



Ово предавање је део програма популаризације науке "Жива математика" коју подржавају Центар за промоцију науке, Друштво математичара Србије и Математички институт САНУ. Једно је од првих активности "Serbian Cinderella Team"-а чија је идеја да се овај софтвер популарише у настави математике у Србији и његовој научној примени. Чланови овога тима су и неки ученици Математичке гимназије у Београду и Прве крагујевачке гимназије, а циљ је да се слични клубови оформе по целој Србији и настава геометрије подигне на квалитетно виши ниво.

Садржај

1	Увод	2
2	Алгебарске криве	4
2.1	Равне алгебарске криве	4
2.1.1	Комплексне пројективне криве	8
3	Конике	10
3.1	Метричка класификација коника	10
4	Паскалова теорема	14
5	Безуова теорема	16
6	Примене Безуове теореме	18
6.1	Папосова теорема	19
6.2	Паскалова теорема	20
6.2.1	Дегенерисани случајеви	22
6.3	Мистични осмоугао	24
6.3.1	Паскалова конфигурација	24
6.3.2	Папосова конфигурација	24
6.4	Мистични $2n$ -тоуглови	25
	Литература	27

1

Увод

О математици и њеној улози у развоју човечанства је пуно тога речено и написано. Слично је са уметношћу. За математику се каже да је уметност људског ума. Шта је заједничко за математику и уметност? Обе ствара човек. Уметност изазива осећај лепог у човеку, али ово осећање није лако описати, јер свако од нас има сопствени доживљај лепог. Тако ће се математичари (а и многи други) сложити да у математици има много тога што је лепо, али не надахњују исте ствари сваког математичара на исти начин. У овом раду ће се приказати тврђења за која ћемо се вероватно сви сложити да су најпре лепа и тајанствена, а потом и видети да су и данас велика покретачка снага у математици.

Математика се развија од када и људски род. Геометрија као прва практична примена математичких знања била је развијена и код древних цивилизација. Са њом је се развијала и алгебра. Еуклидови *Елементи* били су круна геометријског знања антике. Арабљани су та знања сачували и обогатили, да бих и западна цивилизација поново открила у доба ренесансе. Од тада може се рећи траје непрекидна математичка револуција. Рене Декарт је увођењем координатног система спојио алгебру и геометрију и далекосежно повезао визуелно и апстрактно. Геометрија коју обично везујемо за визуелне објекте као што су тачке праве, кругови, ... постаје дубља и слободнија, док алгебра повезујући се са геометријом више није статична већ динамична математичка дисциплина. Математика се развијала тако да већ у XX веку постоји много математичких дисциплина које имају своје објекте и технике изучавања које се некада чине доста удаљени једни од других. Међутим овакав развој математике никада није нарушио њено јединство као науке, јер се математичке идеје преплићу на неочекиване и изненађујуће начине. Тако и овде желимо да говоримо о преплитању и повезаности две фундаменталне математичке теорије геометрије и полинома.

Геометрија је свој најбржи развој имала у XIX веку. Покушаји да се докаже пети Еуклидов постулат довели су до стварања нових геометрија, која су изменила и интуицију коју је свет до тада имао о геометрији. Појавиле су се хиперболичка и пројективна геометрија. У пројективних геометрији не постоје паралелне праве, а омогућава нам једну прозачнију слику о тврђењима за које се знало да важе и у еуклидској геометрији као што су Паскалова, Дезаргова, Бријаншонова и Папосова теорема. Класична пројективна геометрија је свој врхунац достигла са доказом Понселеове теореме, али развој геометрији није ту стао.

Алгебра и алгебарске структуре су постале језик којим коминира наука. Хилберт је и геометрију поставио на алгебарске основе. Богатство алгебарских структура и оно што су оне пружиле математици, учинило је да су нам многи алгебарски објекти постали природни и блиски. Такви су полиноми. Не постоји математичка дисциплина која није на директан или индиректан начин заинтересована за полиноме. Тако и

геометрија. На овај начин је се родила једна од најизазовнијих грана математике - алгебарска геометрија. У овој области је урађено много, али и данас је много отворених питања у алгебарској на које покушавају да реше математичари, па је ово сигурно од једна од дисциплина која ће се активно развијати у XXI веку.

Овде ћемо говорити о нечему што слободно можемо назвати елементарном алгебарском геометријом. Најпре ћемо дефинисати равне алгебарске криве, са акцентом на конике и кубике као објекте са којим се срећемо и током гимназијског образовања. Затим ћемо показати теорему која је последица чувене Безуове теореме. Применом ове теореме доказаћемо класичне Папосове и Паскалове теореме за мистичне шестоуглове уписане у конике. Доказаћемо неке познате и неколико нових резултата за мистичне осмоуглове.

Ово је кратак преглед дела предавања ”Пепељуга и магични свет коника” чија је намера превасходно да се учесници семинара упознају са једним другачијим погледом на ове важне објекте. Теорема које смо доказивали на семинару су најпре провераване и откриване помоћу специјализованог софтвера Cinderella. Циљ нам је да покажемо да користећи овај софтвер, наставу геометрије у нашим школама и факултетима можемо подићи на виши ниво. Овим предавањем желимо и да популаришемо неке важне геометријске теореме, као што су Паскалова, Бријаншонова и друге и акценту који је у нашим школама постављен на нека израчунавања и манипулације ”удахнемо” геометријску душу.

Идеја за ово предавање је рођена из матурског рада ”Где се састају геометрија и полиноми?” матуранта Игора Спасојевића, а сада студента на Кембриџу. Из овог рада је настао научни рад Ђ. Baralić and I. Spasojević, *Illumination of Pascal's Hexagrammum and Octagrammum Mysticum*, arXiv:1209.4795v2. Од велике помоћи у настајању овог рада био је и програмски пакет Cinderella који је развио Jürgen Richter-Gebert један од данас водећих немачких математичара. Ова тема је веома актуелна данас и њом се баве неки од светских познатих математичара, као што је S. Tabachnikov, L. Evans, G. Katz, R. Swartz и други. Недавно је изашла и књига Roberta Vix, *Conics and cubics: an elementary introduction to the algebraic geometry* Конике и кубике: елементаран увод у алгебарску геометрију која показује да ова елементарна прича и те како привлачи пажњу научне јавности.



Jürgen Richter-Gebert



Robert Vix

Где се састају геометрија и полиноми? Тамо где почиње једна лепа и још недовољно истражена математика.

2

Алгебарске криве

2.1 Равне алгебарске криве

У овом делу ћемо се упознати са реалним и комплексним алгебарским кривама.

Дефиниција 2.1.1. *Реална алгебарска крива C* је подскуп од $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ који је геометријско место тачака нула полинома две променљиве $P(x, y)$ са реалним коефицијентима, тј.

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid P(x, y) = 0\}.$$

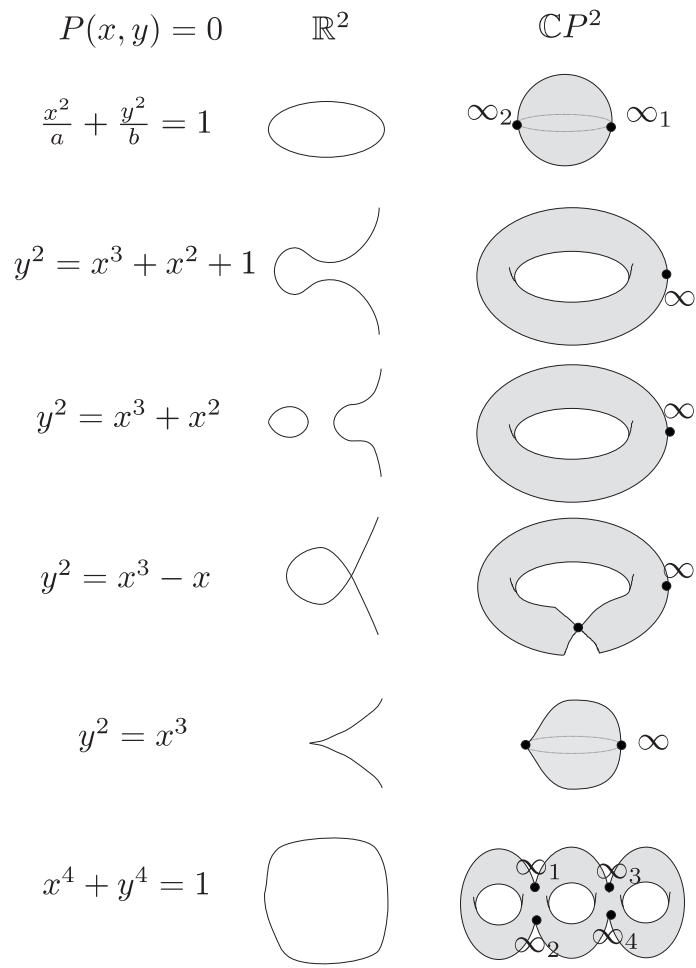
Дефиниција 2.1.2. *Комплексна алгебарска крива C* је подскуп од $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ који је геометријско место тачака нула полинома две променљиве $P(x, y)$ са комплексним коефицијентима, тј.

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid P(x, y) = 0\}.$$

На очигледан начин се свакој реалној алгебарској кривој може придружити комплексна алгебарска крива. Реалне алгебарске криве су изучаване хиљаду година раније него што су комплексне алгебарске криве признате као математички објекат иако када су се појавиле постало је јасно да су оне и једноставније и интересантније за проучавање. На пример много је лакше полином са реалним коефицијентима посматрати као полином са комплексним коефицијентима јер се у \mathbb{C} сваки полином факторише и једноставније је узети само реалне нуле и одбацити остале. Комплексне алгебарске криве се могу проучавати са становишта неколико математичких дисциплина од којих се издвајају алгебра, топологија и комплексна анализа.

Реалне алгебарске криве су проучавали у старој Грчкој. Они нису знали за једначине круга, параболе, елипсе, хиперболе, али су познавали ове објекте као геометријска места тачака. Нпр. елипса је геометријско место тачака чији је збир растојања од две унапред задане тачке које називамо жижамa константан. Праве и кругове је могуће конструисати помоћу шестара и лењира, док остале криве другог реда није могуће. Стари Грци су решавајући проблеме дуплирања коцке и трисекције угла конструисали инструменте којима су конструисали параболе, јер се учили да се ови проблеми могу решити конструисањем ових кривих. Тек са развитком теорије Галоа много година касније доказано је да су ове конструкције не могу решити помоћу шестара и лењира.

Пример 2.1.1. На слици 2.1 ћемо приказати неколико алгебарских криви са њиховим једначинама и одговарајућом сликом као реалном односно комплексном кривом. Сlike комплексне криве заправо живе у пројективном простору $\mathbb{C}P^2$ о коме ћемо нешто касније детаљније говорити.



Слика 2.1.

Стари Грци су познавали и друге алгебарске криве као епицикличне криве којима су описиване путање планета пре открића Кеплерових закона. Западна Европа је ова знања поново открила у ренесансном добу када су откривене и нове алгебарске криве. Леонардо да Винчи се посебно интересовао за њих проучавајући перспективу тродимензионалних облика. Античка знања западни свет је преузео од Арабљана који су имали развијен алгебарски запис математике, што је условило каснији убрзан развој математике.

Крајем XVII века, математичари су овладали идејама Декарта и Фермаа да се геометријска места тачака описују као решења једне или више једначина две променљиве по x и y . Развој диференцијалног рачуна и његова примена на алгебарске криве довела је до нових сазнања о овим објектима. Знања о алгебарске криве су се појавиле као конкретна примена математике у многим другим проблемима.

Различити облици алгебарских кривих заинтересовало је математичаре као што су Њутн за сингуларитете алгебарских кривих. Сингуларитети су тачке у којима сликовито речено крива доживљава дегенерацију тј. не изгледа "глатко". На слици 2.1 се могу уочити тачке у којима крива одступа од свог стандардног облика, где се учворава или постаје оштра. Те тачке су сингуларне и у њима долази до деформације криве, које је важно разумети.

Дефиниција 2.1.3. Тачка $(x, y) \in C$ алгебарске криве C дефинисане полиномском једначином $P(x, y) = 0$ је *сингуларна (сингуларитет)* уколико је

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Изучавање сингуларитета алгебарских криви је посебна област - теорија сингуларитета која има велику примену у многим областима као што је теорија чворова, топологија, комплексна анализа и др.

Како реалне алгебарске криве могу бити јако дегенерисане као нпр. крива

$$x^2 + y^2 = 0$$

која је само тачка $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ и

$$x^2 + y^2 = -1$$

која представља празан скуп у \mathbb{R}^2 дошло је до идеје да се уместо реалних посматрају комплексна решења једначине $P(x, y) = 0$. Криве се у \mathbb{C}^2 много "боље" понашају, јер крива $x^2 + y^2 = 0$ представља пар комплексних правих које се секу док је крива $x^2 + y^2 = -1$ комплексна кружница.

У XIX веку се уочило да додавањем одговарајућих "тачака у бесконачности" алгебарске криве постају компактни тополошки простори. Тако се и дошло и на идеју да се криве посматрају у пројективним просторима. На компактним просторима је могуће дефинисати мероморфне и холоморфне функције па је се на комплексне алгебарске криве могла применити и комплексна анализа на \mathbb{C} . Одавде се развила теорија Риманових површи, које су назване по Берхарду Риману (1826-1866). Риман је био изузетан математичар XIX века који је много утицао на идеје да геометрија не треба изучавати само еуклидске просторе, већ и много генералније просторе.

Дедекин и Вебер су 1882. показали да већи део теорије алгебарских кривих остаје на снази и над било којим пољем \mathbb{F} , тј. криве се више не проучавају само над пољима комплексних и реалних бројева. Тако нпр. у решавању диофантове једначине

$$P(x, y) = 0$$

у теорији бројева често се посматра ова једначина по $\text{mod } p$ где је p прост број. Али ово није ништа друго до посматрање алгебарске криве над пољем $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ или његовим алгебарским затворењем. Ова дубока веза између алгебарских кривих и теорије бројева послужила је и Ендрију Вајлсу у доказу чувене Велике Фермаове теореме да једначина

$$x^n + y^n = z^n$$

нема целобројна решења у скупу природних бројева када је $n \geq 3$.

Данас доста знамо о алгебарским кривама. *Алгебарски варијетети* су дефинисани као скупови заједничких нула коначног броја полинома у коначно много променљивих и изучавање ових објеката довело је до нових идеја и рађање једне нове математичке дисциплине - *алгебарске геометрије*.

Природно је поставити питање када две алгебарске криве дефинишу исти геометријски скуп тачака. За полином кажемо да је иредуцибилан ако се не може записати као производ два полинома који су оба различита од константе. Одговор на то питање даље чувени Хилбертов Нулштележац.

Теорема 2.1.1 (Хилбертов Нулштеленжац). $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ су полиноми *и* *такви* да је

$$\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid P(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid Q(x, y) = 0\}$$

ако и само ако *и* *такви* *је* природни бројеви m и n *и* *такви* да $P \mid Q^m$ и $Q \mid P^n$ *и* *такви* *је* *ако и само ако* P и Q имају исте иредуцибилне факторе.

За полином $P(x, y)$ кажемо да има дупли фактор ако постоји $Q(x, y)$ такав да $(Q(x, y))^2 \mid P(x, y)$. За полиноме који не поседују дупле факторе из Хилбертовог Нулштележаца следи:

Последица 1. Полиноми $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ који немају дупле факторе дефинишу исту комплексну алгебарску криву у \mathbb{C}^2 ако и само ако су скаларни множиоци један другог $\bar{\lambda}j$.

$$P(x, y) = \lambda Q(x, y)$$

за неки скалар $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Дефиниција 2.1.4. Степен d алгебарске криве \mathcal{C} је степен одговарајућег полинома $P(x, y)$ по x и y који је дефинише тачније степен највећег монома у полиному $P(x, y)$ тј.

$$d = \max \{i + j \mid a_{i,j} \neq 0\},$$

где је $P(x, y) = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j$.

Дефиниција 2.1.5. Алгебарска крива степена 1 се назива *права* тј. то је крива дефинисана једначином

$$ax + by + c = 0,$$

за неке комплексне коефицијенте a, b и c и где је бар један од коефицијената a и b различит од 0.

Праве су наједноставније алгебарске криве. Постоје алгебарске криве виших степена које су унија више правих. Описаћемо неке од њих.

Дефиниција 2.1.6. Полином $P(x_1, \dots, x_n)$ степена d у n променљивих је *хомоген* уколико је за сваки скалар λ

$$P(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d P(x_1, \dots, x_n)$$

или еквивалентно ако је $P(x_1, \dots, x_n)$ облика

$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1 + \dots + i_n = d} a_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}.$$

Сваки фактор хомогеног полинома је такође хомоген полином. Хомогени полиноми у две променљиве се факторишу на линеарне факторе што показује следећа теорема.

Теорема 2.1.2. Нека је $P(x, y)$ хомоген ненулни полином степена d , тада се он факторише на производ линеарних полинома тј.

$$P(x, y) = \prod_{i=1}^d (\alpha_i x + \beta_i y)$$

за неке константе $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}$.

Доказ. Запишимо

$$P(x, y) = \sum_{r=0}^d a_r x^r y^{d-r} = y^d \sum_{r=0}^d a_r \left(\frac{x}{y}\right)^r$$

где су $a_0, a_1, \dots, a_d \in \mathbb{C}$. Тада је

$$\sum_{r=0}^d a_r \left(\frac{x}{y}\right)^r$$

полином са комплексним коефицијентима једне променљиве $\frac{x}{y}$ који се по основном ставу алгебре потпуно раставља над \mathbb{C} тј.

$$\sum_{r=0}^d a_r \left(\frac{x^r}{y^r}\right) = c \prod_{i=1}^d \left(\frac{x}{y} - \gamma_i\right)$$

за неке $c, \gamma_1, \dots, \gamma_d \in \mathbb{C}$. Сада је

$$\begin{aligned} P(x, y) &= y^d \sum_{r=0}^d a_r \left(\frac{x}{y}\right)^r = \\ &= y^d c \prod_{i=1}^d \left(\frac{x}{y} - \gamma_i\right) = \\ &= c \prod_{i=1}^d (x - \gamma_i y) \quad , \end{aligned}$$

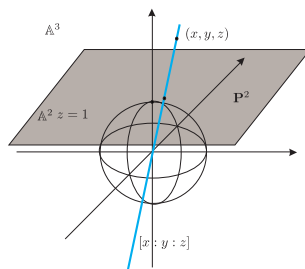
одакле следи тврђење. □

2.1.1 Комплексне пројективне криве

Комплексне алгебарске криве у \mathbb{C}^2 називамо афиним, како би их разликовали од пројективних алгебарских кривих. У овом делу ћемо се упознати са пројективним простором, пројективним алгебарским кривама, као и везом између афиних и пројективних кривих.

Дефиниција 2.1.7. Нека је дат афин простор \mathbb{A} . *Пројективни простор* $P\mathbb{A}$ је количник простор $\mathbb{A} \setminus \{O\} / \sim$ са количничком топологијом и \sim је релација еквиваленција на $\mathbb{A} \setminus \{O\}$ дефинисана са $x \sim y \Leftrightarrow x = \lambda y$ за неки ненула скалар λ .

Нас специјално интересују реални $\mathbb{R}P^2$ и комплексни пројективни простор $\mathbb{C}P^2$, које ћемо оба зависно од контекста означавати \mathbf{P}^2 . Ове просторе респективно називамо реална и комплексна пројективна равна. Они настају када се пројективизују као у дефиницији 2.1.7 простори \mathbb{R}^3 и \mathbb{C}^3 . Пројективни простор није лако визуелизовати. Он локално изгледа као \mathbb{R}^2 односно \mathbb{C}^2 . Тачке пројективног простора \mathbf{P}^2 су класе еквиваленције уређених тројки (x, y, z) различитих од $(0, 0, 0)$, при чему су две тројке $(x, y, z), (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{A} \setminus \{(0, 0, 0)\}$ еквивалентне $(x, y, z) \sim (x_1, y_1, z_1)$ ако и само ако је $x_1 = \lambda x, y_1 = \lambda y, z_1 = \lambda z$, где је λ ненула скалар, и ту класу еквиваленције обележавамо са $[x : y : z]$ *хомогене координате*. Геометријски гледано, $[x : y : z]$ је права кроз координатни почетак и тачку $(x, y, z) \in \mathbb{A}^3$. Увођење пројективне равни поједностављује питање пресека алгебарских, јер за разлику од равни \mathbb{A}^2 , у \mathbf{P}^2 се сваке две праве секу. У \mathbf{P}^2 се може уочити скуп тачака $\{[x : y : 1] | x, y \in \mathbb{A}\}$



Слика 2.2.

који је хомеоморфан са \mathbb{A}^2 . У овом скупу се налазе скоро све тачке \mathbf{P}^2 сем тачака $\{[x : 1 : 0] | x \in \mathbb{A}\} \cup \{[1 : 0 : 0]\}$. Зато је пројективан простор \mathbf{P}^2 локално као \mathbb{R}^2 односно \mathbb{C}^2 , тј. то су обични \mathbb{R}^2 и \mathbb{C}^2 коме су додате ”бесконечно далеке” тачке које

леже на једној правој. Интуитивно то је права на којој се налазе пресеци паралелних правих. Због ове повезаности између обичне и пројективне равни сва пројективна тврђења која су тачна у пројективној равни важе и у еуклидском случају.

Сада ћемо показати шта је равна алгебарска крива у \mathbf{P}^2 . Уколико је равна алгебарска крива \mathcal{C} у \mathbb{C}^2 (\mathbb{R}^2) задата полиномом $P(x, y) = 0$ степена d , тада је њој одговарајућа пројективна алгебарска крива $\bar{\mathcal{C}}$ задата хомогеним полиномом $\bar{P}(x, y, z) = z^d \cdot P(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$.

Дефиниција 2.1.8. *Пројективна алгебарска крива $\bar{\mathcal{C}}$ у комплексној равни $\mathbb{C}P^2$ ($\mathbb{C}P^2$) је скуп тачака чије хомогене координате представљају нуле хомогеног полинома $\bar{P}(x, y, z)$, тј.*

$$\bar{\mathcal{C}} = \{([x, y, z] \in \mathbb{C}P^2 \mid \bar{P}(x, y, z) = 0, \bar{P}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^d \bar{P}(x, y, z), \lambda \in \mathbb{C})\}.$$

Степен пројективне алгебарске криве је као и код афине криве степен полинома који је дефинише.

Уколико нам је дата пројективна алгебарска крива $\bar{\mathcal{C}}$, а интересује нас њена афина слика \mathcal{C} , добићемо једноставно тако што погледамо у \mathbb{C}^2 (\mathbb{R}^2) скуп тачака $P(x, y) = \bar{P}(x, y, 1) = 0$. Афина и пројективна слика јединствено одређују једна другу.

Пример 2.1.2. Праве у пројективном простору имају једначину

$$ax + by + cz = 0.$$

У пројективној равни се сваке две праве секу у тачно једној тачки. Пројективан простор много погоднији за проучавање алгебарских кривих. Пројективна геометрија је једна лепа математичка теорија која је доста дала математици и њеном развоју.

3

Конике

3.1 Метричка класификација коника

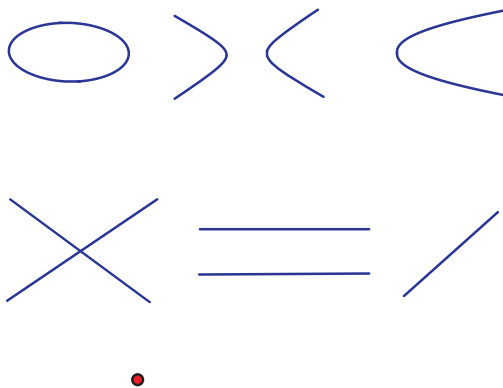
Дефиниција 3.1.1. Алгебарска крива степена 2 назива се *коника*.

Коника C је геометријско место тачака нула полинома другог степена у две променљиве $P(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f$. У зависности од контекста, у даљем тексту ћемо се користити појмом коника или као геометријским местом тачака или као полиномом који дефинише ту конику.

Коника као скуп тачака у равни нам је добро познат. То су геометријски објекти који су нама познати као елипсе, хиперболе, параболе, парови правих који се секу, парови паралелних правих, праве (дупле), тачке и празни скупови. Ови скупови тачака се доста разликују као што се види на слици 3.1, па се поставља питање који скуп тачака представља коника задана једначином

$$P(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0. \quad (3.1)$$

Не губећи на општости можемо претпоставити да је $a \geq 0$.



Слика 3.1.

Теорема 3.1.1 (Метричка класификација коника). Нека је коника C задана једначином (3.1).

1. Ако је $ac - b^2 \neq 0$ коника је изометрична некој од крива: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ (елипса), $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ (хипербола), $\frac{x^2}{\alpha^2} = \frac{y^2}{\beta^2}$ (пар правих који се секу), тачки или празном скупу.

2. Ако је $ac - b^2 = 0$ ($a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$) коника је изометрична некој од крива: $x^2 = 2py$ (парабола), $y^2 = c^2$ (пар паралелних правах), $y^2 = 0$ (дужиој линији) или празном скупу.

Доказ. 1. Применимо translацију $x' = x + m, y' = y + n$, и заменом у (3.1) добијемо

$$-f = a(x' - m)^2 + 2b(x' - m)(y' - n) + c(y' - n)^2 + 2(x' - m) + 2(y' - n) =$$

$$ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2 + 2(-am - bn + d)x' + 2(-bm - cn + e)y' + P(m, n) - f - 2(dm + en).$$

Решавањем система $am + bn = d, bm + cn = e$ по m и n (који због детерминанте овог система $ac - b^2 \neq 0$ има решења), и стављајући

$$g = 2(dm + en) - P(m, n),$$

редукујемо једначину конике на

$$ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2 = g.$$

Ако је $b = 0$ тада тврђење директно следи. Уколико је $b \neq 0$ ротирајмо цео систем за φ и добијемо нове променљиве

$$x = \tilde{x} \cos \varphi + \tilde{y} \sin \varphi, y = -\tilde{x} \sin \varphi + \tilde{y} \cos \varphi.$$

Једначине конике у новим променљивима сада изгледа

$$g = x^2(a \cos^2 \varphi - 2b \cos \varphi \sin \varphi + c \sin^2 \varphi) +$$

$$xy(a \cdot 2 \sin \varphi \cos \varphi + 2b(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) - c \cdot 2 \cos \varphi \sin \varphi) +$$

$$y^2(a \sin^2 \varphi + 2b \sin \varphi \cos \varphi + c \cos^2 \varphi).$$

Уколико изаберемо да φ буде такво да је

$$\frac{(a - c)}{2b} = -\operatorname{ctg} 2\varphi,$$

и средимо једначину доводимо је на облик

$$\frac{x^2}{\alpha^2} \pm \frac{y^2}{\beta^2} = \theta,$$

где је θ једнако 0 или 1. Одавде следи први део тврђења.

Докажимо део под 2. По претпоставци је $ac = b^2$. Ако је $b = 0$ можемо претпоставити да је $a = 0$ па се (3.1) редукује на

$$cy^2 + 2dx + 2ey = f$$

која се одговарајућом изометријом лако доводи на тражени облик. Ако је $b \neq 0$ можемо претпоставити да су $a, c > 0$. Применимо ротацију за угао φ такав да је

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{a}{c}}.$$

Нове координате су

$$x = \tilde{x} \cos \varphi - \tilde{y} \sin \varphi, y = \tilde{x} \sin \varphi + \tilde{y} \cos \varphi.$$

Заменом у једначину конике због избора φ коефицијент уз \tilde{x}^2 ће бити 0 и после малог рачуна једначина се сведе на тражени облик. \square

Коника је *недегенерисана* уколико је елипса, хипербола или парабола. Уколико је пар правих које се секу, пар паралелних правих или дупла права за конику кажемо да је *дегенерисана*.

Из доказа дела 1. теореме 3.1.1 добијамо да је коника C пар правих које се секу ако и само ако систем

$$\begin{aligned} am + bn &= d, \\ bm + cn &= e, \\ dm + en &= f \end{aligned}$$

има ненулта решења. Из доказа дела под 2. следи да се дегенерисани случај добија ако и само ако је $\frac{d}{\sqrt{a}} = \frac{e}{\sqrt{c}}$ (уз услов да је $ac = b^2$). У оба случаја добијамо да је детерминанта

$$\det \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0,$$

што је дакле потребан и довољан услов да коника буде дегенерисана.

Теорема 3.1.2. *За 5 тачака у општем положају постоји јединствена коника C која их садржи.*

Доказ. Без умањења општости, поставимо целу конфигурацију ураван у којој је уведен координатни систем xOy . Применимо афину трансформацију промене координата тако да један пар од тих пет тачака лежи на x -оси, а неки други пар на y -оси. Конкретно, наша афина трансформација треба да слика 5 датих тачака A, B, C, D и E на следећи начин:

$$\begin{aligned} A(x_A, y_A) &\mapsto A_1(0, y_{A_1}), \\ B(x_B, y_B) &\mapsto B_1(0, y_{B_1}), \\ C(x_C, y_C) &\mapsto C_1(x_{C_1}, 0), \\ D(x_D, y_D) &\mapsto D_1(x_{D_1}, 0), \\ E(x_E, y_E) &\mapsto E_1(x_{E_1}, y_{E_1}). \end{aligned}$$

При афиним трансформацијама се полином степена 2 преводи у полином степена 2 у новим координатама. Одатле следи да се наша коника C слика у конику $C_1(x, y) = a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1$. Коефицијенти полинома C_1 можемо сада одредити на основу следећих једначина:

$$Q(A_1) = 0 \Rightarrow c_1y_{A_1}^2 + e_1y_{A_1} + f_1 = 0,$$

$$Q(B_1) = 0 \Rightarrow c_1y_{B_1}^2 + e_1y_{B_1} + f_1 = 0,$$

$$Q(C_1) = 0 \Rightarrow a_1x_{C_1}^2 + d_1x_{C_1} + f_1 = 0,$$

$$Q(D_1) = 0 \Rightarrow a_1x_{D_1}^2 + d_1x_{D_1} + f_1 = 0,$$

$$Q(E_1) = 0 \Rightarrow a_1x_{E_1}^2 + b_1x_{E_1}y_{E_1} + c_1y_{E_1}^2 + d_1x_{E_1} + e_1y_{E_1} + f_1 = 0.$$

Ових 5 једначина су независне, с обзиром да су прве две независне (Вандермондова детерминанта је различита од 0); друге две по аналогији; првих четири јер немају заједничку непознату и најзад, трећа је једина у којој се јавља непозната b_1 . Тиме се

гарантује да горњи систем има решење димензије један, тј. сви могући полиноми C_1 су исти до на множење скаларом, а геометријски C_1 и λC_1 одређују јединствену конику.

Пошто је афино пресликавање бијективно, из афине трансформације инверзне почетној, и коефицијената полинома $C_1(x, y)$, ми можемо одредити коефицијенте почетног полинома $C(x, y)$ који се анулира у тачкама A, B, C, D и E , чиме је тврђење доказано. \square

Теорема 3.13. *Свака недегенерисана иј. иредуцибилна коника C која пролази кроз четвори даје тачке A, B, C и D се може представити у облику*

$$C = \lambda l_{AB}l_{CD} + \mu l_{AC}l_{BD},$$

при чему се са l_{XY} означава права која пролази кроз тачке X и Y иј. полином две променљиве степена један који се анулира на свим тачкама праве XY .

Доказ. Нека је X тачка конике C , која се не налази на правама AB, CD, AC или BD (таква тачка постоји из иредуцибилности посматране криве). Тада је $l_{AB}(X), l_{CD}(X), l_{AC}(X), l_{BD}(X) \neq 0$ одакле следи да постоје λ и μ такви да је

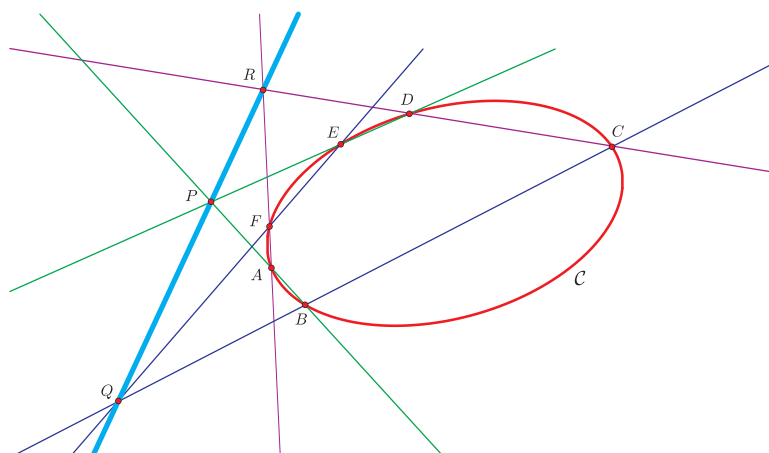
$$\lambda l_{AB}(X) \cdot l_{CD}(X) + \mu l_{AC}(X) \cdot l_{BD}(X) = 0.$$

Нека је сада $C_1 = \lambda l_{AB}l_{CD} + \mu l_{AC}l_{BD}$. На основу избора λ и μ следи да је $C_1(A) = 0, C_1(B) = 0, C_1(C) = 0, C_1(D) = 0$ и $C_1(X) = 0$. На основу теореме 3.1.2 постоји јединствена коника која пролази кроз тачке A, B, C, D и X , одакле је до на множење скаларом $C \equiv C_1$, чиме је тврђење доказано. \square

4

Паскалова теорема

Теорема 4.0.4 (Паскалова теорема). Нека је дајна коника \mathcal{C} , и тачке A, B, C, D, E и F на њој. Тада су пресеци правих AB и DE , BC и EF , AC и DF колинеарни.



Слика 4.1.

Доказ. На основу теореме 3.1.3 постоје скалари $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2$ и μ_3 такви да је:

$$\mathcal{C} = \lambda_1 l_{AB} l_{CD} + \mu_1 l_{BC} l_{AD}, \quad (4.1)$$

$$\mathcal{C} = \lambda_2 l_{AF} l_{ED} + \mu_2 l_{AD} l_{EF}, \quad (4.2)$$

$$\mathcal{C} = \lambda_3 l_{BE} l_{CF} + \mu_3 l_{BC} l_{EF}. \quad (4.3)$$

Из (4.1) и (4.2) добијамо:

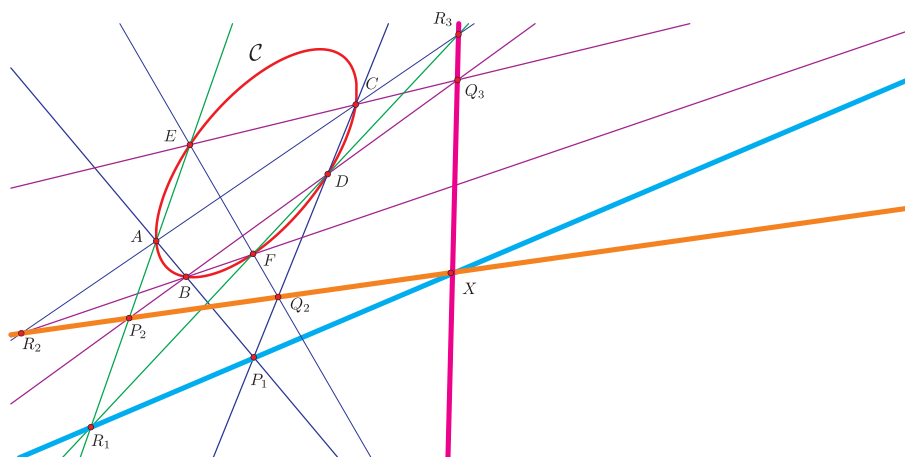
$$\lambda_1 l_{AB} l_{CD} - \lambda_2 l_{AF} \cdot l_{ED} = (\mu_2 l_{EF} - \mu_1 l_{BC}) \cdot l_{AD}. \quad (*)$$

Даље, нека је P тачка пресека правих AB и DE . Тада имамо да је $l_{AB}(P) = 0$ и $l_{ED}(P) = 0$. Замењујући тачку P , тј. њену x и y координату у полиномску једначину $(*)$ добијамо $(\mu_2 l_{EF}(P) - \mu_1 l_{BC}(P)) \cdot l_{AD}(P) = 0$. С обзиром да P не припада l_{AD} то мора бити $(\mu_2 l_{EF}(P) - \mu_1 l_{BC}(P)) = 0$ тј. да P лежи на правој $\mu_2 l_{EF} - \mu_1 l_{BC}$. Слично се добија и да пресек правих CD и AF лежи на $\mu_2 l_{EF} - \mu_1 l_{BC}$, док за пресек BC и EF тврђење очигледно важи. Тиме је теорема доказана. \square

Ноћацијска најомена: ово је права добијена применом Паскалове теореме на шестоиугао $ABCDEF$.

Теорема 4.0.5. Три праве формиране применом Паскалове теореме на шестипоузловој $ABFDCE$, $AEFBDC$ и $ABDFEC$ уписане у недегенерисану конику C се секу у једној тачки.

Доказ. Из (4.2) и (4.3), као у доказу Паскалове теореме, добијамо да тачке пресека правих AF и BE , ED и CF , AD и BC леже на правој $\mu_2 l_{AD} = \mu_3 l_{BC}$. Слично, из (4.1) и (4.2) следи да тачке пресека правих AB и CF , CD и BE , AD и EF све леже на правој $\mu_1 l_{AD} = \mu_3 l_{EF}$. Сада, остаје да се докаже да се праве $\mu_1 l_{BC} = \mu_2 l_{EF}$, $\mu_2 l_{AD} = \mu_3 l_{BC}$ и $\mu_1 l_{AD} = \mu_3 l_{AF}$ секу у једној тачки.



Слика 4.2.

Међутим, ако се прве две праве секу у тачки Y , онда је $\mu_1 l_{BC}(Y) = \mu_2 l_{EF}(Y)$ и $\mu_2 l_{AD}(Y) = \mu_3 l_{BC}(Y)$ тако да је $\mu_1 \mu_2 l_{AD}(Y) = \mu_1 \mu_3 l_{BC}(Y) = \mu_2 \mu_3 l_{EF}(Y)$, одакле закључујемо да је

$$\mu_1 l_{AD}(Y) = \mu_3 l_{EF}(Y),$$

јер су због претпоставке о неденерисаности конике C сви коефицијенти $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \lambda_1, \lambda_2$ и λ_3 различити од 0. Овим смо доказали да Y припада трећој правој. \square

5

Безуова теорема

Безуова теорема је суштински прво била истакнута од стране Исака Њутна у доказу 28. леме првог тома своје књиге *Principia*, где тврди да је број заједничких тачака две алгебарске криве једнак производу њихових степена. Ова теорема је касније објављена 1779. у Étienne Bézout-овој *Théorie générale des équations algébrique*. Безу, који није имао на свом располагању модерну алгебарску нотацију за једначине са више променљивих, је дао доказ заснован на манипулацији гломазних алгебарских израза. Са модерне тачке гледишта, његова обрада овог материјала је била хеуристичка, јер није прецизно формулисао услове под којим теорема важи. У ту сврху, започећемо овај део дефиницијом *мултиплициитета пресека*, тачније само трансверзалног пресека.

Дефиниција 5.0.2. Ако је P заједничка тачка две равне алгебарске криве \mathcal{X} и \mathcal{Y} која је несингуларна (нису сви парцијални изводи у тој тачки једнаки 0) за обе криве, и штавише тангентне праве на \mathcal{X} и \mathcal{Y} у P су различите, онда је мултиплицитет пресека 1 и ово се назива *трансверзални пресек*. Ако криве \mathcal{X} и \mathcal{Y} имају заједничку тангенту у P , тада је овај пресек мултиплицитета барем 2. Интуитивно, то је степен поклапања кривих \mathcal{X} и \mathcal{Y} у тачки P .

Сада наводимо Безуову теорему у пуној генералности, без доказа. Ова теорема је класичан резултат теорије алгебарских кривих.

Теорема 5.0.6 (Безуова теорема). *Нека су \mathcal{X} и \mathcal{Y} две пројективне криве дефинисане над пољем \mathbb{F} које немају заједничку компоненту (овај услов важи ако су \mathcal{X} и \mathcal{Y} дефинисане различитим иредуцибилним полиномима). Тада је укупан број тачака пресека \mathcal{X} и \mathcal{Y} са координатама у алгебарски затвореном пољу \mathbb{E} које садржи \mathbb{F} , рачунајући мултиплициците, једнак производу степена \mathcal{X} и \mathcal{Y} .*

Сада, наводимо једну последицу Безуове теореме, специјалан случај Безуове теореме. Њен специјалан случај је теорема о кубикама, која је толико обилато искоришћена у овом раду.

Последица 2. *Нека две пројективне криве \mathcal{C} и \mathcal{D} у \mathbf{P}^2 имају тачно n^2 тачака пресека и нека m од њих леже на иредуцибилној криви \mathcal{E} степена $t < n$. Тада преосталих $n(n - t)$ тачака леже на кривој степена највише $n - t$.*

Доказ. Нека су \mathcal{C} , \mathcal{D} и \mathcal{E} криве дефинисане хомогеним полиномима $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ редом. Нека тачка $[a : b : c]$ на \mathcal{E} не лежи на $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$. Тада крива степена n дефинисана полиномом

$$\lambda P(x, y, z) + \mu Q(x, y, z),$$

где је $\lambda = Q(a, b, c)$, $\mu = -P(a, b, c)$, сече E у барем $mn + 1$ тачака (конкретно у $[a : b : c]$ и mn тачака које леже на $C \cap D$ по претпоставци). Одавде следи, на основу обрнуте Безуове теореме, да ова крива и E морају имати заједничку компоненту, која са друге стране мора бити E , јер је E иредуцибилна. Према томе,

$$\lambda P(x, y, z) + \mu Q(x, y, z) = R(x, y, z) \cdot S(x, y, z),$$

за неки неконстантан хомоген полином $S(x, y, z)$ степена не већег од $n - m$. Према томе, ако $[u : v : w] \in C \cap D$ тада или је $R(u, v, w) = 0$ или $S(u, v, w) = 0$. Одавде следи да $n(n - m)$ тачака $C \cap D$ које не леже на \mathcal{E} морају лежати на кривој дефинисаној полиномом $S(x, y, z) = 0$. \square

6

Примене Безуове теореме

У овом поглављу ћемо осветлити дубоку везу између алгебарске геометрије равних алгебарских кривих и класичних теорема пројективне геометрије. Показаћемо и неколико нових тврђења који произилазе из тврђења теорема које смо доказали у претходним поглављама.

Blaise Pascal је 1640. као шестогодишњак уочио да шестоугао уписан у круг има својство да три тачке добијене као пресеци парова наспрамних страница увек припадају једној правој. Ово својство је назвао "Тајанствени шестоугао" и послао га је водећим математичарима тога доба. Убрзо после тога је уочио да исто својство има шестоугао који је уписан у елипсу. Овај резултат је био један од првих фундаменталних резултата који није био познат античким Грцима. За Дезарговом теоремом која је доказана четири године раније, довео је до рађања једне нове неметричке геометрије - пројективне геометрије. Пројективна геометрија у класичном смислу је достигла свој врхунац у XIX веку са чувеним Понселеовим резултатом - теореме о Понселеовом поризму, али лепота ових тврђења привлачи и даље пажњу математичке јавности и представљају мотив за истраживање у модерним математичким дисциплинама.



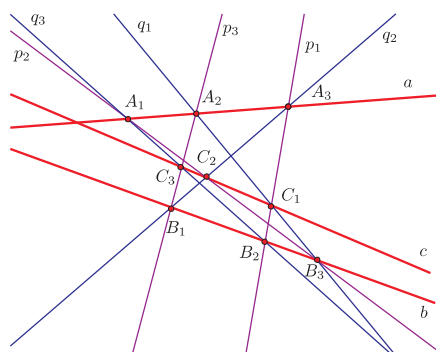
Blaise Pascal

Паскалова, Дезаргова, Бријаншонова и Папусова теорема представљају класивне теореме пројективне геометрије. Специјално, оне важе и у еуклидској равни. Постоје и докази које користећи Менелајеву и Чевијеву теорему доказују ова тврђења за еуклидски случај. Иако формулација Паскалове, Бријаншонове и Папусове теореме, као и слична техника доказа наслућују дубоку везу међу њима. Дуалносту пројективној геометрији успоставља везу међу Бријаншонове и Паскалове теореме. Пројективна геометрија и велика слобода која она даје довела је до неколико нових доказа ових тврђења. Могућност да се пројективним трансформацијама прелази из Бријаншонове, Папосове и Паскалове конфигурације пређе у неке специјалне (нпр. шестоугао са паралелним наспрамним страницама, превођење коника у кругове) је ставила ове теореме у један контекст и успоставила чвршћу везу између њих. Духовити докази Паскалове и Папосове теореме који произилазе као последица теореме о девет тачака ово теореме виде у једном јединственом светлу, као специјалне случајеве овог тврђења.

6.1 Папосова теорема

Теорема 6.1.1 (Папосова теорема). Нека су A_1, A_2 и A_3 тачке на правој a и B_1, B_2 и B_3 тачке на правој b . Праве A_1B_2 и A_2B_1 секу се у тачки C_3 , праве A_2B_3 и A_3B_2 секу се у тачки C_1 и праве A_3B_1 и A_1B_3 секу се у тачки C_2 . Тада су тачке C_1, C_2 и C_3 колинеарне.

Доказ. Означимо са p_1, p_2 и p_3 праве A_3B_2, A_1B_3 и A_2B_1 , а са q_1, q_2 и q_3 праве B_3A_2, B_1A_3 и B_2A_1 редом. Нека је c права C_1C_2 . Подразумевамо да су и полиноми који задају одговарајуће праве означени исто као и праве. Праве p_1, p_2 и p_3 са правама q_1, q_2 и q_3 формирају кавез 3×3 чији су 9 одговарајућих тачака $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2$ и C_3 .



Слика 6.1.

Посматрајмо дегенерисану кубичку $a \cdot b \cdot c = 0$. Геометријски се састоји од 3 праве a, b и c , а алгебарски је abc полином трећег степена. Ова кубика пролази кроз A_1, A_2, A_3 (права a), B_1, B_2, B_3 (права b) и C_1, C_2 (права c), тј. пролази кроз 8 тачака кавеза, а по теорему мора проћи и кроз девету, C_3 . Како C_3 није ни на правој a ни на правој b то C_3 лежи на правој c . \square

Приметимо да у доказу Папосове теореме нисмо нигде користили поредак тачака на правима a и b . Зато тврђење остаје на снази за било који распоред тачака. Праве које се појављују из Папосових конфигурација $A_1 A_2 A_3 B_1 B_2 B_3, A_1 A_2 A_3 B_2 B_3 B_1$ и $A_1 A_2 A_3 B_3 B_1 B_2$ имају једно лепо својство које је исказано у следећој теорему.

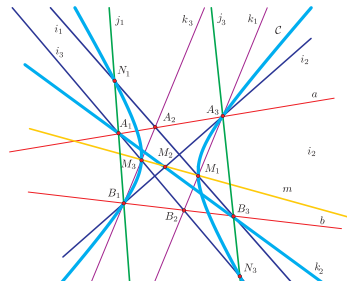
Теорема 6.1.2. Праве које се појављују из Папосових конфигурација $A_1 A_2 A_3 B_1 B_2 B_3, A_1 A_2 A_3 B_2 B_3 B_1$ и $A_1 A_2 A_3 B_3 B_1 B_2$ секу се у једној тачки.

Доказ. Означимо са i_1, i_2, i_3 праве A_2B_3, A_3B_1 и A_1B_2 редом, са j_1, j_3 праве A_1B_1 и A_3B_3 редом и са k_1, k_2, k_3 праве B_2A_3, B_3A_1 и B_1A_2 као и одговарајуће полиноме који дефинишу ове праве. Нека је M_1 пресечна тачка правих i_1 и k_1 , M_2 пресечна тачка правих i_2 и k_2 , M_3 пресечна тачка правих i_3 и k_3 , N_1 пресечна тачка правих i_1 и j_1 и тачка N_3 пресечна тачка правих i_3 и j_3 . Према Папосовој теорему тачке M_1, M_2 и M_3 леже на једној правој m . Доказаћемо једну лему.

Лема 6.1.1. Тачке M_1, M_3, N_1, N_3, A_3 и B_1 леже на једној коници.

Доказ. Праве i_1, i_2 и i_3 са правима m, j_1 и j_3 формирају кавез 3×3 са истакнутим тачкама $M_1, M_2, M_3, N_1, N_3, A_1, A_3, B_1$ и B_3 .

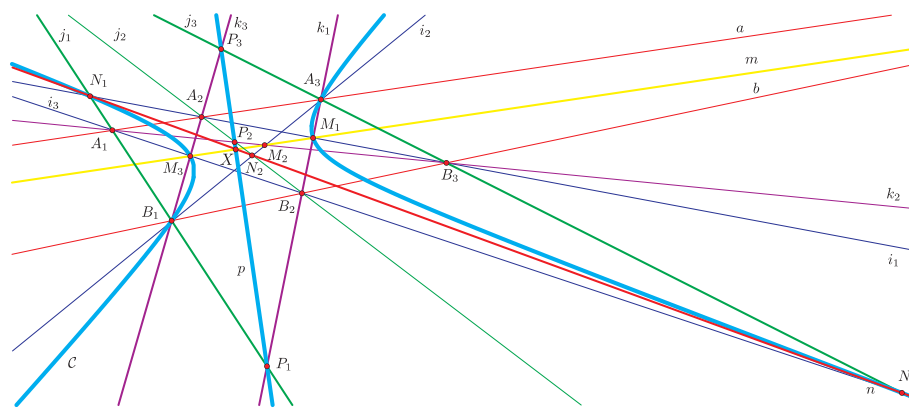
Постоји јединствена коника C која пролази кроз 5 тачака A_3, M_1, M_3, B_1 и N_3 . Кубика $k_2 \cdot C = 0$ састоји се од конике C и праве k_2 на којој су тачке A_1, B_3 и M_2 па



Слика 6.2.

пролази кроз 8 од 9 тачака кавеза. По теореме мора садржати и девету тачку N_1 која не припада правој k_2 . Зато коника C пролази и кроз тачку N_1 . \square

Вратимо се сада тврђењу које желимо докажемо. Нека је N_2 пресечна тачка правих i_2 и j_2 , P_1 пресечна тачка правих j_1 и k_1 , P_2 пресечна тачка правих j_2 и k_2 и P_3 пресечна тачка правих j_3 и k_3 .



Слика 6.3.

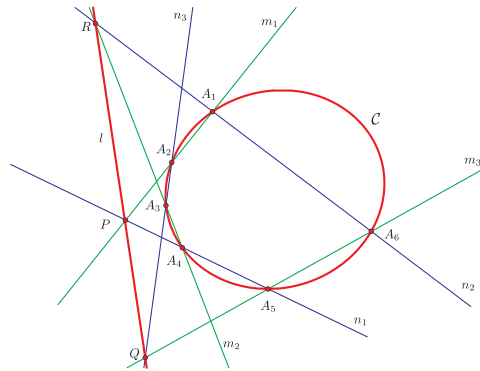
Према Папосовој теореме, тачке N_1, N_2 и N_3 леже на једној правој n , а тачке P_1, P_2 и P_3 леже на правој p . Нека се праве m и n секу у тачки X . Према лемји 6.1.1 тачке M_1, M_3, N_1, N_3, A_3 и B_1 леже на једној коници, па применом Паскалове теореме на шестоугао $A_3M_1M_3B_1N_1N_3$ добијамо да су тачке P_1, P_3 и X колинеарне, тј. тачка X припада правој p . \square

6.2 Паскалова теорема

Теорема 6.2.1 (Паскалова теорема). Нека су A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 и A_6 шест *ш*ачака на коници C . Праве A_1A_2 и A_4A_5 секу се у *ш*ачки P , *ш*раве A_2A_3 и A_5A_6 секу се у *ш*ачки Q , а *ш*раве A_3A_4 и A_6A_1 секу се у *ш*ачки R . Тада су *ш*ачке P, Q и R колинеарне.

Доказ. Нека су m_1, m_2 и m_3 праве A_1A_2, A_3A_4 и A_5A_6 редом, а n_1, n_2 и n_3 праве A_4A_5, A_6A_1 и A_2A_3 редом. Нека је l права PQ . Праве n_1, n_2 и n_3 са правима m_1, m_2 и m_3 формирају 3×3 кавез чијих су 9 одговарајућих тачака $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, P, Q$ и R .

Посматрајмо кубику $l \cdot C = 0$ која се састоји од праве l и конике C . Ова кубика пролази кроз A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 и A_6 (коника C) и P и Q (права l), па мора проћи и кроз девету тачку R , која не припада C . Дакле, R лежи на правој l . \square



Слика 6.4.

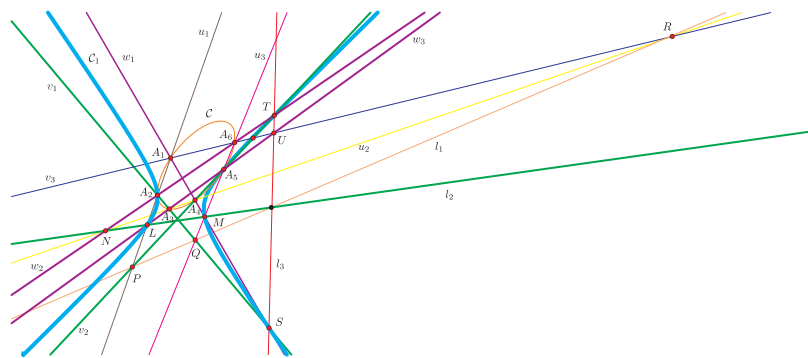
Редослед 6 тачака на коници може произвести различите праве, које називамо *Паскаловим* правима. Њих има 60, а неке од њих се секу у једној тачки. Ово смо већ видели у теорему 4.0.5, али сада ћемо га доказати на другачији начин.

Теорема 6.2.2 (Штајнерова теорема). *Нека су A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 и A_6 шест њачака на коници C . Паскалове њправе шест њоуџлова $A_1A_2A_3A_4A_5A_6, A_1A_2A_6A_5A_3A_4$ и $A_1A_4A_5A_3A_2A_6$ секу се у једној њачки.*

Доказ. Означимо са u_1, u_2 и u_3 праве A_1A_2, A_3A_4 и A_6 , са v_1, v_2 и v_3 праве A_2A_3, A_4A_5 и A_6A_1 , са w_1, w_2 и w_3 праве A_1A_4, A_2A_6 и A_3A_5 . Означимо са P пресек u_1 и v_2 , са Q пресек u_3 и v_1 , са R пресек u_2 и v_3 , са L пресек u_1 и w_3 , са M пресек u_3 и w_1 , са N пресек u_2 и w_2 , са S пресек v_1 и w_1 , са T пресек v_2 и w_2 , са U пресек v_3 и w_3 . Праве које садрже тројке тачака $P, Q, R; L, M, N; S, T, U$ означимо редом са l_1, l_2 и l_3 . Нека је X пресечна тачка правих l_2 и l_3 .

Докажимо за почетак следећу лему.

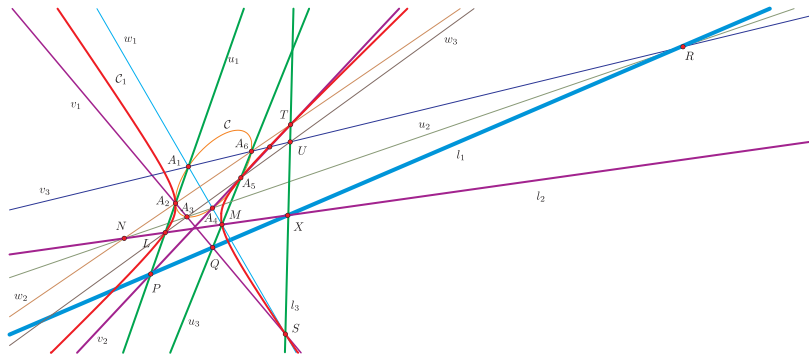
Лема 6.2.1. *Тачке A_2, A_5, L, M, S и T леже на једној коници.*



Слика 6.5.

Доказ. Праве v_1, v_2 и l_2 са правима w_1, w_2 и w_3 формирају кавез 3×3 са истакнутим тачкама $A_2, A_3, A_4, A_5, L, M, N, S$ и T . Нека је C' коника која пролази кроз A_5, L, M, S и T . Кубика $C' \cdot u_2 = 0$ пролази кроз 8 тачака кавеза, па мора и A_2 лежати на C' . \square

Вратимо се сада тврђењу које желимо да докажемо. Праве u_1, u_3 и l_3 са правима v_1, v_2 и l_2 формирају 3×3 кавез са истакнутим тачкама $A_2, A_5, L, M, P, Q, S, T$ и X .



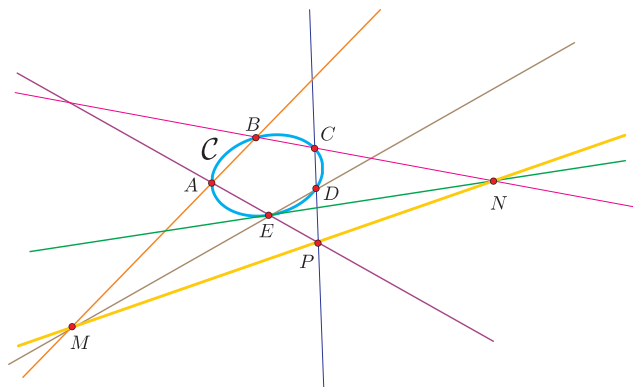
Слика 6.6.

Према леми 6.2.1 тачке A_2, A_5, L, M, S и T леже на коници C' , па кубика $C' \cdot l_1 = 0$ пролази кроз 8 тачака кавеза. Ово значи да преостала тачка X лежи на правој l_1 чиме је тврђење доказано. \square

6.2.1 Дегенерисани случајеви

Паскалова теорема коју смо доказали важи за шестоуглове уписане у конику. Она је још генералнија јер ако у шестоуглу $ABCDEF$ уписаном у конику C тачка $F \rightarrow E$, тада права FE тежи тангенти у тачки E , тј. примена Паскалове теореме на $ABCDEF$ кад $F \rightarrow A$ се може схватити као примена на шестоугао $ABCDEE$ тј. дегерацијом добијамо следећу последицу.

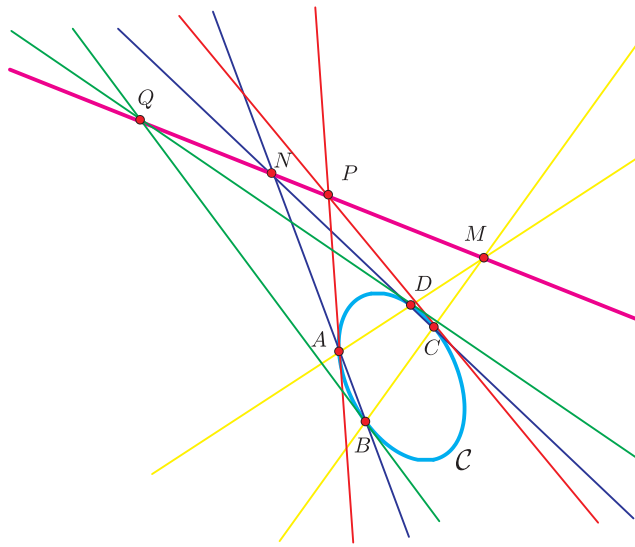
Последица 3. Нека је $ABCDE$ петоруџао уписан у конику C и нека је тачка M пресек њивих AB и DE , тачка N пресек њиве BC и тангенте на конику C у тачки E и тачка P пресек њивих CD и AE . Тада су тачке M, N и P колинеарне.



Слика 6.7.

Узимајући различите начине дегенерасања можемо добити различите ситуације које су опет ништа друго до дегенерација Паскалових конфигурација. Доказаћемо још две интересантне последице дегенерације шестоугла.

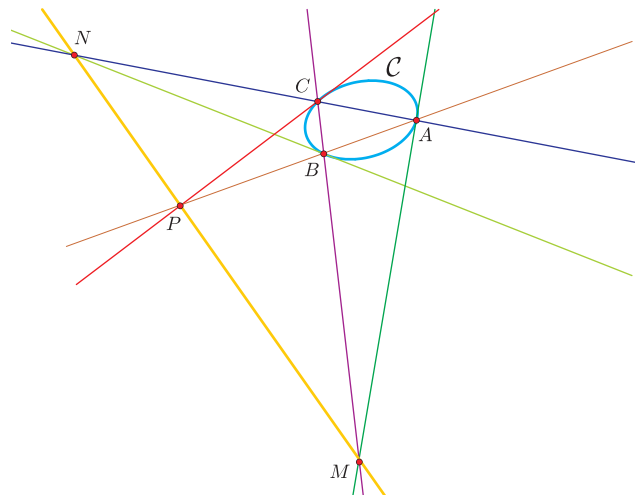
Последица 4. Нека је $ABCD$ четвороруџао уписан у конику C и нека је тачка M пресек њивих AD и BC , тачка N пресек њиве AB и њиве CD , тачка пресека тангенте на конику C у тачкама A и C и тачка пресека тангенте на конику C у тачкама B и D . Тада су тачке M, N, P и Q колинеарне.



Слика 6.8.

Доказ. Применом Паскалове теореме на шестоугао $AABCCD$ добијамо да су тачке M , N и P колинеарне. Применом Паскалове теореме на шестоугао $ABBCDD$ добијамо да су и тачке M , N и Q колинеарне, одакле следи тврђење. \square

Последица 5. Нека је ABC четвороугао уписан у конику C и нека је тачка M пресек праве AB и тангенте на конику C у тачки C , тачка N пресек праве BC и тангенте на конику C у тачки A и тачка Q пресек праве CA и тангенте на конику C у тачки B . Тада су тачке M , N и P колинеарне.



Слика 6.9.

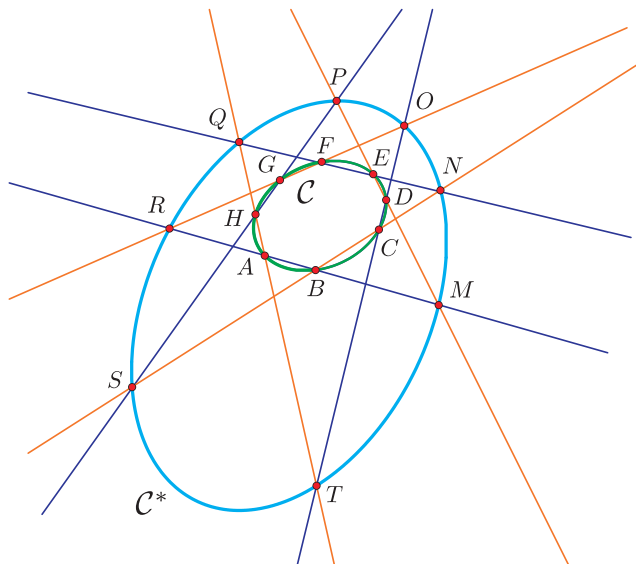
Доказ. Применом Паскалове теореме на шестоугао $AABVCC$ добијамо да су тачке M , N и P колинеарне. \square

6.3 Мистични осмоугао

Природно је поставити питање да ли постоји начин да се уопште Папосова и Паскалова теорема. Постоји ли неко слично својство које би поседовале четворке тачака односно осмоугао уписан у конику? Ова питања су доста разматрана у протекла два века и још увек није стављена тачка на њих. Сада ћемо размотрити и у духу теореме о кавезу доказати тврђење за ”мистични осмоугао,,уписан у конику и њен дегенерисан случај који би представљао генерализацију Папосове теореме.

6.3.1 Паскалова конфигурација

Теорема 6.3.1 (Мистични осмоугао). *Нека је осмоугао $ABCDEFGH$ уписан у конику C и нека је тачка M пресек њених AB и DE , тачка N пресек њених BC и EF , тачка O пресек њених CD и FG , тачка P пресек њених DE и GH , тачка Q пресек њених EF и HA , тачка R пресек њених FG и AB , тачка S пресек њених GH и BC и тачка T пресек њених HA и CD . Тада тачке M, N, O, P, Q, R, S и T припадају једној коници C^* .*



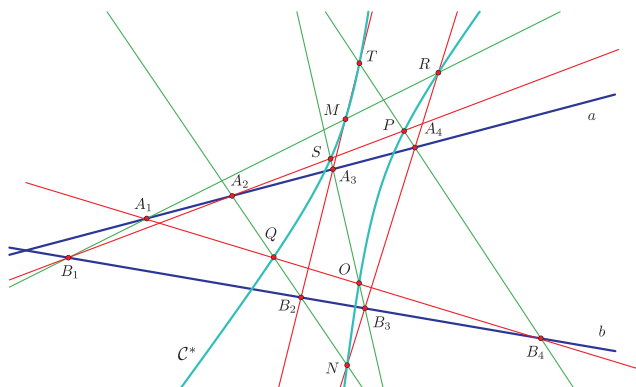
Слика 6.10.

Доказ. Нека је C^* коника која пролази кроз 5 тачака M, N, O, P и Q . Праве AB, CD, EF и GH са правима BC, DE, FG и HA формирају 4×4 кавез са чворовима у тачкама A, B, C, \dots, S и T . Тачке A, B, \dots, P и Q формирају супра-триангуларан скуп, па крива $\mathcal{D} = C \cdot C^*$ која је четвртог степена пролази кроз њега. Но, према теореме о кавезу она мора проћи и кроз преостале тачке R, S и T . Крива \mathcal{D} је геометријски скуп тачака две конике C и C^* , а како R, S и T не леже на C , морају припадати C^* . \square

6.3.2 Папосова конфигурација

Следећа теорема се може схватити као аналог Папосове теореме. Њу добијемо када у теореме о мистичном осмоуглу узмемо специјалну конику $C = a \cdot b$ која је унија две праве a и b .

Теорема 6.3.2. Нека су A_1, A_2, A_3 и A_4 тачке на правој a и B_1, B_2, B_3 и B_4 тачке на правој b и нека је тачка M пресек права A_1B_1 и A_3B_2 , тачка N пресек права A_2B_2 и A_4B_3 , тачка O пресек права A_3B_3 и A_1B_4 , тачка P пресек права A_4B_4 и A_2B_1 , тачка Q пресек права A_2B_2 и A_1B_4 , тачка R пресек права A_1B_1 и A_4B_3 , тачка S пресек права A_3B_3 и A_2B_1 и тачка T пресек права A_4B_4 и A_3B_4 . Тада тачке M, N, O, P, Q, R, S и T припадају једној коници C^* .



Слика 6.11.

6.4 Мистични $2n$ -тоуглови

Теорема 6.3.1 се природно генерализује за $2n$ -тоуглове уписане у конику.

Теорема 6.4.1. Нека је D многоугао са $2n$ стране уписан у недегенерисану конику C , и нека су му стране обојене наизменично у две боје, црвену и плаву. Ако је K $(n \times n)$ -кавез генерисан са датих n црвених и n плавих права, тада свих $n^2 - 2n$ нових темена кавеза леже на равној кривој C^* степена највише $n - 2$.

Доказ. С обзиром да је C иредуцибилна коника, следи да се на свакој правој кавеза K налазе тачно две тачке C . Одатле следи да је могуће пренумерисати праве (и плаве и црвене) тако да тачке D чине скуп чворова p_{ij} који задовољавају услов $i + j = n \pm 1$ заједно са два "ћошка" p_{n1} и p_{1n} . Скуп D је садржан у $A = \{p_{ij}\}_{i+j \leq n+1}$, који је супер-триангуларан скуп. Његов комплементаран скуп $A \setminus D$ се садржи од

$$\left(\frac{n^2 + 3n}{2} - 1 \right) - 2n = \frac{n(n-1)}{2} - 1$$

елемената. Желимо да проверимо да ли чворови скупа $A \setminus D$ леже на некој кривој C^* степена највише $n - 2$. Пошто има $\frac{n(n-1)}{2} - 1$ елемената у $A \setminus D$, постојање такве криве је загарантовано неједнакостима

$$\frac{(n-2)^2 + 3(n-2)}{2} \geq \frac{n(n-1)}{2} - 1$$

и $1 \leq n - 2 \leq n - 1$. Према томе, тачке $A \setminus D$ леже на кривој C^* степена $n - 2$ (пређашња неједнакост нам гарантује егзистенцију коефицијената криве C^* као решења хомогеног система $\frac{n(n-1)}{2} - 1$ линеарних једначина по $\frac{(n-2)^2 + 3(n-2)}{2}$ променљивих).

Размотримо сада криву $Q = C \cup C^*$ степена n са иредуцибилном квадратном компонентом C . Чворови D -а се налазе на C , и чворови $A \setminus D$ на C^* . Према томе,

сви чворови A се налазе на C . По теореме о кавезу за равне криве, сви чворови кавеза K морају да леже на кривој \mathcal{Q} . Међутим, чворови K који нису у D не могу припадати C , зато што би ово било у контрадикцији са чињеницом да права не може сећи редуцибилну конику у три тачке. Следи да неурачунати чворови морају да леже на C^* , што је и требало доказати. \square

Литература

- [1] Đ. Baralić and I. Spasojević, *Illumination of Pascal's Hexagrammum and Octagrammum Mysticum*, arXiv:1209.4795v2
- [2] Gabriel Katz, *Curves in Cages: An Algebro-Geometric Zoo*, The American Mathematical Monthly, Vol. 113, No. 9 (Nov., 2006), pp. 777-791
- [3] Lawrence S. Evans and John F. Rigby, *Octagrammum Mysticum and the Golden Cross-Ratio*, The Mathematical Gazette, Vol. 86, No. 505 (Mar., 2002), pp. 35-4
- [4] Richard Schwartz, *PAPPUS'S THEOREM AND THE MODULAR GROUP*, preprint
- [5] Frances Kirwan, *Complex Projective Space*, Cambridge University Press ISBN 0521 – 41251X
- [6] Richard Evan Schwartz and Serge Tabachnikov, *Elementary Surprises in Projective Geometry*, preprint
- [7] V. V. Prasolov and V. M. Tikhomirov, *Geometry*, American Mathematical Society ISBN 0 – 8218 – 2038 – 9
- [8] Richard Hartley and Andrew Zisserman, *Multiple View Geometry in Computer Vision*, Cambridge University Press ISBN 0521 54051 8
- [9] Jürgen Richter-Gebert, *Perspectives on Projective Geometry*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011 ISBN 978-3-642-17285-4
- [10] Robert Bix, *Conics and cubics: an elementary introduction to the algebraic geometry*, Springer-Verlag
- [11] Marcel Berger, *Geometry Revealed - A Jacob's Ladder to Modern Higher Geometry*, Springer Heidelberg Dodrecht London New York ISBN 978-3-540-70966-1