажи ми, колике су странице два мања квадрата.

Одмах затим следи и решење:

Увек почни с квадратом чија је страница дужине 1. Онда је дужина странице другог $\overline{2}\,\overline{4}$ (данас бисмо рекли $\frac{3}{4}$). Помножи то са $\overline{2}\,\overline{4}$. Добићеш $\overline{2}\,\overline{16}$ ($\frac{9}{16}$), површину мањег квадрата. Онда та два квадрата заједно имају површину $1\,\overline{2}\,\overline{16}$ ($\frac{25}{16}$). Извади квадратни корен из $1\,\overline{2}\,\overline{16}$. Резултат је $1\,\overline{4}$ ($\frac{5}{4}$). Извади квадратни корен из ових 100 кубита. Добићеш 10. Подели тих 10 са $1\,\overline{4}$. Добија се 8, страница једног квадрата.

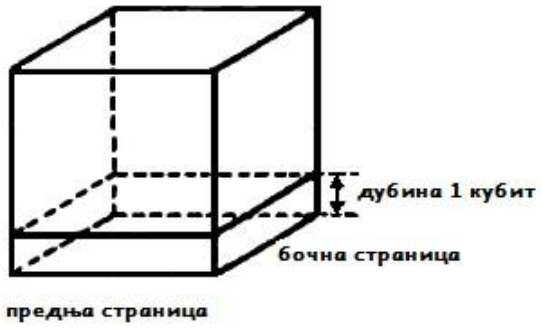
Остатак текста је значајно оштећен, али претпоставља се да је гласио овако:

Узми $\overline{2}\ \overline{4}$ од ових 8. Добија се 6, страница другог квадрата.

У решењу се не објашњава како се квадрира $\overline{2}\ \overline{4}$, нити како се вади квадратни корен из $1\ \overline{2}\ \overline{16}$ или 100. Под претпоставком да то није урађено напамет, врло је вероватно да је писар једноставно користио таблицу квадрата како би дошао до резултата. Такође, није разјашњено ни зашто је $\overline{2}\ \overline{4}$ од 8 једнако 6, што показује да је главни циљ излагања решења било приказивање употребе методе супротне претпоставке, а не рачунања с разломцима или квадрирања и кореновања.

Други задатак с истог папируса своди се на систем $x^2 + y^2 = 400,\ 4x - 3y = 0$ и решава се на аналоган начин.

Још један задатак који се своди на квадратне једначине, а који је покушао да реконструише Ричард Гилингс налази се у фрагментима колекције папируса познате под називом Кахун или Лахун, према локалитету на ком су нађени. Данас се чувају у музеју Флиндерса Питрија у Лондону.



Правоугаони амбар (Lahun LV.4 или Kahun LV.4; UC 32162) Бочна страница је $\overline{2}\ \overline{4}$ дужине предње странице. Амбар је напуњен житом до дубине од 1 кубита помоћу 40 корпи запремине по 90 хинуа[4]. Одредити стране амбара.

Да би се пронашле тражене величине, најпре се одређује количина жита као производ броја корпи и њихове наведене запремине, а затим се добијена величина пребацује у кубне кубите дељењем са 300 (300 хинуа = 1 кубни кубит). Тако се добија да је површина основе амбара 12. Како је у поставци дат међусобни однос предње и бочне странице, задатак се своди на следећи систем једначина:

$$xy = 12$$

$$x = \frac{3}{4}y$$

Упутство даље тражи да се број један подели са $\overline{2}\ \overline{4}$ (чиме се добија реципрочна вредност разломка $\frac{3}{4}$), и да се добијеним резултатом $1\ \overline{3}$ помножи број 12. Добиће се 16. Након што се одреди квадратни корен из 16, биће позната предња страница, која има дужину 4 кубита. Остаје да се бочна страница добије помоћу услова да је једнака са $\overline{2}\ \overline{4}$ предње странице, дакле дужине је 3 кубита.

Грчка

Грци су решавали задатке који се своде на квадратне једначине употребом геометријских метода. Еуклид (око 300. пре н. е.) у свом делу *Подаци* наводи 3 задатка који су еквивалентни следећим системима:

[4] хину=тегла; 10 хинуа = 1 хекат (буре)

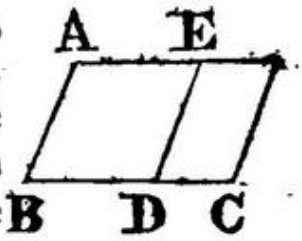
- $xy = k^2, \quad x - y = a$ (задатак 84)
- $xy = k^2, \quad x + y = a$ (задатак 85)
- $xy = k^2, x^2 - y^2 = a$ (задатак 86).

one given and exceeding by the parallelogram BC which is equal to the given ſpace.

PROP. LXXXV. 84.

IF two ſtraight lines contain a parallelogram given in magnitude, in a given angle; if the difference of the ſtraight lines be given, they ſhall each of them be given.

Let AB, BC contain the parallelogram AC given in magnitude, in the given angle ABC, and let the exceſs of BC above AB be given; each of the ſtraight lines AB, BC is given.



Let DC be the given exceſs of BC above BA, therefore the remainder BD is equal to BA. complete the parallelogram AD, and becauſe AB is equal to BD, the ratio of AB to BD is given. and the angle ABD is given, therefore the parallelogram AD is given in ſpecies. and becauſe the given parallelogram AC is applied to the given ſtraight line DC, exceeding by the parallelogram AD given in ſpecies, the ſides of the exceſs are given [a]; therefore BD is given. and DC is given, wherefore the whole BC is given. and AB is given, therefore AB, BC are each of them given.

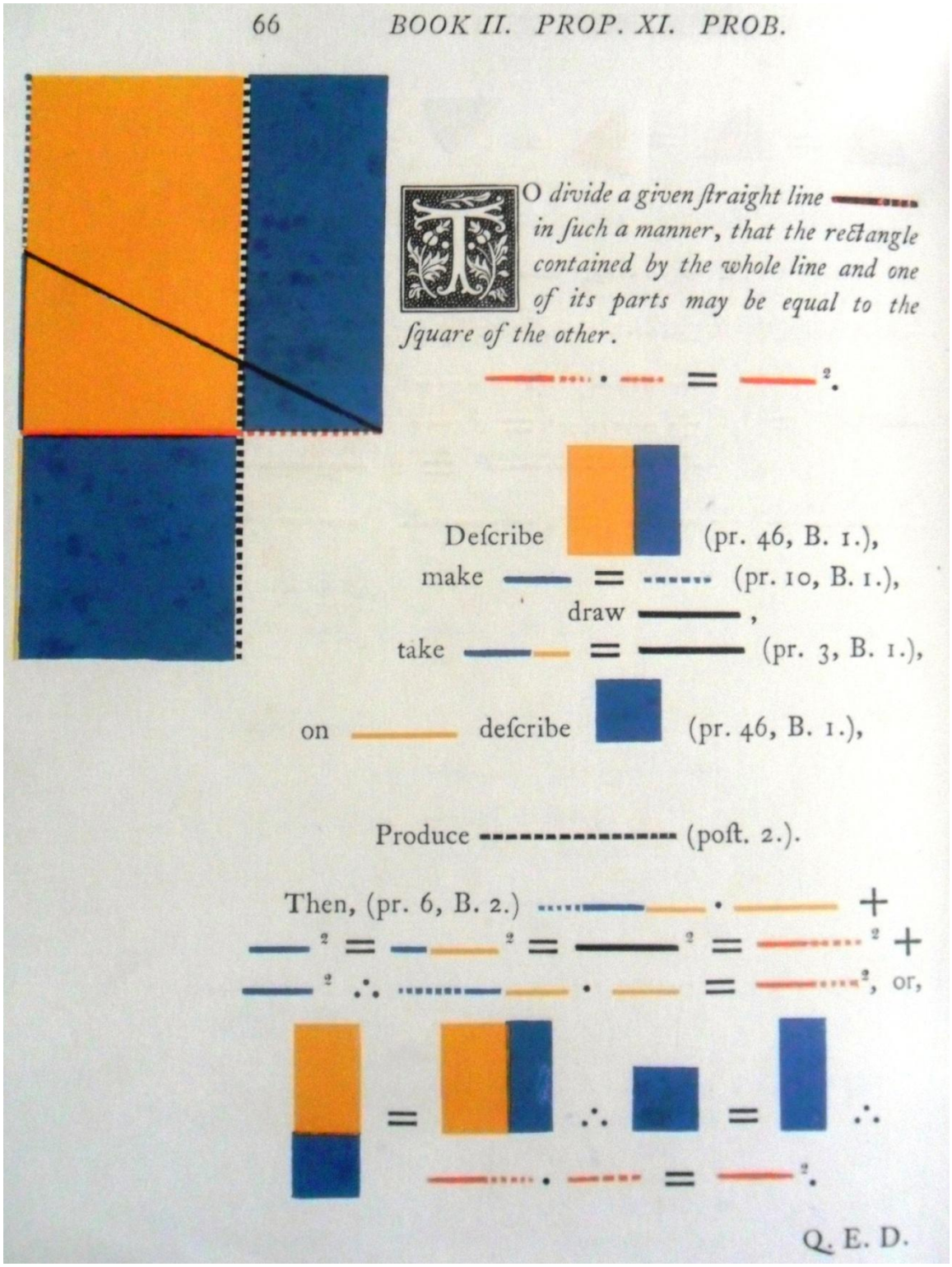
a. 84. Dat.

Поред тога, Еуклид је у *Елементима* решио геометријски еквивалент једначине $x^2 + ax = a$, па чак и $x^2 + ax = b^2$, у суштини коришћењем допуне до потпуног квадрата и изостављањем негативних решења:

> Дату дуж поделити тако да правоугаоник обухваћен целом дужи и једним одсечком буде једнак квадрату на другом одсечку (II књига, 11).

Слични задаци појављују се и у шестој књизи *Елемената*:

> На датој дужи конструисати такав паралелограм, једнак датој праволинијској слици, да паралелограм који му недостаје буде сличан датом паралелограму; при томе је неопходно да дата праволинијска слика (којој треба конструисати једнаки паралелограм) не буде већа од паралелограма конструисаног на половини и сличног паралелограму који му недостаје [од паралелограма на половини, а да му слични недостаје] (VI књига, 28).



66 BOOK II. PROP. XI. PROB.

TO *divide a given ſtraight line in ſuch a manner, that the rectangle contained by the whole line and one of its parts may be equal to the ſquare of the other.*

Deſcribe (pr. 46, B. 1.),

make (pr. 10, B. 1.),

draw ,

take (pr. 3, B. 1.),

on deſcribe (pr. 46, B. 1.),

Produce (poſt. 2.).

Then, (pr. 6, B. 2.) +

+

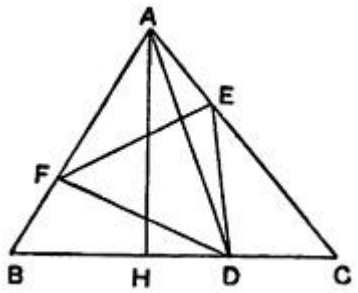
, or,

Q. E. D.

На датој дужи конструисати паралелограм са сувишком сличним датом паралелограму, а једнак датој праволинијској слици (VI књига, 29).

После Еуклида, грчка математика прелази од геометријске ка аналитичкој методи. Тако је је Херон у трећој књизи своје *Метрике* решио једначину $144x(14-x)=6720$ коју је добио када је узео конкретне вредности за странице троугла ABC у следећем задатку:

Нека је дат троугао ΔABC. Одредити на његовим страницама тачке *D*, *E* и *F* које би биле темена троугла ΔDEF дате површине, таквог да би и троуглови ΔAEF, ΔBFD и ΔCED били једнаких површина с њим.



Херон претпоставља да, уколико дате тачке деле странице тако да важи $AF:FB = BD:DC = CE:EA$, онда троуглови ΔAEF, ΔBFD и ΔCED имају једнаке површине. Затим треба да одреди вредност тих размера како би троугао ΔDEF имао тражену површину.

Најпре спаја тачке A и D. Важе једнакости:

$BD:CD = CE:EA$, $BC:CD = CA:AE$, и $\Delta ABC:\Delta ADC = \Delta ADC:\Delta ADE$. Поред тога је и $\Delta ABC:\Delta ABD = \Delta ADC:\Delta EDC$. Како је позната површина троугла ΔDEF, биће позната површина троугла ΔEDC, а позната је и површина троугла ΔABC. Самим тим, познат је производ $\Delta ABD \times \Delta ADC$. То даље значи да, уколико је AH нормално на BC, позната је вредност $AH^2 \cdot BD \cdot DC$, па је познато и $BD \cdot DC$. Пошто је позната страница BC, биће познат и положај тачке D[5].

Затим, као пример, Херон узима да је $AB = 13, BC = 14, CA = 15, \Delta DEF = 24$. Тада је површина троугла ΔABC једнака 84, а дуж AH има дужину 12. Онда је $\Delta EDC = 20$, а $AH^2 \cdot BD \cdot DC = 2 \cdot \Delta ABC \cdot 2 \cdot \Delta EDC = 4 \cdot 84 \cdot 20 = 6720$, одакле је $BD \cdot DC = \frac{6720}{AH^2} = \frac{6720}{144} = 46\frac{2}{3}$. Херон изоставља $\frac{2}{3}$, и каже да је $BD \approx 8$. Уместо 8, очигледно је да би решење требало да буде $8\frac{1}{2}$, пошто одмах затим каже да је $DC = 5\frac{1}{2}$, а не 6.

Другим речима, решавајући једначину:

$$x^2 - 14x + 46\frac{2}{3} = 0, \text{ чији су корени } x_{1,2} = 7 \pm \sqrt{2\frac{1}{3}},$$

Херон је, очигледно, заменио ирационалан број $\sqrt{\frac{8}{3}}$ рационалним бројем $\sqrt{\frac{9}{4}}$, чиме је за његову апроксимацију добио $\frac{3}{2}$.

Херон је решавао проблеме који се своде на квадратне једначине и у својој *Геометрији*, али је у овој књизи дао и процес доласка до решења.

1) Дат је квадрат такав да збир његове површине и обима износи 896 стопа. Раздвојити површину од обима; или, у нашој терминологији, решити једначину $x^2 + 4x = 896$ (*Геометрија*, 24, 3). Овај задатак решава тако што узима половину броја 4 и додаје на обе стране једнакости његов квадрат, чиме леву страну допуњује до потпуног квадрата.
2) Ако је дат збир пречника и обима, и површина круга, наћи све те величине (овај задатак се појављује у *Геометрији* на 3 места, (*Геометрија* 21, 9) и (*Геометрија* 24, 46) се своде на исту

[5] „we have to apply to BC a rectangle equal to *BD·DC* and falling short by a square“, T. L. Heath, A History of Greek Mathematics, Vol. 2, стр. 336

једначину, док (*Геометрија* 24, 47) даје нову једначину сличну претходној). Две једначине које се добијају су:

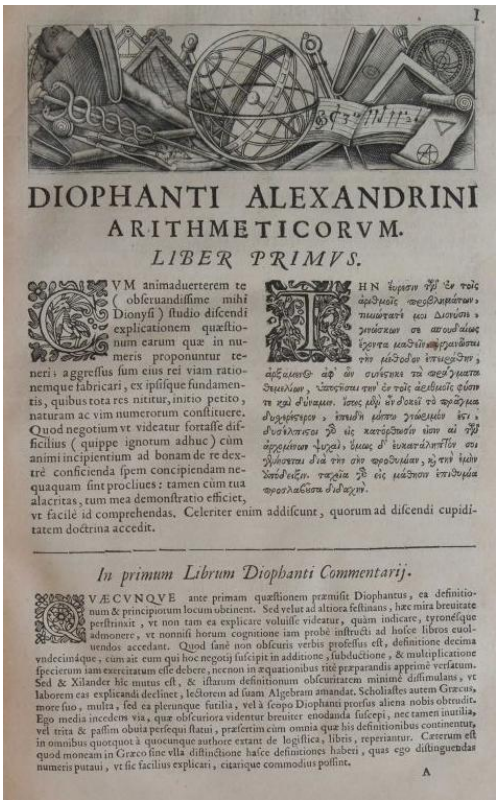
$$\frac{11}{14}r^2 + \frac{29}{7}r = 212 \text{ и}$$

$$\frac{11}{14}r^2 + \frac{29}{7}r = 67\frac{1}{2}$$

У овом случају, Херон је користио допуну до потпуног квадрата како би одредио корене једначине. Најпре би помножио једначину таквим бројем који би од првог члана направио потпуни квадрат, у овом случају са 154. Тиме су претходне једначине постале:

$$11^2r^2 + 58 \cdot 11r = 212 \cdot 154 \text{ и } 11^2r^2 + 58 \cdot 11r = 67\frac{1}{2} \cdot 154\,.$$

Допуњавајући их до потпуног квадрата, добија $(11r + 29)^2 = 32648 + 841$, односно $10395 + 841$. Одатле је $11r + 29 = \sqrt{33489} = 183$, односно $\sqrt{11236} = 106$. Даље је r =14, или $r = 7$.



DIOPHANTI ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM.
LIBER PRIMVS.

QVM animaduerterem te (obseruandissime mihi Dionysi) studio discendi explicationem quæstionum earum quæ in numeris proponuntur teneri; aggressus sum eius rei viam rationemque fabricari, ex ipsisque fundamentis, quibus tota res nititur, initio petito, naturam ac vim numerorum constituere. Quod negotium vt videatur fortasse difficilius (quippe ignorum adhuc) cùm animi incipientium ad bonam de re dextrè conficienda spem concipiendam nequaquam sint procliues: tamen cùm tua alacritas, tum mea demonstratio efficiet, vt facilè id comprehendas. Celeriter enim addiscunt, quorum ad discendi cupiditatem doctrina accedit.

ΤΗΝ ἔφεσιν περὶ τὴν τῶν ἀριθμῶν πραγματείαν, πυνθάνομαι σε, Διονύσιε, γνήσιον σε ἀκουτὴν ὄντα μανθάνειν τὴν μέθοδον ἐπιτηρεῖν, ἀξιώσας αἰφ' οὗ συνέστηκε τὰ πρὸς γνῶσιν ἀναγκαῖα, ὑποτίθεσθαι τὴν ἐν τοῖς ἀρίθμοις φύσιν τε καὶ δύναμιν. ἴσως μὲν οὖν δοκεῖ τὸ πρᾶγμα δυσχερέστερον, ἐπειδὴ μόνον γνώριμόν ἐστι, δυσκόλοις γὰρ οἱ κατάρχοντες εἶναι αἱ πρὸς ἀγρόοιν ψυχαί, ἡμᾶς δ' ἐυκατάληπτόν σοι ἡγήσεται διὰ τὴν αὐτὴν προθυμίαν, ἣ τὴν ἡδὺν δοκιδεῖξιν. ταχὺ γὰρ οἱς μάθησιν ἐπιθυμία προσλαβοῦσα διδαχή.

In primum Librum Diophanti Commentarij.

QVÆCVNQVE ante primam quæstionem præmisit Diophantus, ea definitionum & principiorum locum obtinent. Sed velut ad altiora festinans, hæc mira breuitate perstrinxit, vt non tam ea explicare voluisse videatur, quàm indicare, tyronesque admonere, vt nonnisi horum cognitione iam probè instructi ad hosce libros euoluendos accedant. Quod fanè non obscuris verbis professus est, definitione decima vndecimáque, cum ait eum qui hoc negotij suscipit in additione, subductione, & multiplicatione specierum iam exercitatum esse debere, nemon in æquationibus ritè præparandis apprimè versatum. Sed & Xilander hic mutus est, & istarum definitionum obscuritatem minimè dissimulans, vt laborem eas explicandi decliner, lectorem ad suam Algebram amandat. Scholiastes autem Græcus, more suo, multa, sed ea plerunque futilia, vel à scopo Diophanti prorsus aliena nobis obtrudit. Ego media incedens via, quæ obscuriora videntur breuiter enodanda suscepi, nec tamen inutilia, vel trita & passim obuia persequi statui, præsertim cùm omnia quæ his definitionibus continentur, in omnibus quotquot à quocunque authore extant de logistica, libris, reperiantur. Cæterum est quod moneam in Græco fine vlla distinctione hæsce definitiones haberi, quas ego distinguendas numeris putaui, vt sic facilius explicari, citarique commodius possint.

A

Диофант из Александрије је у свом трактату *Аритметика* за који се данас зна да се састојао из 13 књига, дао решења три типа квадратних једначина: $ax^2 + bx = c$, $ax^2 = bx + c$ и $ax^2 + c = bx$, где су a, b и c дати позитивни бројеви. Управо те типове једначина решавали су арапски математичари пет векова касније. У задатку 28, у првој књизи, Диофант тражи „два броја, ако је њихов збир 20, а збир њихових квадрата 208“. Он најпре довитљиво означава њихову разлику с $2x$, одакле је један број $10 + x$, а други $10 - x$, па добија једначину:

$$(10 + x)^2 + (10 - x)^2 = 208,$$

односно

$$x^2 = 4,$$

тј. добија да је $x = 2$ (пошто у целокупној расправи разматра само позитивна и то целобројна или рационална решења), те су тражени бројеви 12 и 8.

Индија

Једна од претпоставки која разјашњава могуће порекло квадратних једначина код Индуса сматра да је до њих довела конструкција олтара. У питању је једначина облика $ax^2 + bx = c$, и могла би да води порекло из периода Сулвасутри (грубо говорећи, око 500. године пре н. е.), међутим није пронађен запис методе која би дала решење. С друге стране, из времена Арјабхате (476–550) потиче правило које се односи на збир геометријског низа, и које показује да је решење квадратне једначине $ax^2 + bx + c = 0$ било познато, али се не види поступак доласка до решења. Треба напоменути да је

Арјабхата увео негативне бројеве и да је квадратна једначина имала два решења чак и у случајевима да је једно од њих било негативно.

Брамагуптино правило

Брамагупта (598–670) око 628. године у свом делу *Brāhmasphuṭasiddhānta* („Коректно засновано Брамино учење“) посвећује четврто поглавље квадратним једначинама, и код њега се оне први пут појављују с негативним коефицијентима. Пошто су се негативне величине најчешће сретале при новчаним трансакцијама, Брамагупта их је назвао „дугом“, а позитивне величине су, у складу с тим, биле „богатство“, па су нпр. правила за множење и дељење таквих величина била формулисана исказима попут „производ или количник два дуга је богатство, а производ или количник дуга и богатсва је дуг“.

Један од задатака које је решио постављен је на следећи начин:

> Одредити када је остатак ротације сунца око своје орбите, умањен за један, који је пао у среду, једнак с квадратним кореном из остатка ротације умањеног за два, који је најпре умањен за један, затим помножен с десет и на крају умањен за два?

Након што постави једначину, Брамагупта је поједностављује и своди на, у данашњој нотацији записано, облик $x^2 - 10x = -9$, а затим даје и поступак њеног решавања:

> Најпре вредност броја (-9) помножи с четвороструким коефицијентом квадрата (4), и додај квадрату [коефицијента] средњег члана (100), чиме ћеш добити 64. Када из њега извадиш корен (8) и умањиш га за [коефицијент] средњег члана (-10), добијени број (18) подељен с двоструким [коефицијентом] квадрата (2), даје вредност средњег члана, а то је 9.

Изражено данашњим симболима:

$$x = \frac{\sqrt{-9\cdot 4+(-10)^2}-(-10)}{2} = 9.$$

Како би одговорио на постављено питање, Бамагупта користи формулу за остатак ротације (83) и тражи да протекли број дана одузет од 83 (393) има најмањи могући именилац који треба да се додаје толико пута колико је потребно да би тражени дан пао баш у среду.

Махавирино правило

Махавира (око 850.) није дао правило за решавање квадратних једначина, али је разматрао проблем који укључује једначину $c + \frac{c}{3} + 3 \cdot \frac{c^2}{36} = m$ и за који је дао следећи коментар:

> У вези с комбинованим збиром [3 величине] који је помножен са 12, величина убачена у њега таква да исто треба да буде додато је 64. Квадратни корен овог [другог] збира умањен за квадратни корен величине коју смо додали у збир даје повода мери...

Изражено помоћу савремене симболике, ово значи да је $c = \sqrt{12m + 64} - \sqrt{64}$, што показује да је Махавира у суштини познавао наше савремено правило за одређивање позитивног корена квадратне једначине.

Индијско правило

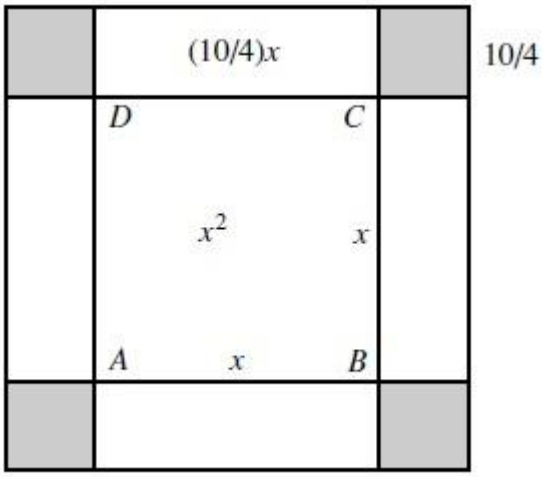
Сридара (око 1025.) је био први аутор који је дао тзв. индијско правило за решавање квадратне једначине. Њега цитира Баскара (око 1150.):

> Помножи обе стране једначине с бројем који је једнак четвороструком [коефицијенту] квадрата, и додај им број једнак квадрату оригиналног [коефицијента] непознате величине. [Затим извади корен].

Уколико је полазна једначина облика $ax^2 + bx = c$, најпре се трансформише у $4a^2x^2 + 4abx = 4ac$, а затим у $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = 4ac + b^2$. Тиме је лева страна постала потпуни квадрат, и зато важи $2ax + b = \sqrt{b^2 + 4ac}$, при чему се негативан корен игнорише. Сридара прво множи целу једначину са $4a$ како би избегао рачун с разломцима.

Ел Хорезмијево правило

Персијски математичар Ел Хорезми (око 825. године) користио је 2 опште методе за решавање квадратних једначина облика $x^2 + px = q$, обе засноване на резултатима Грка. Геометријски докази тих правила могу се илустровати његовом дискусијом једначине $x^2 + 10x = 39$ која се често појављује у касним арапским и у хришћанским текстовима кроз период од неколико векова.



У првом објашњењу, конструисао је квадрат чије су странице дужине x, како би тиме представио x^2. На то је додао $10x$, тако што је најпре направио 4 правоугаоника, сваки површине $\frac{10}{4}x$, и надовезао их на странице квадрата. На тај начин је добио неосенчени део приказане фигуре који представља збир $x^2 + 10x = x^2 + 4 \cdot \frac{10}{4}x$. Како би се добио цео квадрат странице $x + \frac{10}{2}$, потребно је допунити неосенчени део с четири осенчена квадрата странице $\frac{10}{4}$. Дакле, потребно је „допунити до потпуног квадрата“ додавањем сабирка $4\left(\frac{10}{4}\right)^2 = \left(\frac{10}{2}\right)^2$. Одатле следи једнакост:

$$\left(x + \frac{10}{2}\right)^2 = (x^2 + 10x) + 4 \cdot \left(\frac{10}{4}\right)^2 = 39 + \frac{100}{4} = 64.$$

Због тога страница великог квадрата мора бити $x + \frac{10}{2} = 8$, одакле је $x = 3$.

У општем случају, правило за решавање једначине $x^2 + px = q$ каже да се допуна до потпуног квадрата добија додавањем четири квадрата , од којих је сваки површине $\left(\frac{p}{4}\right)^2$, на фигуру која представља $x^2 + px$ како би се добила једнакост:

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=(x^2+px)+4\cdot\left(\frac{p}{4}\right)^2=q+\frac{p^2}{4}.$$

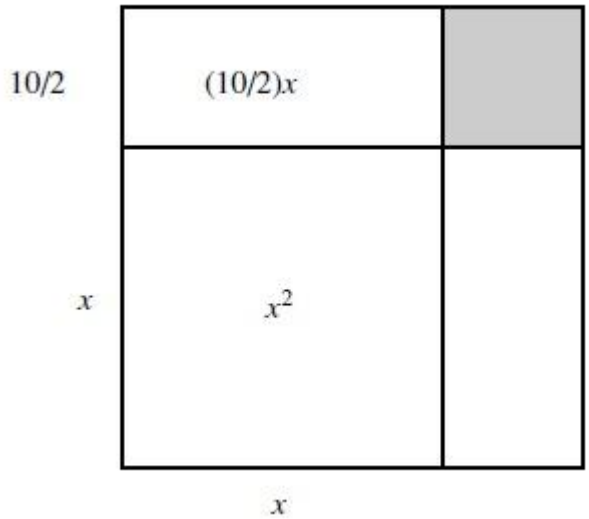
Одатле је решење:

$$x=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q}-\frac{p}{2}.$$

Ел Хорезмијево објашњење другог начина, према Розену гласи:

> Располови број корена, што у тренутној ситуацији даје 5. То помножи самим собом, резултат је 25. Додај то на тридесет девет, збир је 64. Сада извади корен из тог броја, што даје осам, и одузми од тога половину броја корена, што даје пет; остатак је три. То је корен квадрата који си тражио. Сам квадрат је 9.

У овом случају, фигура коју користи изгледа мало другачије, али је овај начин сличан ономе што ми данас радимо решавајући квадратне једначине – на квадрат странице x додаје овај пут два правоугаоника којима је друга страница дужине $\frac{10}{2}$, што чини површину неосенченог дела фигуре једнаку $x^2+2\cdot\frac{10}{2}x$. Да би та фигура постала квадрат, треба јој додати осенчени мањи квадрат површине $\left(\frac{10}{2}\right)^2$. Површина новонасталог квадрата онда износи $\left(x+\frac{10}{2}\right)^2=x^2+2\cdot\frac{10}{2}x+\frac{100}{4}=64$. Дакле, страница новог квадрата је $x+\frac{10}{2}=8$, па је дужина непознате странице квадрата $x=3$.



Као и у првом случају, неосенчена фигура има површину x^2+px, те јој се додаје квадрат коме је дужина странице $\frac{p}{2}$, одакле је $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=x^2+2\cdot\frac{p}{2}x+\left(\frac{p}{2}\right)^2=q+\frac{p^2}{4}$, и као и малопре, добија се да је

$$x=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q}-\frac{p}{2}.$$

Иако су Арапи препознали постојање два решења квадратне једначине, увек су наводили само позитивна. Сама идеја негативног корена подразумева прихватање негативних бројева као независних величина који имају исти статус као и позитивни бројеви. Такво схватање има скорашње корене; у делима ел Хорезмија и других арапских алгебриста, негативни бројеви се систематично избегавају. Њихово постојање и валидност први прихвата персијски математичар Баскара (1114–1185), а Европљани су их прихватили тек крајем XVI и почетком XVII века.

Правило Омара Хајама

Правило Омара Хајама (1048 – 1131) за решавање квадратне једначине облика $x^2 + px = q$ гласи:

> Помножити половину корена самим собом; додати производ броју и од корена овог збира одузети пола корена.Остатак је корен квадрата.

Другим речима, $x = \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q} - \frac{1}{2}p$.

Под „половином корена“ он подразумева $\frac{1}{2}p$, а под „бројем“ q. Разматрао је једначину $x^2 + 10x = 39$, исту ону коју је анализирао и ел Хорезми, и која је очигледно била омиљени школски проблем. Такође је узимао у обзир и аритметички немогућа решења. Хајам је дао правила решавања и за друге типове једначина, при чему је случај $x^2 + q = px$ заснован на идентитету $x(p - x) + \left(x - \frac{1}{2}p\right)^2 = \left(\frac{1}{2}p\right)^2$, а случај $px + q = x^2$ на идентитету $x(p - x) + \left(\frac{1}{2}p\right)^2 = \left(x - \frac{1}{2}p\right)^2$.

Допринос кинеске математике

Квадратне једначи се у кинеској математици појављују доста рано, јер се већ у четвртој глави класичног математичког дела *Девет књига о математичкој вештини* (202 пр. н. е–186 пр. н. е) може наћи следећи проблем:

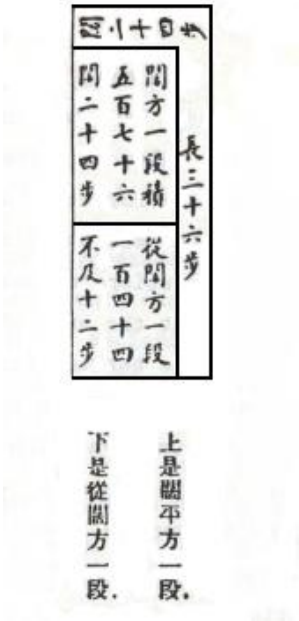
> Наћи страницу квадрата чија је површина 55225.

Решење проблема је у ствари опис методе одређивања квадратног корена датог броја који подразумева употребу штапића за рачунање. Начин доласка до методе није објашњен, међутим, сам приказ процеса вађења корена (који је растављен на три дела, 200+30+5) дао је алгебарску представу квадратних једначина, које би у савременој нотацији имале облик $x^2 + 400x = 15225$ и $x^2 + 460x = 2325$. Због тога су, из поступка вађења квадратног корена неког броја, математичари династије Хан били у могућности да одреде и решења квадратне једначине облика $x^2 + ax = b$. Поред тога, двадесети проблем у деветом поглављу исте књиге своди се на једначину $x^2 + 34x = 71000$ и наводи број 250 као њено решење.

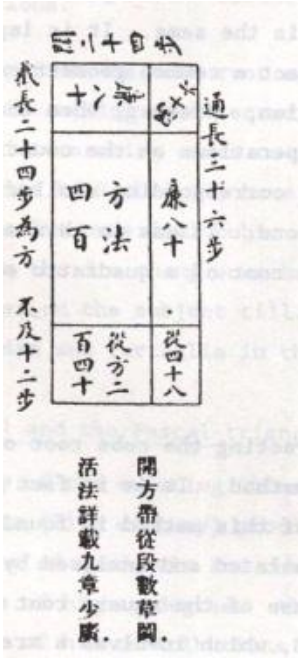
Један од интересантних метода у ком су коришћене квадратне једначине био је процес одређивања неодређених константи у формулама које су описивале кретање небеских тела, а који се заснива на једначини облика $Ax + Bx^2 = C$.

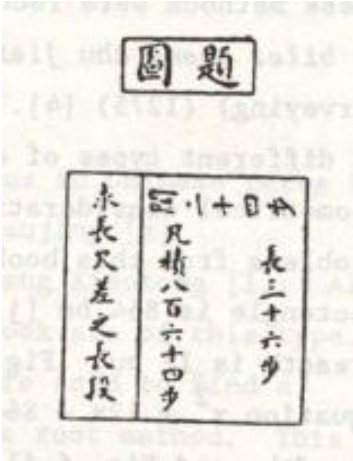
Кинески математичар Љу Ји (1080–1113) је у свом делу *Yi gu gen yuan* („Разматрања старих рукописа“) записао више метода за решавање квадратних једначина. Његова књига није сачувана, али је његов рад записао и анализирао Јанг Хуеј (1238–1298) у свом делу *Tian mu bilei cheng chu jiefa* („Практична правила математике за истраживања“). Формулисање различитих типова квадратних једначина на основу задатих проблема и њихово решавање били су ослоњени на геометрију. Наводимо пример:

> Познато је да је површина правоугаоника 864 буа (步, кинеска стопа), а разлика између његове дужине и ширине је 12 буа. Одредити непознате странице.

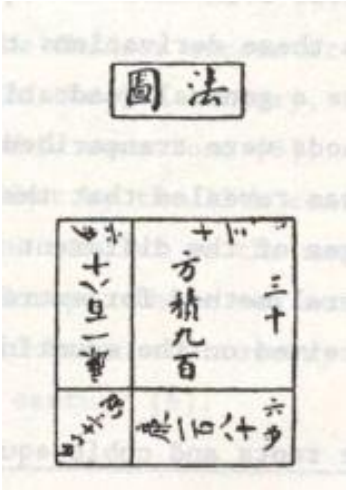


С леве стране приказано је формирање једначине $x^2 + 12x = 864$, при чему је за непознату величину изабрана ширина, а с десне стране је дата геометријска идеја за решавање те једначине.





С леве стране приказано је формирање једначине $x^2 - 12x = 864$, а овде је за непознату величину изабрана дужина. Поново је с десне стране дата геометријска идеја за решавање те једначине.



Јанг Хуеј је, уједно, и први аутор који је у свом делу разматрао квадратне једначине с негативним коефицијентима, иако он сам то достигнуће приписује свом претходнику, Љу Јиу.

Абрахам бар Хија Ханаси

Јеврејски математичар рођен у Барселони почетком XII века, Абрахам бар Хија (према неким изворима, *ha-Nasi* има значење „вођа“) аутор је прве књиге у Европи у којој се појављује најопштији облик квадратне једначине, написане под називом *Ḥibbūr ha-meshīḥah we-ha-tishboret* („Трактат о мерењу и рачунању“), и преведене на латински под називом *Liber Embadorum*. У њој бар Хија пише:

> „Онај ко жели да заиста научи како се исправно мере и деле површине, обавезно мора да добро разуме опште теореме геометрије и аритметике, на којима се учење о мерењу . . . заснива. Онда када у потпуности усвоји те идеје, ... неће му се десити да дође у ситуацију да одступи од истине“.

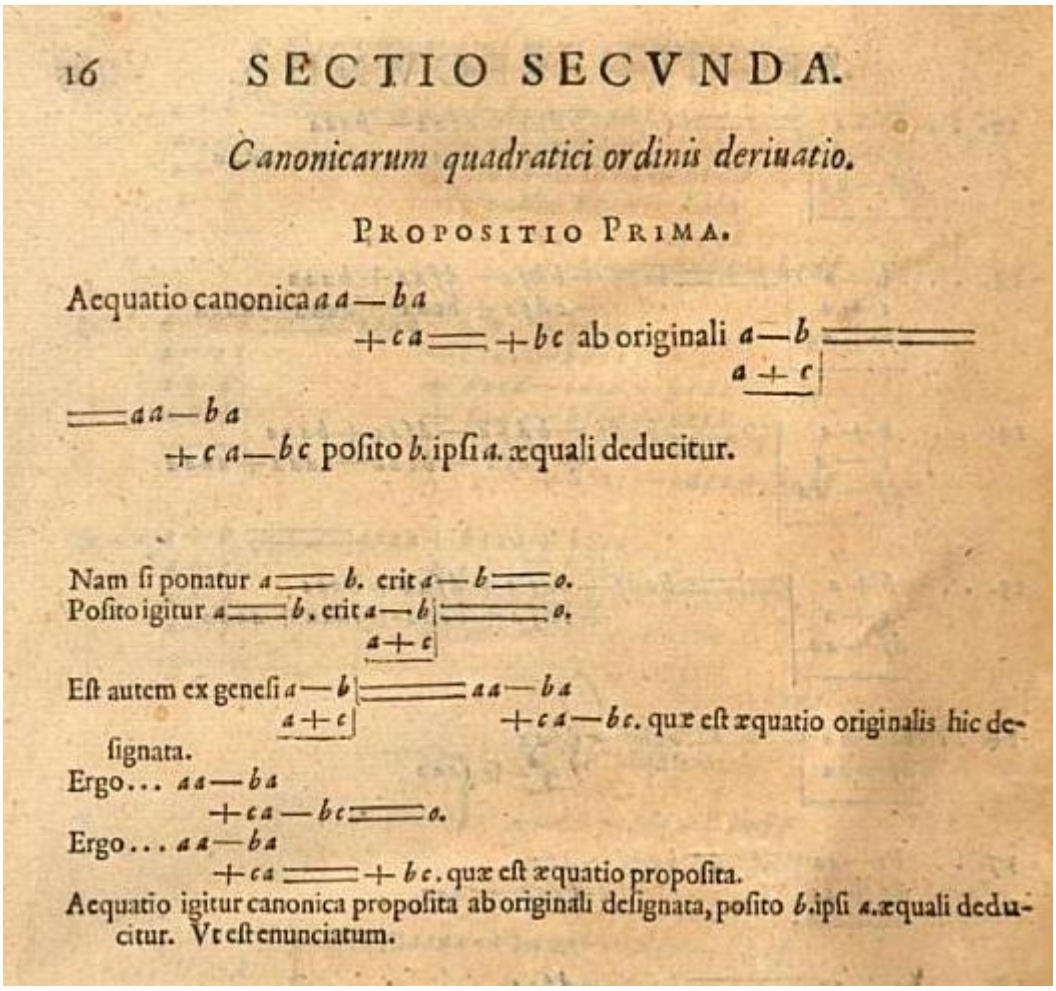
Томас Хариот

Када су у питању квадратне једначине, средњевековни алгебристи нису додали ништа значајно резултатима Арапа које су детаљно проучавали, док су ренесанси алгебристи само побољшали коришћену симболику. Следећи значајан допринос начињен је тек крајем XVI века.

Прво разматрање решења квадратних и других типова једначина растављањем на чиниоце може се наћи у делу *Artis analyticae praxis* („Пракса аналитичке вештине“) Томаса Хариота објављеном у Лондону, 1631. године. У другој глави као први пример наводи једначину $aa - ba + ca = +bc$, и пише је у облику:

$$\begin{array}{l|l} a-b & ===\quad aa-ba \\ \underline{a+c} & \qquad\quad +ca-bc \end{array}$$

У овом запису једначина постаје $(a-b)\cdot(a+c)=0$, одакле закључује да је $a=b$. Примећујемо да занемарује релацију $a+c=0$, а самим тим и негативно решење.



16 SECTIO SECVNDA.

Canonicarum quadratici ordinis deriuatio.

PROPOSITIO PRIMA.

Aequatio canonica $aa - ba + ca = +bc$ ab originali $\begin{array}{l|l} a-b & ===== \\ \underline{a+c} & \end{array}$ $= aa - ba + ca - bc$ posito b. ipsi a. æquali deducitur.

Nam si ponatur $a = b$. erit $a - b = o$.
Posito igitur $a = b$, erit $\begin{array}{l|l} a-b & ===== \\ \underline{a+c} & \end{array}$ o.

Est autem ex genesi $\begin{array}{l|l} a-b & ===== aa-ba \\ \underline{a+c} & \qquad\quad +ca-bc \end{array}$. quæ est æquatio originalis hic designata.

Ergo... $aa - ba + ca - bc = o$.

Ergo... $aa - ba + ca = +bc$. quæ est æquatio proposita.

Aequatio igitur canonica proposita ab originali designata, posito b. ipsi a. æquali deducitur. Vt est enunciatum.

Франсоа Вијет

У Вијетовом делу аналитичке методе су замениле геометријске, а његова решења квадратне једначине донела су напредак који се разликовао од онога што су урадили његови претходници. На

пример, да би решио једначину $x^2 + ax + b = 0$, увео је смену $u + z = x$, па је полазна једначина постала $u^2 + (2z + a)u + (z^2 + az + b) = 0$. Затим је ставио да је коефицијент уз линеарни члан једнак нули, односно $2z + a = 0$, одакле је $z = -\frac{1}{2}a$, а једначина постаје $u^2 - \frac{1}{4}(a^2 - 4b) = 0$, при чему су њена решења:

$$u = \pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}, \text{ одакле је}$$

$$x = u + z = -\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}.$$

Наравно, овде је поступак изложен у савременој нотацији. Пример како је Вијет писао, преузет из његовог дела *De AEquationum Recognitione et Emendatione Tracatus Secundus*:

Si A quad. + B 2 in A, aequatur Z plano. A+B esto E. Igitur E quad., aequabitur Z plano + B quad.

Consectarium.

Itaque $\sqrt{\text{Z plani} + \text{B quad.}}$ -B sit A, de qua primum quaerebatur.
Sit B 1. Z planum 20. A 1 N. 1Q + 2N, aequatur 20. Et sit 1 N $\sqrt{21} - 1$.

У нашој нотацији, ако је $A^2 + 2BA = Z^p$, нека је $A + B = E$. Онда је $E^2 = Z^p + B^2$.

Закључак.

Следи да је A, полазна непозната величина, једнака $\sqrt{Z^p + B^2} - B$.
Нека је $B = 1$, $Z^p = 20$ и $A = x$. $x^2 + 2x = 20$, одакле је $x = \sqrt{21} - 1$.

Узевши у обзир да Вијет посебно разматра једначине облика $A^2, -2BA = Z^p$ и $2DA - A^2 = Z^p$, јасно је да није размишљао о општој квадратној једначини облика $x^2 + ax + b = 0$.

Следе примери задатака које је Вијет решио у својој књизи:

1) Нека је Z, средњи од три члана пропорције, и нека је B разлика између највећег и најмањег. Одредити најмањи члан пропорције.

   Ако је најмањи члан пропорције означен са A, највећи ће бити $A + B$. Њиховим множењем добија се $A^2 + AB$. Како су у питању чланови пропорције, производ два крајња једнак је квадрату средњег члана. То значи да важи једнакост $A^2 + BA = Z^2$. Ако је $x^2 + 10x = 144$, онда је 144 квадрат средњег члана који се налази између два крајња чија је разлика 10. Следи да је x мањи крајњи члан у низу три члана пропорције 8, 12 и 18.

2) Аналогним резоновањем, добија да је у једначини $x^2 - 10x = 144$, 144 квадрат средњег члана који се налази између два крајња чија је разлика 10. Следи да је x већи крајњи члан у низу три члана пропорције 8, 12 и 18.
3) Слично закључује да је у једначини $26x - x^2 = 144$, 144 квадрат средњег члана који се налази између два крајња чији је збир 26. Сада решење није једнозначно одређено, већ је x или мањи или већи крајњи члан пропорције 8, 12 и 18.

Литература

1. Thomas Harriot, *Artis Analyticae praxis*, London, 1631.
2. Robert Simson , *The Elements of Euclid: Also the Book of Euclid's Data*, London, 1804.
3. *Algebra, with Arithmetic and mensuration*, from the Sanscrit of Brahmegupta and Bháscara. Translated by Henry Thomas Colebrooke, London, 1817.
4. Frederic Rosen, *Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi : Algebra*, London, 1831.
5. T. L. Heath, *Diophantus of Alexandria; a study in the history of Greek algebra*, University Press, Cambridge, 1910.
6. T. L. Heath, *A History of Greek Mathematics, Vol. 2*, At The Clarendon Press, Oxford, 1921.
7. David Eugene Smith, *History Of Mathematics II*, Dover Publications Inc, New York, 1958.
8. Joseph Needham, *Science and Civilisation in China: Volume 3, Mathematics and the Sciences of the Heavens and the Earth*, Cambridge University Press, New York, 1959.
9. Asger Aaboe, *Episodes From The Early History Of Mathematics*, The Mathematical Association Of America, New York, 1964.
10. Richard J. Gillings, *Mathematics in the Time of the Pharaohs*, Dover Publications, New York, 1982.
11. Colin A. Ronan, *The Shorter Science and Civilisation in China*, Cambridge University Press, New York, 1985.
12. Lam Lay Yong, *The Development Of Polynomial Equations In Traditional China*, Text of Presidential Address deliverd at the Annual Meeting of the Singapore Mathematical Society on 19. March 1986.
13. Мирослав Танасијевић, *Речник египатске цивилизације*, Опус, Београд, 1989.
14. Ијан Шо, *Оксфордска историја Египта*, Клио, Београд, 2004.
15. Mario Livio, *The Equation that Couldn't Be Solved: How Mathematical Genius Discovered the Language of Symmetry*, Simon and Schuster, New York, 2005.
16. David Burton, *The History of Mathematics: An Introduction*, 6th Ed, McGraw-Hill, New York, 2006.
17. *The Analytic Art* by Francois Viète, Translated by T. Richard Witmer, Dover Publications, New York, 2006.
18. Oliver Byrne, *The First Six Books of the Elements of Euclid*, Facsimile of the famous first edition of 1847, Taschen, Köln,2010
19. Еуклидови *Елементи* у преводу Антона Билимовића (http://poincare.matf.bg.ac.rs/nastavno/zlucic/)
20. Quadratic, cubic and quartic equations (http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Quadratic_etc_equations.html)

Квадратна функција, једначине и неједначине *

Увод пре увода

1. Катета правоглог троугла има дужину $36\,cm$, а хипотенуза $39\,cm$. Израчунати површину троугла.
2. У кругу пречника $74\,cm$ конструисана је тетива која је од центра удаљена $12\,cm$. Одредити дужину тетиве.

Квадратни трином

Раставити на чиниоце квадратни трином $ax^2 + bx + c$! Важан каменчић у темељу средњошколског знања.

1. $(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$
2. $(x-a)(x+b) = x^2 - (a-b)x - ab$
3. $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + 2(ad+bc)x + bd$

Раставити на чиниоце следеће квадратне триноме:

1. $x^2 - 2x - 8, \quad x^2 + 13x + 36, \quad 6x^2 - x - 12,$
2. $12x^2 + 39x + 30, \quad 6x^2 - 37x - 60, \quad 15x^2 - 32x - 28$
3. $y^2 - (2a-1)y + a^2 - a - 2, \quad t^2 + (a-1)t - 2a^2 + 7a - 6$
4. $0,2x^2 - 1,34x - 0,42, \quad x^2 - 5ax - 2x + 6a^2 + 11a - 35$

Први пример може се лако решити и помоћу свођења до потпуног квадрата, али наредни примери показују да то и није ефикасна метода у случају „неугодних бројева."

Неколико важних примера

Избор задатака је веома важан елемент за ефикасно савладавање одређене теме. Уџбеници који се користе у нашим школама садрже довољно примера, али нисам сигуран да ми обраћамо довољно пажње при избору задатака које ћемо обрадити на часу, а још мање при задавању домаћег. Ово је битно јер већини данашњих ученика је нормално да играју игрице пар сати дневно, а није нормално да толико времена уче, не само математику већ и остале предмете. Домаћи задатак увек треба да садржи и понеки задатак који ће оне најбоље у одељењу заинтересовати да се тргну из просека у који упадамо и деца и ми.

*Александра Равас, Нела Спасојевић, Јован Кнежевић

1. $\dfrac{x(x+5)}{x^2-8x+29}-\dfrac{x}{x+5}=\dfrac{4}{x+5}-\dfrac{3x+16}{x^2-8x+29}$

2. $\dfrac{1}{x^2+3x+2}+\dfrac{1}{x^2+5x+6}+\cdots+\dfrac{1}{x^2+4029x+2015^2-2015}=1$

3. $1+\dfrac{2x}{x+4}+\dfrac{27}{2x^2+7x-4}=\dfrac{6}{2x-1}$

4. $2x^2-(a+b)x+\sqrt{ab}(a+b-2x)=0$

5. $(a^2-b^2)x^2-(a^2+b^2)x+ab=0$

6. $\dfrac{x-a}{x-b}+\dfrac{x-b}{x-a}=\dfrac{10}{3}$

7. $\dfrac{1}{x-m}+\dfrac{1}{x-n}=\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}$

8. $2x|x-3|+|x+5|=0$

9. $|x^2+4x+2|=\dfrac{3}{2}\left|x+\dfrac{1}{2}\right|$, решити и графички.

10. За које вредности λ једначина

$$(\lambda-1)x^2+(2\lambda+7)x+10\lambda+35=0$$

има бар један реалан корен.

11. $\dfrac{3x^2-1}{x}+\dfrac{5x}{3x^2-x-1}=\dfrac{119}{18}$

12. $(6x+5)^2=\dfrac{35}{(2+3x)(x+1)}$

13. $(x+2)(x+6)(x+1)(x-3)=-96$

14. $(x-1)(x-4)(x+2)^2=70x^2$,

15. Испитати функцију $y=-\dfrac{1}{2}x^2-2x+\dfrac{3}{2}$ и нацртати њен график.

16. Дат је скуп парабола $y=(m-1)x^2+2mx+4$, $m\in\mathbb{R}$. Доказати да све параболе датог скупа пролазе кроз две фиксне тачке.

17. Одредити геометријско место минимума функција $y=x^2-2(m+1)x+2m(m+2)$, $m\in\mathbb{R}$.

18. Одредити решења једначина

$$\begin{aligned} x^4-x^3-22x^2+16x+96 &= 0\\ x^3-2x^2-3x+10 &= 0 \end{aligned}$$

ако се зна да имају једно заједничко решење.

Решење: Нека је x_0 заједничко решење.

$$\begin{array}{rcl} x_0^4 - x_0^3 - 22x_0^2 + 16x_0 + 96 & = & 0 \\ x_0^3 - 2x_0^2 - 3x_0 + 10 & = & 0 \mid \cdot x_0, x_0 \neq 0 \\ \hline x_0^4 - x_0^3 - 22x_0^2 + 16x_0 + 96 & = & 0 \\ x_0^4 - 2x_0^3 - 3x_0^2 + 10x_0 & = & 0 \mid \cdot (-1) \\ \hline x_0^3 - 19x_0^2 + 6x_0 + 96 & = & 0 \mid \cdot (-1) \\ x_0^3 - 2x_0^2 - 3x_0 + 10 & = & 0 \end{array}$$

Имамо $17x_0^2 - 9x_0 - 86 = 0$, те $x_0 = -2$ или $x_0 = \dfrac{43}{17}$.

Даље,

$$\begin{array}{rcl} x^3 - 2x^2 - 3x + 10 & = & 0 \\ x^3 + 2x^2 - 4x^2 - 8x + 5x + 10 & = & 0 \\ (x+2)(x^2 - 4x + 5) & = & 0 \end{array}$$

$$x = -2 \lor x = 2 - i \lor x = 2 + i.$$

Коначно,

$$\begin{array}{rcl} x^4 - x^3 - 22x^2 + 16x + 96 & = & 0 \\ x^4 + 2x^3 - 3x^3 - 6x^2 - 16x^2 - 32x + 48x + 96 & = & 0 \\ x^3(x+2) - 3x^2(x+2) - 16x(x+2) + 48(x+2) & = & 0 \\ (x+2)(x^3 - 3x^2 - 16x + 48) & = & 0 \\ (x+2)[x^2(x-3) - 16(x-3)] & = & 0 \\ (x+2)(x-3)(x^2 - 16) & = & 0 \\ (x+2)(x-3)(x-4)(x+4) & = & 0 \end{array}$$

$$x = -2 \lor x = 3 \lor x = 4 \lor x = -4.$$

19. Наћи три узастопна непарна природна броја, којима је сума квадрата једнака четвороцифреном броју са једнаких цифрама.

Решење: Нека су та три броја $2k-1, 2k+1, 2k+3$.
Имамо да је

$$(2k-1)^2 + (2k+1)^2 + (2k+3)^2 = 1000x + 100x + 10x + x.$$

Сређивањем тог израза долазимо до

$$12k^2 + 12k + 11 = 1111x,$$

а тај израз трансформишемо у

$$12(k^2 + k + 1) = 12 \cdot 92x + 7x + 1.$$

Закључујемо да $7x + 1$ мора бити дељив са 12.
Како $x \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ заменом добијамо да је само за $x = 6$ израз $7x + 1$ дељив са 12. Имамо дакле

$$12k^2 + 12k + 11 = 5555,$$

тј.

$$12k^2 + 12k - 5544 = 0.$$

Поделимо тај израз са 12. После сређивања, долазимо до

$$(k + 22)(k - 21) = 0.$$

Јасно, $k = 21$.

Тражени бројеви су, дакле, 41, 43 и 45. То се лако може проверити.

20. Ако су $a, b, c \in \mathbb{R}$, онда су и решења једначине $\dfrac{1}{x-a} + \dfrac{1}{x-b} + \dfrac{1}{x-c} = 0$ реални бројеви. Доказати.

Решење: Средимо израз:

$$(x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b) = 0.$$

$$x^2-(b+c)x+bx+x^2-(a+c)x+ac+x^2-(a+b)x+ab=0$$
$$3x^2-2(a+b+c)x+ab++ac+bc=0$$

Дискриминанта је већа од нуле.

$$4(a+b+c)^2-12(ab+ac+bc)\geq 0.$$

Дељењем тог израза са 4, и даљим сређивањем, долазимо до

$$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\geq 0.$$

21. Одредити све могуће вредности параметра $a\in\mathbb{R}$, за које једначина

$$\frac{(a-1)x^2+ax+a-1}{x+3}=0$$

има јединствено решење у скупу реалних бројева.

Решење: У случају када је $a=1$ имамо јединствено решење $x=0$. У случају када је $a\neq 1$, једначина ће имати јединствено решење. када је дискриминанта квадратне једначине $(a-1)x^2+ax+a-1=0$ једнака нули, одакле добијамо да a задовољава квадратну једначину $-3a^2+8a-4=0$, чија решења су $a=2$ и $a=\frac{2}{3}$. У првом случају је решење $x=-1$, а у другом случају $x=1$. Полазна једначина ће имати јединствено решење и у случају када је $x=-3$ корен квадратног тринома $(a-1)x^2+ax+a-1$ (јер $x=-3$ није решење полазне једначине). Тада добијамо да је $a=\frac{10}{7}$. У том случају, јединствено решење је $x=-\frac{1}{3}$. Дакле, полазна једначина ће имати јединствено решење у случају када $a\in\left\{\frac{2}{3},1,\frac{10}{7},2\right\}$.

22. Дата су три тврђења: (а) једначина $x+\frac{1}{x}=a$ нема реалних корена; (б) постоји једнакост $\sqrt{a^2-4a+4}=2-a$; (в) систем $\begin{cases} x+y^2=a \\ x-\sin^2 y=-3\end{cases}$ има јединствено решење. За које вредности параметра a су два од тих тврђења тачна, а једно није?

Решење. Прво тврђење је еквивалентно тврђењу

$$|a|<2. \tag{1}$$

Пошто је $\sqrt{a^2-4a+4}=|a-2|$, то је друго тврђење тачно ако и само ако је

$$a\leq 2. \tag{2}$$

Проучимо треће тврђење. Ако је пар бројева (x_0,y_0) решење система, онда је и пар бројева $(x_0,-y_0)$ такође решење система. У случају јединствености решења мора бити

$$y_0=-y_0,\ \text{тј. } y_0=0,\ \text{а тада је } x_0=-3 \text{ и } a=-3. \tag{3}$$

Обрнуто, ако је $a=-3$, онда је $y^2=-\sin^2 y$, одакле је $y=0$ и $x=-3$, тј. решење је јединствено (треће тврђење можемо испитати помоћу графика). Приметимо сада, да се услови (1) и (3) узајамно искључују, при чему, ако важи један од њих важи и (2). Према томе, важи $a=-3$ или $-2<a<2$.

23. Решити једначину $\operatorname{tg}\frac{2\pi x}{x^2+x+1}=-\sqrt{3}$.

Упутство. Полазећи од почетне једначине добијамо једначину

$$\frac{2\pi x}{x^2+x+1}=-\frac{\pi}{3}+n\pi,$$

а затим једначину

$$(3n-1)x^2+(3n-7)x+(3n-1)=0.$$

Дискриминанта ове једначине мора бити ненегативна, а n цео број. Такве вредности за n су 0, 1, -1. Решења једначине су $-2,-\frac{1}{2},\frac{-7\pm 3\sqrt{5}}{2},1$.

24. Решити једначину $\sqrt{5-x} = x^2 - 5$.

Решење: Дата једначина је еквивалентна систему

$$5 - x = (x^2 - 5)^2,\ x^2 \geq 5,\ x \leq 5.$$

Напишимо горњу једначину у облику

$$5^2 - (1 + 2x^2) \cdot 5 + x^4 + x = 0.$$

Решимо сада ову једначину као квадратну по коефицијенту 5.

$$5 = \frac{1 + 2x^2 \pm \sqrt{(1-2x)^2}}{2},$$

одакле је

$$5 = \frac{1 + 2x^2 + 1 - 2x}{2} \quad \text{или} \quad 5 = \frac{1 + 2x^2 - 1 + 2x}{2},$$

тј.

$$\begin{aligned} x^2 - x - 4 &= 0, \\ x^2 + x - 5 &= 0. \end{aligned}$$

Решавањем ових једначина добијамо

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}, \quad x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

Како је $x^2 \geq 5$ и $x \leq 5$, полазну једначину задовољавају

$$x = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \quad \text{и} \quad x = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}.$$

25. $\left(\frac{1}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{x+2}\right)^2 = \frac{13}{36}$

Решење: Одузети $-2\frac{1}{x+1}\frac{1}{x+2}$ од обе стране. Имамо

$$\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)^2 + 2\frac{1}{x+1}\frac{1}{x+2} - \frac{13}{36} = 0$$

Ако уведемо смену $\frac{1}{(x+1)(x+2)} = t$, имамо:

$$t^2 + 2t - \frac{13}{36} = 0,$$

одакле добијамо $t = \frac{1}{6}$ или $t = -\frac{13}{6}$.

Из првог решења имамо $x = -4 \vee x = 1$, а из другог немамо реалних решења.

26. Решити једначину $x^4 + 6x^3 + 5x^2 - 12x + 3 = 0$.

Решење: Проширимо једначину са $4x^2$:

$$x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 4x^2 - 12x + 3 = 0$$
$$x^2(x+3)^2 - 4(x^2 + 3x) + 3 = 0$$

Ако уведемо смену $t = x(x+3)$, имамо:

$$t^2 - 4t + 3 = 0,$$

тј. $t = 1$ или $t = 3$.

Враћањем смене, добијамо

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}, \quad x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

27. Решити једначину $x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 0$.

Решење: Напишимо једначину као

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x^2 + 2x - 1 = 0.$$
$$x^2(x^2 + 4x + 4) - (x-1)^2 = 0$$
$$[x(x+2)]^2 - (x-1)^2 = 0$$
$$(x^2 + 2x - x + 1)(x^2 + 2x + x - 1) = 0$$
$$(x^2 + x + 1)(x^2 + 3x - 1) = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Геометрија ипак помаже

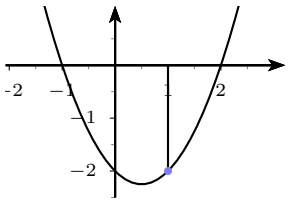
Важан елемент у бољем разумевању ове теме је и синтеза алгебарског и геометријског приступа у решавању задатака. Геометријски приступ нам омогућава да на једноставнији начин решимо одређене врсте задатака,

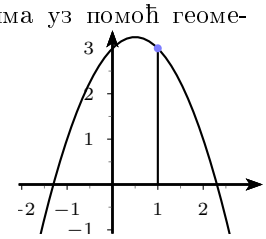
1. Које вредности параметра a једначина $(2a+1)x^2 - ax + a - 2 = 0$ има два реална корена од којих је један већи , а други мањи од јединице.

   Просечан ученик ће рећи да је потребно да дискриминанта буде већа од нуле, наћи ће решења и покушати да реши ирационалне неједначине, а то уме да буде врло компликовано.

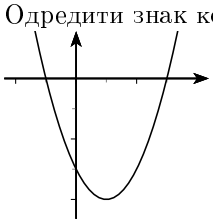
   Решење: Означимо са $f(x)$ квадратни трином леве стране једначине. Ако је $2a + 1 > 0$, онда да би били испуњени услови задатка потребно је и довољно да буде $f(1) < 0$. Тако долазимо до система $2a + 1 > 0 \wedge 2a - 1 < 0$ чије је решење интервал $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$. Ако је, пак, $2a+1 < 0$, да би били испуњени услови задатка мора да важи $f(1) > 0$, тј. важи $2a + 1 < 0 \wedge 2a - 1 > 0$, односно $a \in \emptyset$. У случају $2a + 1 = 0$, услови задатка нису испуњени.

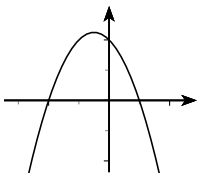
   Овај пример је много лакше објаснити ученицима уз помоћ геометријског приступа.

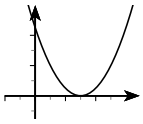


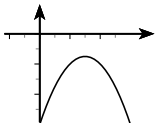


2. Одредити знак коефицијената a, b и c, ако су дати графици:





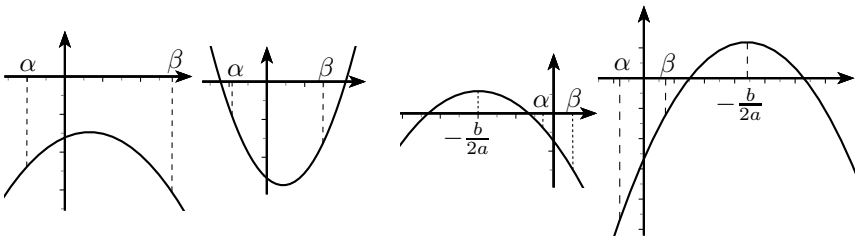




3. Неједнакост $ax^2 + bx + c < 0$ је задовољена за свако $\alpha < x < \beta$ акко је $(D = b^2 - 4ac, f(x) = ax^2 + bx + c)$:

$$\begin{cases} D < 0 \\ a < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a > 0 \\ f(\alpha) \leq 0 \\ f(\beta) \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} D \geq 0 \\ a < 0 \\ f(\alpha) \leq 0 \\ -\frac{b}{2a} < \alpha \end{cases} \vee \begin{cases} D \geq 0 \\ a < 0 \\ f(\beta) \leq 0 \\ -\frac{b}{2a} > \beta \end{cases}$$

Доказати тврђење користећи геометријску интерпретацију. Навести одговарајуће услове за случај $ax^2 + bx + c > 0$.



4. Неједнакост $ax^2 + bx + c > 0$ је испуњена за свако $x > \alpha$ акко је

$$\begin{cases} D & < & 0 \\ a & > & 0 \end{cases} \vee \begin{cases} D & \geq & 0 \\ a & > & 0 \\ f(\alpha) & \geq & 0 \\ -\dfrac{b}{2a} & < & \alpha \end{cases}$$

Доказати.

5. Неједнакост $ax^2 + bx + c > 0$ је испуњена за свако $x < \alpha$ акко је

$$\begin{cases} D & < & 0 \\ a & > & 0 \end{cases} \vee \begin{cases} D & \geq & 0 \\ a & > & 0 \\ f(\alpha) & \geq & 0 \\ -\dfrac{b}{2a} & > & \alpha \end{cases}$$

Доказати.

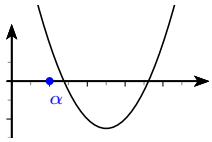
Проблеми са ограничењем за нуле функције

Дат је интервал $[\alpha, \beta]$. Треба одредити услове за коефицијенте a, b, c, квадратне функције $f(x) = ax^2 + bx + c$, тако да та функција испуњава одређене услове.

1. Нека су x_1 и x_2 корени квадратне једначине $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ и нека су α и β дати реални бројеви ($\alpha < \beta$). Доказати следећа тврђења и дати геомеријску интерпретацију:

(а) корени x_1 и x_2 су реални и важи $\alpha < x_1 \leq x_2$ акко је

$$\begin{cases} D = b^2 - 4ac \geq 0 \\ af(\alpha) > 0, \text{ где } f(x) = ax^2 + bx + c \\ \alpha < -\dfrac{b}{2a} \end{cases}$$



б) Корени x_1 и x_2 су реални и важи $x_1 \leq x_2 < \alpha$ акко је

$$\begin{cases} D = b^2 - 4ac \geq 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ \alpha > -\dfrac{b}{2a} \end{cases}$$

в) корени су реални и важи услов $x_1 < \alpha < x_2$ акко је $af(\alpha) < 0$;
г) корени x_1 и x_2 су реални и важи $\alpha < x_1 \leq x_2 < \beta$ акко је

$$\begin{cases} D = b^2 - 4ac \geq 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ af(\beta) > 0 \\ \alpha < -\dfrac{b}{2a} < \beta \end{cases}$$

У случајевима (а), (б) и (в) написати одговарајуће услове за $\alpha = 0$.

Решење: (а) Из услова $\alpha < x_1 \leq x_2$ имамо еквивалентне услове $x_1 - \alpha > 0$, $x_2 - \alpha > 0$ ($x_1 \leq x_2$ имамо из договора да мањи корен означимо са x_1). Последњи услови су испуњени акко је збир и производ бројева $x_1 - \alpha$ и $x_2 - \alpha$ такође позитиван. Из $(x_1 - \alpha) + (x_2 - \alpha) > 0$ добијамо $\alpha < \dfrac{x_1 + x_2}{2} = -\dfrac{b}{2a}$, док из $(x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0$ следи

$$\alpha^2 - \alpha(x_1 + x_2) + x_1 x_2 > 0 \Leftrightarrow af(\alpha) > 0.$$

Успут смо користили Виетове формуле. Наравно, први услов, $D = b^2 - 4ac \geq 0$, је потребан и довољан да би решења била реална.

(в) Нека су x_1 и x_2 реални корени и задовољавају услов $x_1 < \alpha < x_2$. Тада је $x_1 - \alpha < 0$, $x_2 - \alpha > 0$, па је

$$(x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) < 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha(x_1 + x_2) + x_1 x_2 < 0 \Leftrightarrow af(\alpha) < 0.$$

Обрнуто, ако је $af(\alpha) < 0$, тада је

$$af(\alpha) = a^2 \left(\alpha - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4} < 0 \Leftrightarrow D > 4a^2 \left(\alpha - \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0,$$

па су решења реална. Ако, даље, α не би било између x_1 и x_2, тада би према (а) и (б) имали да је $af(\alpha) > 0$, супротно претпоставици.

2. Одредити све вредности $k \in \mathbb{R}$ за које су корени једначине $(k+1)x^2 - 3kx + 4k = 0$ већи од 1.

Решење: Имамо услове

$$D = -28k\left(k + \frac{16}{7}\right) \geq 0, \quad (k+1)f(1) = 2(k+1)\left(k + \frac{1}{2}\right) > 0, \quad 1 < \frac{3k}{2(k+1)}.$$

$$k \in \left[-\frac{16}{7}, 0\right], \quad k \in (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right), \quad k \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty).$$

$$k \in \left[-\frac{16}{7}, -1\right).$$

3. Одредити $k \in \mathbb{R}$ тако да корени једначине $kx^2 + 2(k-1)x - 4 = 0$ задовољавају услов $x_1 < 3 < x_2$.

Решење: Имамо да је услов $1 \cdot f(3) < 0$ потребан и довољан да је испуњен услов $x_1 < 3 < x_2$. У нашем случају

$$f(3) = 15k\left(k - \frac{2}{3}\right) < 0 \Leftrightarrow k \in \left(0, \frac{2}{3}\right).$$

4. Одредити $k \in \mathbb{R}$ за које се корени једначине $(k-1)x^2 - 2(k+2)x + k = 0$ налазе у интервалу $(-1, 2)$.

Решење: $\alpha < x_1 \leq x_2 < \beta \Leftrightarrow D \geq 0 \wedge af(\alpha) > 0 \wedge af(\beta) > 0 \wedge \alpha < -\dfrac{b}{2a} < \beta$.

$$D = 4(k+2)^2 - 4k(k-1) = 4(k^2 + 4k + 4 - k^2 + k) = 4(5k+4) \quad k \in \left[-\frac{4}{5}, +\infty\right)$$

$$af(\alpha) = (k-1)f(-1) = (k-1)(k-1+2k+4+k) = (k-1)(4k+3) \quad k \in \left(-\infty, -\frac{3}{4}\right) \cup (1, +\infty)$$

$$af(\beta) = (k-1)f(2) = (k-1)(4k-4-4k-8+k) = (k-1)(k-12) \quad k \in (-\infty, 1) \cup (12, +\infty)$$

$$\alpha < -\frac{b}{2a} < \beta \quad -1 < \frac{2(k+2)}{2(k-1)} < 2 \quad k \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$$

$$\frac{k+2}{k-1} + 1 > 0 \quad \frac{2k+1}{k-1} > 0$$

$$\frac{k+2}{k-1} - 2 < 0 \quad \frac{-k+4}{k-1} < 0 \quad k \in (-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$$

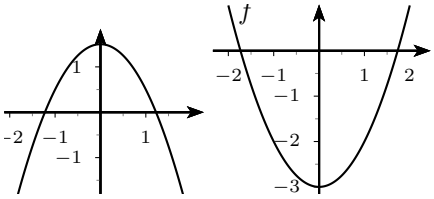
$$k \in \left[-\frac{4}{5}, -\frac{3}{4}\right) \cup (12, +\infty)$$

За $k = 1$: $-6x + 1 = 0$, $x = \dfrac{1}{6} \in (-1, 2)$

$k \in \left[-\dfrac{4}{5}, -\dfrac{3}{4}\right) \cup \{1\} \cup (12, +\infty)$.

Неједначине

1. Наћи све вредности параметра a за које свака вредност x која задовољава неједначину $ax^2 + (1 - a^2)\,x - a > 0$ задовољава такође и неједначину $|x| < 2$.
   Решење: Постављени задатак можемо да преформулишемо на следећи начин. За које вредности a сва решења неједначине $ax^2+(1-a^2)x-a > 0$ припадају интервалу $-2 \le x \le 2$?
   Ако је $a = 0$ тада дата неједначина има облик $x > 0$.
   Видимо да $a = 0$ не задовољава услов задатка.
   Нека је $a \neq 0$. Дискриминанта квадратног тринома је $D = (1 - a^2)^2 + 4a^2 = (1 + a^2)^2$. Очигледно је да је $D > 0$ за свако a. Зато за сваку вредност $a \neq 0$ квадратни трином има два реална различита решења, која лако можемо да нађемо: $x_1 = a$, $x_2 = -\frac{1}{a}$.



   Тада ће решење квадратне неједначине $ax^2 + (1 - a^2)x - a > 0$ бити или интервал (x_1, x_2) што одговара случају $a < 0$, или два интервала $(-\infty, x_2)$ и $(x_1, +\infty)$ што одговара случају $a > 0$.
   Видимо да ниједно $a > 0$ не задовољава услов задатка.
   Ако је $a < 0$ тада вредност параметра a одређујемо из система $-2 \le a \le -\frac{1}{2}$. Решење је $a \in [-2, -\frac{1}{2}]$.

2. За које вредности параметра a неједначина $a \sin^2 x + 2(a + 1) \sin x + a - 4 > 0$ нема решења?
   Решење. Ставимо $\sin x = t$ и посматрајмо неједначину

$$at^2 + 2(a + 1)t + (a - 4) > 0. \tag{1}$$

   Потребно је да докажемо за које вредности параметра a интервал

$$-1 \le t \le 1 \tag{2}$$

   не садржи ниједно решење неједначине (1). Ако је $a = 0$, онда је решење неједначине (1) $t > 2$, а то је противречно са (2). Према томе, у даљем тексту сматрамо да је $a \neq 0$. Дискриминанта квадратног тринома (1) је једнака $6a+1$ па за $a \le -\dfrac{1}{6}$

неједначина (1) уопште нема решења (специјално нема решења из интервала (2)). Нека је

$$-\frac{1}{6} < a < 0.$$

У том случају сва решења (1) се садрже у интервалу $t_1 < t < t_2$, где је

$$t_1 = \frac{-(a+1)+\sqrt{6a+1}}{a}, \quad t_2 = \frac{-(a+1)-\sqrt{6a+1}}{a}.$$

Ако претпоставимо да је $t_1 < 1$, добијамо

$$-(a+1)+\sqrt{6a+1} > a, \text{ или } \sqrt{6a+1} > 2a+1, \text{ или } 2a > 4a^2,$$

што је противречно јер је $a < 0$. Значи да у посматраном случају ниједна од вредности (2) не задовољава (1). Нека је, на крају, $a > 0$. Неједначину (1) у том случају задовољавају $t < t_2$ и $t > t_1$ (сада је $t_2 < t_1$). Све вредности $t < t_2$ се не садрже у (2) јер је $t_2 < -1$. Објаснимо за које вредности $a > 0$ је задовољена неједнакост $t_1 < 1$. Имамо

$$-(a+1)+\sqrt{6a+1} < a,$$

одакле добијамо

$$\sqrt{6a+1} < 2a+1, \ 2a < 4a^2, \ a > \frac{1}{2}.$$

На тај начин у интервалу (2) се садрже решења неједначине (1) само за $a > \frac{1}{2}$.

Примена дискриминанте

1. Ако су a, b, c реални бројеви такви да је $(b-1)^2 - 4ac < 0$, доказати да систем једначина

$$\begin{array}{ccccccc} ax^2 & + & bx & + & c & = & y, \\ ay^2 & + & by & + & c & = & z, \\ az^2 & + & bz & + & c & = & x \end{array}$$

нема реалних решења.

Решење: Дати систем је еквивалентан са системом

$$\begin{array}{ccccccc} ax^2 & + & (b-1)x & + & c & = & y-x, \\ ay^2 & + & (b-1)y & + & c & = & z-y, \\ az^2 & + & (b-1)z & + & c & = & x-z. \end{array}$$

Ако саберемо одговарајуће леве и десне стране, добијамо

$$[ax^2+(b-1)x+c]+[ay^2+(b-1)y+c]+[az^2+(b-1)z+c] = 0. \quad (*)$$

Како је због $(b-1)^2 - 4ac < 0$, сваки од три квадрата тринома за свако x, односно y, z различитог од нуле, једнакост $(*)$ не може да буде тачна. Дакле, дати систем нема реалних решења.

2. Нека су a и b реални бројеви такви да је $a^2 \leq 2b$. Доказати да за све реалне бројеве x важи

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 \geq 0.$$

Решење: Како је

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = x^2\left(x^2 + ax + \frac{b}{2}\right) + \left(\frac{b}{2}x^2 + ax + 1\right),$$

довољно је показати да је $x^2 + ax + \frac{b}{2} \geq 0$ и $\frac{b}{2}x^2 + ax + 1 \geq 0$, за све $x \in \mathbb{R}$. Ово је тачно, јер је дискриминанта ових тринома $D = a^2 - 2b \leq 0$. Једнакост се достиже за

$$(a, b, x) \in \{(2, 2, 1), (-2, 2, -1)\}.$$

3. Доказати да не постоји $x \in \mathbb{R}$ тако да важи

$$\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{ctg} 3x \in \left(\frac{2}{3}, 9\right).$$

Решење: Претпоставимо да је $\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{ctg} 3x \in (2/3, 9)$. Приметимо да x није облика $\pi/2 + k\pi$, за неко $k \in \mathbb{Z}$, јер је у супротном $\operatorname{tg} 2x = 0$. Дакле, $\operatorname{tg} x$ је дефинисано, па важи $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2 \operatorname{tg}}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$. Такође, $\operatorname{ctg} 3x \neq 0$, па је и $\operatorname{tg} 3x$ дефинисан и по адиционим формулама важи $\operatorname{tg} 3x = \dfrac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}$.

Нека је

$$\begin{aligned} y = \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{ctg} 3x &= \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x} \\ &= \frac{2 - 6 \operatorname{tg}^2 x}{3 - 4 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x} = \frac{2 - 6m}{3 - 4m + m^2} \in \left(\frac{2}{3}, 9\right), \end{aligned}$$

где је $m = \operatorname{tg}^2 x$. Тада је

$$y \cdot m^2 + (6 - 4y) \cdot m + (3y - 2) = 0. \qquad (*)$$

Према претходном, квадратна једначина $(*)$ (по m) има ненегативно решење. Дакле, $D = (6 - 4y)^2 - 4y(3y - 2) \geq 0$, односно $4y^2 - 40y + 36 \geq 0$. Решавањем ове квадратне неједначине добијамо да је $y \geq 9$ или $y \leq 1$, па је према претходном $y \in (2/3, 1]$. Међутим, тада је $y > 0$, $6 - 4y > 0$ и $3y - 2 > 0$, па је по Вијетовим формулама збир решења једначине $(*)$ негативан, а производ позитиван, а самим тим оба решења су негативна. Контрадикција.

4. Од свих парова реалних бројева (x, y), које задовољавају услов $\log_{x^2+y^2}(x + y) \geq 1$, наћи онај пар чији је y највећи.

Решење. Све тачке равни које задовољавају дату неједначину дефинисане су помоћу два система неједначина:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &> 1, \\ x + y &\leq x^2 + y^2; \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &< 1, \\ 0 < x + y &\leq x^2 + y^2. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Ако у другој од неједначина система (1) сматрамо y као параметар, добијамо неједначину по x:

$$x^2 - x + y^2 - y \leq 0. \qquad (3)$$

Ова неједначина има решења само уз услов $D = 1 - 4(y^2 - y) \geq 0$, тј. ако је $4y^2 - 4y - 1 \leq 0$, чије је решење

$$\frac{\sqrt{2} - 1}{2} \leq y \leq \frac{\sqrt{2} + 1}{2}.$$

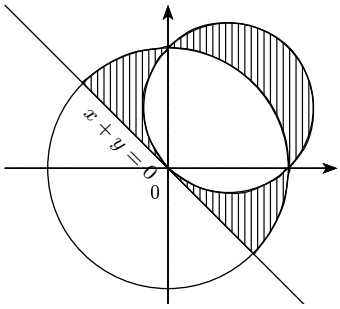
Највећа вредност за y је, према томе, $\dfrac{\sqrt{2} + 1}{2}$. За $y = \dfrac{\sqrt{2} + 1}{2}$ неједначина (3) добија облик $x^2 - x + \dfrac{1}{4} \leq 0$ чије је јединствено решење $x = \dfrac{1}{2}$. Притом је за тачку $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{2} + 1}{2}\right)$ и прва од неједначина система (1) задовољена. За систем (2) имамо $y < 1$ па зато други систем не даје нова решења за највећи y.

Примедба. Једначина $x+y=x^2+y^2$ дефинише круг

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{y}\right)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

са полупречником $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и центром у тачки $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Користећи то, лако је одредити сва решења неједначине дате у задатку (сл. 9), тачка M има координате

$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$



сл. 9

5. Реални бројеви x, y, a су такви да је

$$x+y=2a-1 \qquad x^2+y^2=a^2+2a-3.$$

За које $a\in\mathbb{R}$ ће производ xy добити најмању вредност.

Решење. Израз

$$2xy=(x+y)^2-x^2-y^2=3a^2-6a+4 \tag{1}$$

као функцију од a представља квадратни трином по a, дефинисан за оне вредности a за које постоје реални бројеви x и y који задовољавају услов задатка. Те вредности x и y су дефинисане системом

$$\begin{aligned} x+y&=2a-1,\\ xy&=\frac{3}{2}a^2-3a+2, \end{aligned}$$

што значи да x и y задовољавају квадратну једначину

$$t^2-(2a-1)t+\left(\frac{3}{2}a^2-3a+2\right)=0,$$

чија је дискриминанта једнака $-2a^2+8a-7$. Та дискриминанта је ненегативна за

$$\frac{4-\sqrt{2}}{2}\le a\le\frac{4+\sqrt{2}}{2}. \tag{2}$$

Према томе, реалне вредности x и y постоје само за оне a који задовољавају услов (2). Наш задатак се сада састоји у томе да и на интервалу (2) нађемо такав број a, за које трином (1) добија најмању вредност. Теме параболе $b=3a^2-6a+4$ има апсцису $a=1$. тј. налази се лево на интервалу (2). Најмања вредност израза (1) постиже се, према томе, на левом крају размака (2).

6. За разне вредности реалног параметра a, решити једначину $x^4-2ax^2+x+a^2-a=0$.

Решење. Напишимо дату једначину у облику

$$a^2-(2x^2+1)a+x^4+x=0.$$

Решимо ову једначину као квадратну по параметру a. Имамо

$$a=\frac{2x^2+1\pm\sqrt{(2x-1)^2}}{2},$$

односно

$$x^2+x-a=0,\quad x^2-x+1-a=0.$$

Решавањем ових једначина добијамо:

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4a}}{2},\quad x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{4a-3}}{2},$$

као решења дате једначине.

7. У скупу реалних бројева решити једначину
$$5x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x - 2y + 1 = 0.$$
Решење: $5x^2-2(y+1)x+2y^2-2y+1=0$. Дискриминанта ове квадратне једначине по x је $\frac{D}{4} = (y+1)^2 - 5(2y^2-2y+1) = -9y^2+12y-4 = -(3y-2)^2$. Дакле, она је непозитивна. Значи $D \geq 0 \Leftrightarrow D = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$.
Одговор: $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

8. Ако су x, y, z реални бројеви такви да је $x+y+z=5$, $xy+yz+zx=8$, доказати да је сваки од њих у интервалу $[1, \frac{7}{3}]$.
Како је $y+z=5-x$, $yz = 8-x(y+z) = 8-x(5-x)$, то су y и z корени једначине $u^2-(5-x)u+x^2-5x+8=0$, чија је дискриминанта $D=-3x^2+10x-7 \geq 0$ за $1 \leq x \leq \frac{7}{3}$. На исти начин се доказује да су бројеви y и z у интервалу $[1, \frac{7}{3}]$.

9. У скупу реалних бројева, решити систем једначина
$$\begin{cases} x^2-2xy+2y^2+2x-8y+10=0 \\ 2x^2-7xy+3y^2+13x-4y-7=0 \end{cases}$$
Решење: Дискриминанта прве једначине, као квадратне по x, износи $\frac{D}{4} = -(y-3)^2$. Реално решење постоји за $y=3$. Затим налазимо $x=2$ и проверавамо заменом у другу једначину.
Одговор: $(2,3)$.

Геометрија или алгебра

1. Дата је висина h_c која одговара хипотенузи правоуглог троугла и полупречник r уписаног круга. Изразити хипотенузу c у функцији од h_c и r. Саставити квадратну једначину (са једном непознатом) чији су корени катете a и b посматраног троугла. За које вредности h_c и r постоји такав троугао?
Решење:
$$\begin{aligned} c^2 &= a^2+b^2 \\ ch &= ab \quad \left(P_\triangle = \frac{ch}{2} = \frac{ab}{2}\right) \\ a+b-c &= 2r \quad (a-r+b-r=c) \end{aligned}$$
$a+b = c+2r|^2$
$2ch-4rc = 4r^2| : 2$
$c = \frac{2r^2}{h-2r}$.
Једначина чија су решења a и b је $x^2-(a+b)x+ab=0$
$$a+b = c+2r = \frac{2r^2}{h-2r}+2r = \frac{2r^2+2rh-4r^2}{h-2r} = \frac{2rh-2r^2}{h-2r} = 2r\frac{h-r}{h-2r}$$
$$ab = ch = \frac{2r^2}{h-2r}h = \frac{2r^2h}{h-2r}$$
$$x^2 - 2r\frac{h-r}{h-2r}x + \frac{2r^2h}{h-2r} = 0$$
$$(h-2r)x^2 - 2r(h-r)x + 2r^2h = 0$$
$c = \frac{2r^2}{h-2r} \to c > 0 \Rightarrow h > 2r$.
Да би постојао такав троугао мора $D \geq 0 \wedge x_1, x_2 > 0$
$$\begin{aligned} D &= 4r^2(h-r)^2 - 4r^2(h-2r)\cdot 2r^2h = 4r^2((h+r)^2-2h(h-2r)) \\ &= 4r^2(h^2-2hr+r^2-2h^2+4hr) = 4r^2(r^2+2rh-h^2) \\ &= 4r^2(r^2+2rh+h^2-2h^2) = 4r^2((r+h)^2-(h\sqrt{2})^2) \\ &= 4r^2(r+h-h\sqrt{2})(r+h+h\sqrt{2}) \end{aligned}$$

$D \geq 0 \Rightarrow r+h-h\sqrt{2} \geq 0 \Rightarrow h(1-\sqrt{2})+r \geq 0 \Rightarrow r \geq h(\sqrt{2}-1) \Rightarrow h \leq \dfrac{r}{\sqrt{2}-1} \Rightarrow$
$h \leq r(\sqrt{2}+1)$
$D \geq 0$ за $2r < h \leq r(\sqrt{2}+1)$
Треба још испитати да ли су оба решења једначине позитивна (да би могла бити дужине катета троугла)
за $h \in (2r, r(\sqrt{2}-1)]$ решења су реална
$x_{1,2} = \dfrac{2r(h-r) \pm \sqrt{4r^2(h-r)^2 - 4 \cdot 2r^2 h(h-2r)}}{2(h-2r)}$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{2r(h-r) \pm \sqrt{4r^2[h^2-2hr+r^2-2h^2+4hr]}}{2(h-2r)} \\ &= \frac{2r(h-r) \pm 2r\sqrt{r^2+2hr-h^2}}{2(h-2r)} \\ &= \frac{2r}{2(h-2r)}[h-r \pm \sqrt{r^2+2hr-h^2}], \end{aligned}$$

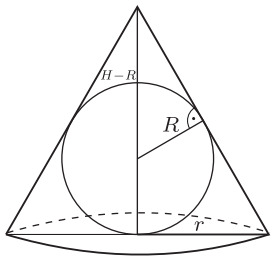
$h-2r > 0 \Rightarrow$ испитати само $h-r-\sqrt{r^2+2hr-h^2}$, јер је $h-r+\sqrt{r^2+2hr-h^2} > 0$.
$h-r-\sqrt{r^2+2rh-h^2} \geq 0$?
$(h-r)^2 \geq r^2+2rh-h^2 \Leftrightarrow 2h(h-2r) > 0$ оба решења су позитивна, па постоји троугао чије су катете дужине $a' = x_1$ и $b' = x_2$. Тада је хипотенуза $c' = \sqrt{a'^2+b'^2} = \dfrac{2r^2}{h-2r}$, $h' = \dfrac{a' \cdot b'}{c'} = h$, $r' = s' - c' = r$

2. Око једнакокраког троугла дате основице a и крака b описан је круг. Израчунати тетиву круга која полови краке троугла.
Решење: $2x = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+4b^2}$.

3. У два наспрамна угла правоугаоника чије су странице 5 и 3 уписана су два круга која се међусобно додирују споља тако да се њихове површине односе као $2:1$. Израчунати полупречнике ових кругова.
Решење: $r = \dfrac{8-\sqrt{30}}{\sqrt{2}+1}, R = \dfrac{8+\sqrt{30}}{\sqrt{2}+1}$ и $r = \dfrac{(8-\sqrt{30})\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}, R = \dfrac{(8+\sqrt{30})\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$.

4. Одредити максималну вредност односа запремина лопте и око ње описане купе.
Решење. Имамо
$$\frac{V_L}{V_K} = \frac{\frac{4}{3}R^3\pi}{\frac{r^2\pi H}{3}} = \frac{4R^3}{r^2H}.$$
Како је (видети слику)

$$\begin{aligned} \frac{H-R}{\sqrt{r^2+H^2}} = \frac{R}{r} \Leftrightarrow & (H-R)^2r^2 = R^2(r^2+H^2) \\ & H^2r^2 - 2HRr^2 + R^2r^2 \\ & = R^2r^2 + R^2H^2 \Big/ : H \\ & Hr^2 - 2Rr^2 = R^2H \\ & H(r^2-R^2) = 2Rr^2 \\ & H = \frac{2r^2R}{r^2-R^2} \end{aligned}$$



Заменом у горњи израз је
$$\frac{V_L}{V_K} = \frac{4R^3}{r^2\frac{2Rr^2}{r^2-R^2}} = \frac{2R^2(r^2-R^2)}{r^4} = \frac{2R^2}{r^2}\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right). \tag{1}$$

Ако је збир два броја константна величина, тада је максимална вредност њиховог производа достигнута када су сабирци једнаки:

$$x + a - x = a$$

$$x \cdot (a - x) = -x^2 + ax = -\Big(x^2 - ax + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}\Big)$$

$$= -\Big(x - \frac{a}{2}\Big)^2 + \frac{a^2}{4}.$$

Сада је $[x(a-x)]_{\max} = \dfrac{a^2}{4}$ за $x = \dfrac{a}{2}$. У нашем случају је $\dfrac{R^2}{r^2} = 1 - \dfrac{R^2}{r^2}$ одакле је $\dfrac{R^2}{r^2} = \dfrac{1}{2}$. Коначно добијамо

$$\frac{V_L}{V_K} = \frac{2R^2}{r^2}\Big(1 - \frac{R^2}{r^2}\Big) \le 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Задаци за оне који желе више

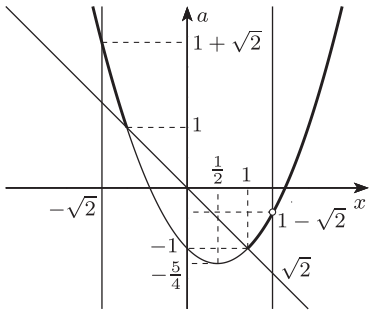
1. За које вредности a једначина $\log_{x^2-1}(x+a) = 1$ нема решења?

Решење. Да би пар бројева (x, a) задовољавао дату једначину, потребно је и довољно да буду испуњени услови

$$x + a = x^2 - 1,$$
$$x + a > 0,$$
$$x^2 - 1 \neq 1.$$

Тачке чије координате задовољавају услове су тачке параболе

$$a = \Big(x - \frac{1}{2}\Big)^2 - \frac{5}{2},$$



Сл. 13

које се налазе изнад праве $x + a = 0$, осим тачке са апсцисама $\pm\sqrt{2}$, тј. осим тачака $(\sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$ и $(-\sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$ (сл. 13). Пројекције свих тих тачака на оси Oa попуњавају зрак $a > -1$, осим једне тачке $a = 1 - \sqrt{2}$.

2. (реп) Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ квадратна функција $f(x) = ax^2 + bx + c$. Означимо са D дискриминанту, са P производ, а са S збир њених нула. Доказати да постоји само једна функција f за коју су a, D, P, S четири узастопна цела броја (у растућем поретку).

Решење: a, $\quad D = b^2 - 4ac$, $\quad P = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$, $\quad S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$;

$\Rightarrow b^2 - 4ac = a + 1 \wedge \dfrac{c}{a} = a + 2 \wedge -\dfrac{b}{a} = a + 3$

$(-a^2 - 3a)^2 - 4a(a^2 + 2a) = a + 1 \Leftrightarrow (a+1)(a^2(a+1) - 1) = 0 \Leftrightarrow a = -1$, а остала решења не припадају скупу $\mathbb{Z}$.

Стога је решење $f(x) = -x^2 + 2x - 1$.

3. Наћи све целе бројеве x за које је израз $y = -6x^2 + 167x + 4823$
а) прост број; б) што већи природан број; в) што мањи природан број.

Решење: Број 167 треба раставити на два броја тако да је њихова разлика 167, а производ $-6 \cdot 4823$. Раставимо производ на чиниоце и добијамо $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 53$. То су бројеви -106 и 273.

$$-6x^2 + 167x + 4823 = -6x^2 - 106x + 273x + 4823 =$$
$$= -2x(3x + 53) + 91(3x + 53) =$$

$$= (3x + 53)(91 - 2x).$$

$$y = y(x) = (91 - 2x)(3x + 53).$$

(а) Да би y био прост број, потребно је да један од фактора буде 1 или -1. Први фактор је једнак 1 за $x = 45$, а -1 за $x = 46$, док је други фактор једнак -1 за $x = -18$. Међутим, пошто је

$$y(45) = 188 = 2 \cdot 94, \quad y(46) = -191 < 0, \quad y(-18) = -127 < 0,$$

не постоји цео број x за који је y прост број.

(б) Задати квадратни трином достиже максимум за $x = \frac{167}{12} = 13.91...$

Најближа целобројна вредност је $x = 14$, тако да је y највећи природан број за $x = 14$, тј. $y(14) = 5985$.

(в) Како је $y > 0$ за $-\frac{53}{3} < x < \frac{91}{2}$, цело x најближе крајевима овог интервала је $x = 45$, па је y најмањи природан број за $x = 45$, тј. $y(45) = 188$.

4. Ако су коефицијенти једначине $ax^2 + bx + c = 0$ непарни бројеви, доказати да једначина нема рационалних решења.

Решење: Теорија бројева, не воле је ни професори, а ученици самим тим још мање. Ако би решења једначине $ax^2 + bx + c = 0$ била рационална, мора дискриминанта да буде потпуни квадрат и то квадрат непарног броја јер је $b^2 - 4ac$ разлика непарног и парног броја. Стога можемо писати $b^2 - 4ac = (2l + 1)^2$, односно $(2m + 1)^2 - (2l + 1)^2 = 4ac$, јер је b непаран број.

$4(m+l+1)(m-l) = 4ac$. После скраћивања са 4 на левој страни остаје паран број јер су бројеви $m + l + 1$ и $m - l$ различите парности, па је број на левој страни паран , а на десној непаран.

5. Нека је $f(x) = x^2 + ax + b$. Ако је $|f(0)| \leq 800$ и $f(120)$ је прост број, доказати да функција f нема целобројне нуле.

Решење: $f(0) = b \Rightarrow |b| \leq 800$. Претпоставимо супротно тј. нека f има целобројне нуле x_1 и x_2 тј. $f(x) = (x-x_1)(x-x_2)$. У том случају важи $f(120) = 120^2+120a+b$ и $f(120) = (120 - x_1)(120 - x_2)$ је прост број, па важи систем

$120-x_1 = 1 \wedge 120-x_2 = p$, p је прост број. Из прве једначине закључујемо $x_1 = 119$. Из $|f(0)| \leq 800$ тј. $|x_1 \cdot x_2| \leq 800 \Rightarrow |119 \cdot x_2| \leq 800 \Rightarrow |x_2| \leq 6$. Тада су могуће вредности за $x_2 : -6, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Одговарајуће вредности за $120 - x_2 : 126, 125, 124, 123, 122, 121, 119, 118, 117, 116, 115, 114$ што значи да ниједна од вредности израза $120 - x_2$ није прост број, па наша претпоставка да f има целобројне нуле није добра.

6. Нека је $f(x)$ квадратна функција која има реалне нуле за које важи $|x_1 - x_2| \geq 1995$. Доказати да једначина

$$f(x) + f(x + 1) + f(x + 2) + \cdots + f(x + 1995) = 0$$

има два реална решења.

Решење: $F(x) = f(x) + f(x + 1) + f(x + 2) + \cdots + f(x + 1995)$

$F(x_1) = f(x_1) + f(x_1 + 1) + f(x_1 + 2) \cdots + f(x_1 + 1995)$. Први сабирак једнак је нула јер је x_1 нула функције f, а остали су негативни (последњи је ненегативан), што значи да важи $F(x_1) < 0$.

$F(x_2) = f(x_2) + f(x_2 + 1) + f(x_2 + 2) \cdots + f(x_2 + 1995)$. Први сабирак једнак је 0, а остали су позитивни (последњи је ненегативан), што значи да важи $F(x_2) > 0$. Стога важи да $F(x)$ има реалне нуле.

Прилог из стручне школе

1. Решити једначине:
   (а) $(x-2)(x-3)=0$; (б) $(2x-1)(x+2)=0$; (в) $5(4-3x)(x+10)=0$;
   (г) $x(1-2x)=0$; (д) $(\frac{x}{3}-12-x)(3x-1-\frac{x}{2})=0$;
   (ђ) $(x+3)(x+4)(x-5)=0$; (е) $(x-2i)(x+i)=0$; (ж) $7x^2=0$.

2. Скратити разломак $\dfrac{x^2-2ax+a^2-1}{x^2-(2a+1)x+a^2+a}$.

3. Дате су једначине:
   (а) $3x^2-4xy^2+y=0$; (б) $2z^2+z-1=0$; (в) $1-y=y^2$;
   (г) $\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{1}{2}y^2+2=0$; (д) $x^2\sqrt{2}+x\pi-y^2-y=0$;
   (ђ) $(1+i)x^2-(2-i)x=0$.
   У свакој једначини одабрати непознату, одредити степен једначине по уоченој непознатој и одредити коефицијенте у том случају.

4. Испитати у погледу степена и решивости једначине:
   (а) $(1-x)^2=x+2$; (б) $(2x-1)^2+3=4x^2-4x+4$;
   (в) $(x-1)^3+2=3x-3x^2+x^3$.

5. Решити следеће квадратне једначине са ограничењима:
   (а) $(x^2-3x+2=0 \wedge x>0)$; (б) $(x^2-1=0 \wedge x$ је мера дужи$)$;
   (в) $(3x^2-2x-1=0 \wedge |x|<\frac{3}{4})$; (г) $(4x^2-x-3=0 \wedge |x|\leq 1)$;
   (д) $(x^2+x-6=0 \wedge |x|>5)$; (ђ) $(4x^2+11x-3=0 \wedge x$ је цео број$)$;
   (е) $(x^2+x+1=0 \wedge x\in\mathbb{R})$; (ж) $(x^2-x=0 \wedge |x|<10)$;
   (з) $(2x^2-7x+3=0 \wedge x$ је синус неког угла$)$.

6. Шаховски турнир напустила су два учесника; један одмах после одиграног првог дела, а други одмах после десетог. На турниру је одиграно укупно 55 партија. Да ли су ова двојица учесника међусобно играла?

   Решење: Број учесника без двојице је $x-2$, а број одиграних партија без њих је $\dfrac{(x-2)(x-3)}{2}$. Ако нису играли међусобно важи $\dfrac{(x-2)(x-3)}{2}+11=55$, а ако јесу, важи $\dfrac{(x-2)(x-3)}{2}+10=55$. Како први случај нема целобројних решења, а други има, следи да су играли међусобно.

7. Одредити k тако да једначине

$$2x^2-(3k+2)x+12=0 \quad \text{и} \quad 4x^2-(9k-2)x+36=0$$

   имају тачно једно заједничко решење.

   Решење: Нека је x_0 заједничко решење те две једначине. Елиминишемо x_0^2 из система, одредимо x_0 преко параметра k и вратимо у једну од једначина. Имамо да те две једначине имају заједничко решење за $k=3$.

8. Дат је трином ax^2+bx+c. Одредити m тако да трином

$$ax^2+bx+c+m(x^2+1)$$

буде потпун квадрат.

Решење: $D = 0$, $m = \dfrac{-(a+c) \pm \sqrt{(a-c)^2 + b^2}}{2}$.

9. Решити једначину $(x-3)(x-4)(x-7)(x-8) = 60$.

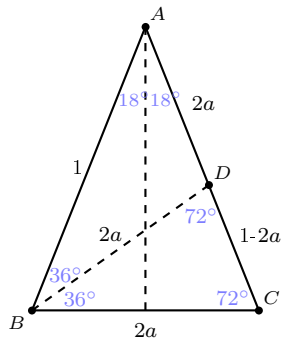
   Упутство: $(x^2 - 11x + 24)(x^2 - 11x + 28) = 60$. Уведимо смену $x^2 - 11x + 24 = t$, имамо $t(t+4) = 60$.

10. У једначини $x^2 - 4ax + 1 = 0$ одредити параметар a тако да њени корени задовољавају релацију $x_1 \geq a$ и $x_2 \geq a$.

    Решење: $\dfrac{1}{2} < a < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

11. Израчунати $\sin 18°$.

    Решење: $\sin 18° = a$.



$$\begin{aligned}
\triangle ABC \sim \triangle BCD \quad &\Rightarrow \quad \frac{2a}{1} = \frac{1-2a}{2a},\ a > 0 \\
&\Rightarrow \quad 4a^2 = 1 - 2a,\ a > 0 \\
&\Rightarrow \quad (2a)^2 + 2a - 1 = 0,\ a > 0 \\
&\Rightarrow \quad 2a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},\ a > 0 \\
&\Rightarrow \quad a = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \sin 18°
\end{aligned}$$

12. Конструисати криву $|y| = \dfrac{4}{3}x^2$.

13. За коју је вредност параметра a збир квадрата корена једначине $x^2 - ax + a = 3$ минималан?

    Решење: $a = 1$.

14. Испитати да ли постоји квадратна функција чији график садржи тачке A, B и C:

    (а) $A(-1,0), B(2,0), C(0,-4)$; (б) $A(3,0), B(-1,0), C(0,3)$;
    (в) $A(-5,0), B(-1,0), C(0,-5)$; (г) $A(-2,0), B(1,0), C(3,0)$.

15. Одредити заједничку тачку свих парабола $y = -x^2 + 2(k+1)x + 3k - 1$, $k \in \mathbb{R}$ и одредити скуп тачака темена тих парабола.

    Решење: Заједничка тачка је $M(-\frac{3}{2}, -\frac{25}{4})$, а једначина траженог скупа је $y = x^2 + 3x - 4$.

За додатну наставу:

1. Између свих троуглова са истом страницом c и истим обимом $2S$, наћи онај који има највећу површину.

   Решење: Нека су странице троуглова $c, x, 2S - c - x$. Површина троугла је $P = \sqrt{S(S-c)(S-x)(S-c+x)}$. Површина је максимална када је израз $(S-x)(S-c+x)$ максималан. Нека је $f(x) = (S-x)(S-c+x)$. Функција f достиже максимум када је $x = -\dfrac{2S-c}{-2} = S - \dfrac{c}{2}$, па су странице троугла $c, S - \dfrac{c}{2}, S - \dfrac{c}{2}$.

2. Корени једначине $x^2 + ax + b + 1 = 0$ су природни бројеви. Доказати да је $a^2 + b^2$ сложен број.

   Решење: $x_1 + x_2 = -a$, $x_1x_2 = b + 1$.

$$a^2 + b^2 = (x_1 + x_2)^2 + (x_1x_1 - 1)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_1^2x_2^2 + 1 = (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1),$$

   а ово је сложен број, јер су оба фактора природни бројеви већи од 1.

3. Доказати да квадратна једначина чији су коефицијенти непарни бројеви нема рационалних решења.

   Решење: Нека је то једначина $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$ и непарни су.
   Нека једначина има рационално решење $\frac{p}{q}$, где су p и q узајамно прости бројеви и $q \neq 0$. Следи да је бар један од тих бројева непаран.

$$a\left(\frac{p}{q}\right)^2 + b\frac{p}{q} + c = 0 \quad \text{тј.} \quad ap^2 + bpq + cq^2 = 0.$$

   Нека је p паран, а q непаран број. Тада је p^2 паран број, па је и ap^2 паран број. Паран је и bpq, па је зато паран и $ap^2 + bpq$. Број cq^2 је непаран због претпоставке, па смо дошли до контрадикције.

   На исти начин се доказују и случајеви када је p непаран, а q паран, када су оба броја непарна, итд.

4. Наћи потребне и довољне услове да решења једначине $x^2 + px + q = 0$ буду облика $\sin\alpha, \cos\alpha$.

   Решење: Нека је $x_1 = \cos\alpha$, $x_2 = \sin\alpha$.

$$\Rightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow D = p^2 - 4q \geq 0$$
$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 1 \Rightarrow p^2 - 2q = 1.$$

   Дакле,

$$(p^2 - 4q \geq 0 \wedge p^2 - 2q = 1) \Leftrightarrow (p^2 - 4\frac{p^2 - 1}{2} \geq 0 \wedge p^2 - 2q = 1) \Leftrightarrow p^2 \leq 2 \wedge p^2 - 2q = 1.$$

   Из $x_1^2 + x_2^2 = 1$ доказује се да су ови услови и довољни.

5. Одредити геометријско место темена кривих $y = (x - \sin\alpha)^2$, $(\alpha \in \mathbb{R})$.

   Решење: То је дуж чији су крајеви $(-1, 0)$ и $(1, 0)$.