ПРАДАВАЧ: Весна Бал

Рационални бројеви

Уводни део

У школском курсу математике у млађим разредима основне школе учи се да је скуп природних бројева систем (структура) коју чине ти бројеви заједно са рачунским операцијама и њиховим релацијама.

У вишим разредима основне школе ученици се упознају са појмом проширења система природних бројева. Помоћу природних бројева постепено се дефинишу цели и рационални бројеви. Сваки од поменутих скупова садржи претходни. При томе се конструише проширење које има одређена својства у односу на скуп који се проширује.

РАЦИОНАЛНИ БРОЈЕВИ

Природни бројеви су се појавили као резултат пребројавања, а прво проширење појма природног броја било је додавање разломака скупу природних бројева. Појам разломка везан је са потребом мерења величина. Мерење било које величине састоји се у њеном упоређивању с другом величином коју узимамо за јединичну. На пример, при мерењу дужине одсечка (дужи), на њега наносимо други одсечак који се узима да има јединичну дужину (1 cm, 1 m итд.). Јасно је да се неће увек јединични одсечак садржати цео број пута у одсечку који се мери. Тако настаје потреба посматрања разломака - половине ,четвртине и других делова јединице мерења.

Са развојем аритметике (науке о бројевима и операција са њима) људи су почели да разматрају разломљени број (*разломак*), као количник дељења двају природних бројева. Уопште, обичним разломком назива се број облика $\frac{m}{n}$, где су m и n природни бројеви.

Даље проширење појма о броју било је изазвано потребама саме математике. У вези са решавањем линеарних једначина с једном непозатом постало је неопходно увођење негативних бројева.

Посебно је јасно истакнут смисао негативних бројева увођењем координатне осе и координатне равни. Важан моменат у математици било је увођење броја нула. Додавање нуле и негативних бројева скупу природних бројева доводи до скупа целих бројева.

Скуп целих бројева (позитивних целих, нуле и негативних целих) означавамо словом Z, тј.

$$Z = \{. \; . \; . , -5, -4, -3, -2, -1, 0 \, , 1, \; 2, 3 \, , 4 \, , 5 \, , \; . \; . \; . \}$$

Док је скуп N затворен за две операције — сабирање и множење , скуп Z је затворен за три операције: сабирање, одузимање и множење. Посебно, за произвољне природне бројве a и b једначина $a + x = b$ је увек решива, али је само за $b > a$ вредност x природан број, док је за $b < a$ она негативна.

Дељење није затворена операција у скупу Z. На пример, једначине: $2x = 3$ и $-5x = 17$ немају решења у скупу Z .

Скуп Z се проширује („потапа се“) у нови скуп бројева , у коме се налазе решења ових једначина. То су *разломци* $\frac{p}{q}$, $p, q \in Z, q \neq 0$, p је *бројилац* , а q именилац разломка $\frac{p}{q}$.

Разломке називамо још и *рационалним беојевима* (латински $ratio$ – однос), а скуп који они образују означавамо са Q .

$$Q = \left\{ \frac{p}{q}, \text{где је } p, q \in Z, q \neq 0 \right\}.$$

Овде је битно ограничење $q \neq 0$, јер дељење са нулом нема смисиа.

Једнакост разломака дефинише се овако:

$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b}$ ако и само ако $a = a'$, односно $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ако и само ако $ad = bc$.

Користећи ову дефиницију, лако је доказати једнакост $\frac{a}{b} = \frac{an}{bn}$, $n \neq 0$, $n \in Z$.
Ово је основно својство разломка: *Ако се бројилац и именилац разломка помноже једним истим целим бројем, различитим од нуле, добија се разиомак једнак са датим разломком.* Кажемо да се тако разломак *проширује*. Међутим важи и обрнуто: $\frac{an}{bn} = \frac{a}{b}$, $n \neq 0$, $n \in Z$.

Разломак се *скраћује*, ако се бројилац и именилац разломка поделе једним истим целим бројем,различитим од нуле.

Пример 1. $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{5}{10} = \ldots$; $\frac{-3}{7} = \frac{18}{-42} = \ldots$; $\frac{8}{5} = \frac{-24}{-15} = \ldots$; итд.

У овом примеру видимо да вршимо класификацију разломака по једнакости ,па је у овој ситуацији имплицитно садржана *реалација еквиваленције*. Тако смо у предходном примеру уочили три дисјунктне класе скупа Q, чији су стандарни представници : $\frac{1}{2}, \frac{-3}{7}, \frac{8}{5}$; међутим, они могу бити, на пример, замењени са : $\frac{3}{6}, \frac{18}{-42}, \frac{-24}{-15}$.

Елементе скупа Z налазимо међу брјевима $\frac{p}{1}, p \in Z$. На пример: $\frac{3}{1} = 3$; $\frac{-5}{1} = -5$; $\frac{0}{1} = 0$.

Знамо да је : $\frac{-p}{q} = \frac{p}{-q}$ (разломак $\frac{-p}{q}$ проширили смо са -1).

Уводимо ознаку: $-\frac{p}{q} = \frac{p}{-q}$ и кажемо да је $-\frac{p}{q}$ супротан број за број $\frac{p}{q}$. Тада важи

$$\frac{p}{q} + \left(-\frac{p}{q}\right) = 0 .$$

Број $\frac{q}{p}$ зовемо још *реципрочним за број* $\frac{p}{q}$ и пишемо $\frac{q}{p} = \left(\frac{p}{q}\right)^{-1}$. Тада важи

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p} = 1$$

Уочимо још нека својства скупа Q.

(1) Нека је $\frac{p}{q}$ произвољан елеменат из Q и n произвољан природан број. Тада је $(-n) \cdot \frac{p}{q} = \frac{-np}{q}$.

(2) За свако n из N и свако $\frac{p}{q}$ из Q је $n \cdot \left(\frac{-p}{q}\right) = \frac{-np}{q}$.

(3) За свако m из Z и свако n из Z и свако $\frac{p}{q}$ из Q важи: $m \cdot \left(\frac{np}{q}\right) = (m \cdot n)\, \frac{p}{q}$.

Скуп рационалних бројева затворен је за све четири алгебарске операције : сабирање, одузимање,множење и дељење. Извођење операција са рационалним бројевима своди се на опеације са целим бројевима.Тако ако је $a = \frac{p}{q}$, а $b = \frac{r}{s}$, онда је

$$a + b = \frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + rq}{qs},$$

$$a - b = \frac{p}{q} - \frac{r}{s} = \frac{ps - r}{qs},$$

$$a \cdot b = \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs},$$

$$a : b = \frac{p}{q} : \frac{r}{s} = \frac{ps}{qr}.$$

З А Д А Ц И

1) Образложи једнакости: $\frac{3}{6} = \frac{-99}{-198}$, $\frac{13}{11} = \frac{26}{22}$.

2) Одреди неколико чланова класе еквиваленције разломка $\frac{41}{-13}$ у односу на релацију $=$.

3) Наведи који су од следећих разломака једнаки неком целом броју:

$\frac{0}{17}$, $\frac{-9}{-39}$, $\frac{45}{5}$, $\frac{12}{36}$, $\frac{17}{1}$.

4) Покажи да важи једнакост : $\frac{p}{q} - \frac{r}{s} = \frac{p}{q} + (-\frac{r}{s})$.

5) Изврши назначене операције: $-\frac{5}{3} + \frac{17}{2}$, $\frac{4}{19} - \frac{5}{20}$, $\frac{13}{25} \cdot (\frac{-14}{26})$, $\frac{-3}{5} : \frac{15}{4}$.

6) Одреди реципрочан број за број : 7 , $\frac{1}{5}$, $\frac{-3}{5}$, $3\frac{1}{2}$, -1 и 1.

7) Објасни зашто је : $a)$ $-(-\frac{p}{q}) = \frac{p}{q}$, б) $((\frac{p}{q})^{-1})^{-1} = \frac{p}{q}$.

АЛГЕБАРСКА СВОЈСТВА СКУПА РАЦИОНАЛНИХ БРОЈЕВА

(Својства операција $(+)$ и $(\cdot)$ у скупу Q)

1. За свака три броја a, b и c из скупа Q
   $a + (b + c) = (a + b) + c.$
2. За сваки број a из Q
   $a + 0 = a.$
3. За сваки број a из Q, постоји број $(-a)$ из Q тако да је
   $a + (-a) = 0.$
4. За свака два броја a и b из Q
   $a + b = b + a.$
5. За свака три броја a, b и c из Q
   $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$
6. За сваки број a из Q
   $a \cdot 1 = a.$
7. За сваки број a из Q различит од броја 0 , постоји број a^{-1} из Q такав да је
   $a \cdot a^{-1} = 1.$
8. За свака два броја a и b из Q
   $a \cdot b = b \cdot a.$
9. За свака три броја a, b и c из Q
   $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$

За структуру са две бинарне операције која испуњава својства 1- 9 кажемо да је *поље*.

Тако је $(Q \setminus \{0\}, +, \cdot)$ *поље рационалних бројева* .

З А Д А Ц И:

8) Израчунај: a) $(\frac{2}{5} - \frac{1}{2}) \cdot (6 - \frac{1}{8})$; b) $(\frac{8}{7} + \frac{3}{5})^2$; c) $(\frac{15}{6})^{-1} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(\frac{3}{4})^{-1}$; d) $\frac{1}{7} + ((\frac{1}{2})^{-1})^{-1}$.

9) Нека је $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{12}$, одреди: a) $f(1)$; b) $f(-5)$; c) $f(\frac{1}{2})$; d) $f(f(1))$;

e) Ако је $f(x,y) = 2x^2y - 3xy + 1/3$, одреди: $f(0,0)$; $f(1,0)$; $f(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$; $f(-1, \frac{1}{9})$.

ПОРЕДАК НА СКУПУ РАЦИОНАЛНИХ БРОЈЕВА

Дефиниција: Разломак је позитиван ако се може представити као количник двају природних бројева. Рационалан број различит од нуле назива се негативним ако није позитиван.
Уређена четворка (Q / $\{0\}, +, \cdot, <$) таква да је (Q / $\{0\}$,+ ,$\cdot$) алгебарско поље,а „<“ релација на Q са својствима:

10. За сваки број a из Q важи тачно једна од релација: $a < 0$ или $a = 0$ или $a > 0$,

11. За свака два броја a и b из Q, услови $a > 0$ и $b > 0$ повлаче: $a + b > 0$ и $a \cdot b > 0$,

12. За свака два броја a и b из Q , $a < b$ ако и само ако $a - b < 0$,

зове се уређено поље скупа рационалних бројева.

Пример 2. Бројеви: 5, $\frac{1}{2}$, $\frac{-2}{-3}$, $\frac{3}{7}$ припадају позитивним бројевима.

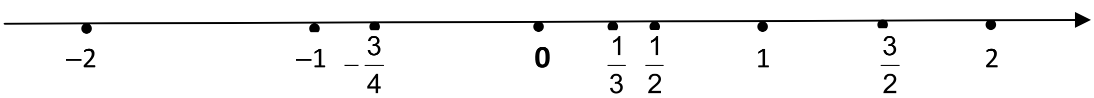
Бројеви: $-\frac{2}{3}, -2$, $\frac{-2}{3}$ припадају негативним бројевима.

Пример 3. $\frac{1}{7} < \frac{3}{5}$, јер је $\frac{1}{7} - \frac{3}{5} = \frac{-16}{35}$, а $\frac{-16}{35} < 0$ (својство 12.);

Пример 4. $\frac{-3}{5} < 0$; $-\frac{1}{2} < \frac{1}{1000}$; $-\frac{5}{7} < -\frac{1}{2}$, јер је $\frac{1}{2} < \frac{5}{7}$.

Важно је запазити још једно својство рационалних бројева. *Између свака два рационална броја налази се бесконачно много рационалнх бројева.* Заиста, ако су a и b различити рационални бројеви и $a < b$, онда рационалан број $\frac{a+b}{2}$ лежи између њих: $a < \frac{a+b}{2} < b$. Поступајући аналогно даље, може се доказати да се између a и b налази бесконачно много рационалних бројева.

Сваком рационалном броју одговара јединствена тачка координатне осе, при чему двама различитим рационалним бројевима одговарају две различите тачке. Без обзира на то што рационални бројеви имају својство густине , они ипак не „ испуњавају“ целу координатну осу , тј. постоје тачке на оси којима не одговара ни један рационалан број.



ЗАДАЦИ:

10) Поређај у растући низ:

$-\frac{3}{5}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{4}{15}$, 0 , -8 , $2\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{4}$.

11) Образложи зашто је:

$\frac{13}{27} < \frac{1}{2}$, $-\frac{3}{5} < 0$, $1 + \frac{1}{4} > -\frac{5}{4}$.

12) На бројевној оси одреди тачке које одговарају бројевима:

$5\frac{1}{7}$; $-\frac{32}{20}$; $\frac{1}{6}$; 2 ; -6 ; $\frac{17}{3}$; $\frac{55}{105}$.

13) Одреди неколико бројева који су:

a) Већи од $-\frac{1}{7}$, а мањи од $\frac{1}{7}$;

b) Већи од нуле ,а мањи од $\frac{1}{2}$;

14) Покажите да између бројева $\frac{2}{3}$ и $\frac{4}{5}$ постоје рационални бројеви. Наведите три таква броја.

15) Апсолутна вредност, дефинише се на скупу Q на следећи начин: за $x \in Q$ је:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Одреди: a) $|8|$; b) $\left|-\frac{1}{4}\right|$; c) $\left|-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right|$; d) $|(-2)^3|$

16) Који су то разломци $\frac{p}{q}$ за које важи $\left|\frac{p}{q}\right| < 1$?

ДЕЦИМАЛНИ ЗАПИС РАЦИОНАЛНОГ БРОЈА

Посебно важну улогу у математици и пракси имају децимални разломци. Познато је да се сваки природан број може на јединствен начин раставити на просте чиниоце. Ако се такав растав имениоца обичног разломка на просте чиниоце састоји само од двојки, или само од петица, или само од двојки и петица, тада се такав разломак може записати у облику коначног децималног разломка.

Пример 5: $\frac{3}{5}=\frac{3\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{6}{10}=0{,}6$; $\frac{7}{20}=\frac{7}{2\cdot 2\cdot 5}=\frac{7\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 5\cdot 5}=\frac{35}{100}=0{,}35$; $\frac{9}{5}=\frac{9\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{18}{10}=1{,}8$.

Исти резултат се може добити дељењем бројиоца разломка имениоцем.

Ако је, пак, обичан разломак нескратив и разлагање имениоца на просте чиниоце садржи бар један број различит од двојке и петице, тада се такав број може записати у облику бесконачног периодичног децималног броја, тј. децималног броја код којег је број децималних знакова бесконачан и једна цифра или неколико цифара после запете се стално понављају. Представимо , на пример, обичан разломак $\frac{2}{3}$ у виду децималног разломка. Поделивши број 2 брјем 3, добијамо 0.6666 . . . . Тај бесконачан разломак називамо *периодичним*; цифру 6 називамо периодом разломка. Краткоће записа ради, период се записује само једном , с тим да се окружи заградама. На пример, $\frac{2}{3}=0{,}6666\ldots=0,(6)$ (чита се: ’’нула целих и 6 у периоди’’). Пероид у разломку може да не почиње одмах иза запете и да садржи више од једне цифре. На прмер: $2\frac{16}{15}=3{,}0(6)$, $\frac{5}{11}=0,(45)$.

Ако се у процесу дељена бројиоца разломка имениоцем појави остатак једнак нули , а процес дељења се настави , тада ће сви даљи остаци и све цифре количника бити нуле . Зато се природни бројеви, нула и коначни децимални разломци могу сматрати бесконачним децималним разломцима са периодом који се састоји од нуле: $2=2{,}000\ldots=2,(0)$; $\frac{2}{5}=0{,}4=0{,}4(0)$, итд.

Договор је и да се децимални број с периодом 9 замењује бројем с периодом 0 (с тим да се цифра јединица целих увећа за 1): $0,(9)=1,(0)$.

Дакле : 1) сваки рационалан број се може представити у облику бесконачног периодичног децималног разломка;

2) сваки периодични децимални разломак може се представити у облику разломка, тј.сваки периодични децимални разломак је рационалан број.

Прво тврђење смо показали лако , а на примеру покажимо и друго тврђење.

Пример 6. Представити у облику обичног разломка периодичан децималан разломак $0,(8)$

Решење: $0,(8)=0{,}888\ldots=\frac{8}{10}+\frac{8}{100}+\frac{8}{1000}+\ldots=8/10+8/10^2+8/10^3+\ldots$

Ово је збир чланова бесконачног геометријског опадајућег низа чији је први члан $\frac{8}{10}$, а количник $\frac{1}{10}$.

Користећи формулу за суму чланова таквог низа, добијамо $0,(8) = \frac{8}{10} / (1 - \frac{1}{10}) = \frac{8}{10} : \frac{9}{10} = \frac{8}{9}$.

Дакле, $0,(8) = \frac{8}{9}$.

Пример 7. Изведимо ученицима правило претварања периодичног децималног разломка у обичан на примеру разломака: $0,(8)$;

Решење: а) $x = 0,(8) / \cdot 10$

$$10x = 8{,}8$$

$$10x - x = 8$$

$$x \cdot 9 = 8$$

$$x = \frac{8}{9}.$$

З А Д А Ц И

17) Навести примере: а) природних бројева; b) целих бројева; c) рационалних бројева. Које бројеве називамо рационалним?

18) Да ли је једначина $a + x = b$, где су a и b дати бројеви, а x непозната, решива у скупу:
а) природних бројева, b) целих бројева, c) рационалних бројева?

19) Да ли је једначина $a \cdot x = b$, где су a и b дати бројеви, а x непозната решива у скупу:
а) природних бројева, b) целих бројева, c) рационалних бројева ?

20) Представи у облику децималног разломка : а) $\frac{17}{20}$; b) $-\frac{8}{25}$; c) $\frac{3}{8}$.

21) Представити у облику обичних разломака: а) $0,(3)$; b) $0{,}2(5)$; c) $-7,(36)$; .

22) Унеси ознаку релације $<$, $=$, $>$ на место $\square$, тако да добијеш тачне неједнакости:

а) $\frac{1}{3} \square 0{,}33$; b) $\frac{1}{3} \square 0,(3)$; c) $-\frac{3}{14} \square -0{,}21$; d) $0{,}14285 \square \frac{1}{7}$.

23) *Аритметичка средина бројева* $r_1, r_2, \ldots, r_n$ је број $\dfrac{r_1 + r_2 + \ldots + r_n}{n}$.

Одреди аритметичку срдину следећих бројева: а) 1/3; 0,25; 1/5; 1/6; b) ¾; 0,73; 0,69; c) 1/4; 0,23; 0,26; 1/5; 0,25.

24) Ако је $f(x) = 0{,}35x + 0{,}0007$, одреди : $f(0)$, $f\left(-\frac{1}{3}\right)$, $f(-0{,}002)$.

25) Одреди : а) $f(-5)$; b) $f(+5)$; c) $f(|x|)$, ако је $f(x) = |x| + x$.

26) Које су од познатих операција дефинисане на скупу : а) природних бројева; b) целих бројева; c) рационалних бројева ?

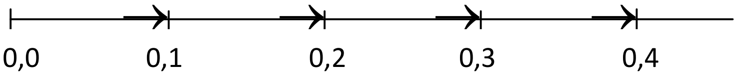
27) Формулисати својства операција у скупу рационалних бројева.

ЗАОКРУГЉИВАЊЕ

Бројеви дати децималним записима заокругљују се тако што се једначе кад имају једнак део записа који иде до *k*-те децимале. Тада кажемо да је то заокругљивање бројева на *k*-децимала.

Посматрајмо заокругљивање бројева на једну децималу.

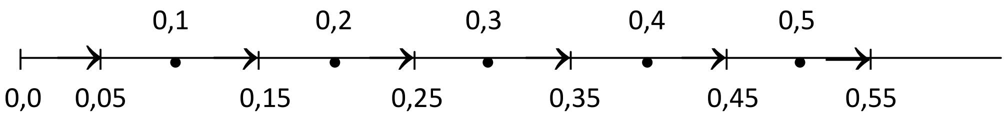
У случају простог одбацивања децимала једначимо све бројеве који припадају интервалима дужине 0,1, а који су приказани на следећој слици:



Декомпозиција је у овом случају геометријски јасно приказана, а стандарни представник се намеће, као леви крај интервала, јер има најједноставнији децимални запис.

Пример 8: $0{,}0(6) \approx 0{,}0$, јер тачка $0{,}0(6) \in [\,0{,}0\ ;\ 0{,}1)$.

Заокругљивање на *k* децимала, обично предпоставља могуће повећање *k*-те децимале за 1 кад је „ *k* плус прва “ децимала 5 или већа од 5. Декомпозиција је тада :



а стандарни представник је тачка 0,0 или тачке које су средине осталих интервала које се опет намећу својим најједноставнијим цифарским записом.

Пример 9 : $0{,}0(6) \approx 0.1$, јер $0{,}0(6) \in [\,0{,}05\ ;\ 0{,}15\,)$; $0{,}13 \approx 0{,}1$,јер $0{,}13 \in [0{,}05;\ 0{,}15]$;

$0{,}15 \approx 0{,}2$; $0{,}23 \approx 0{,}2$, јер $0{,}15$ и $0{,}23 \in [0{,}15; 0{,}2]$.

У овом примеру уочили смо две класе еквиваленције децималних разломака у односу на релацију = чији су стандарни представници 0,1 и 0,2.

З А Д А Ц И

28) Заокругли бројеве на две децимале: a) 3,14159. . . ; b) 1,4142 . . .; c) 1,7320508. . .; простим одбацивањем децимала.

29) Заокругли број 3,14159. . . a) на једну; b) на четири децимале.

30) Заокругли број 1,4142 . . . на две децимале.

Литература:

1. Математика за I разред средње школе, др Ратко Тошић , др Радивоје Деспотовић, др Бранимир Шешеља, З авод за издавање уџбеника, Београд , 1983.

2. Математичка анали за I, др Милосав Марјановић, Научна књига , Београд, 1997.

3. Настава математике, L I, 1-2, Београд ,2006.(стр. 2-11)

4. Настава математике, L II, 2-3, Београд , 2007 .(стр.1-14)

5. Настава математике, XXXVIII, 1, Београд, 1997. (стр. 1-7)

Напомена: Редовно присуствовање „Архимедесовој" Математичкој трибини у Београду, мотивисало ме је да напишем и овај други рад за *Наставу математике.*

Весна Бал , професор математике
vesna.bal.matematika@gmail.com