Друштво математичара Србије

Државни семинар 2018.

о настави математике и рачунарства у основним
и средњим школама,

Београд, 10. и 11. фебруар 2018. год.

ТЕМА:

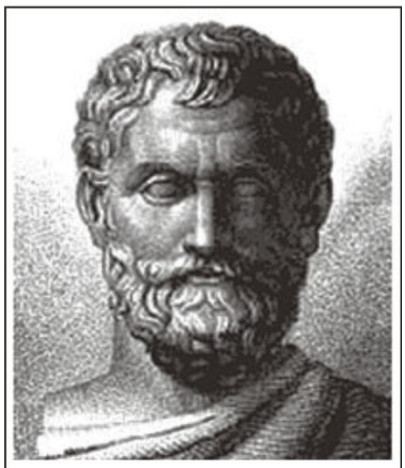
СЛИЧНОСТ И ПРИМЕНЕ

Драгољуб Ђорђевић и Милосав Миленковић

Пропорционалност дужи. Талесова теорема.

Свака прича о појму сличности требала би, бар према скромном мишљењу писаца ових редова, да започне са причом о великом античком мислиоцу Талесу.

Талес је рођен 624.год. п.н.е. у Милету, месту у Малој Азији у отменој и имућној породици феничанског порекла. Био је како Платон каже <u>први</u>, а касније један од <u>седам великих мудраца</u>, који су имали огроман углед у Античкој Грчкој.



Талес из Милета
624 г.п.н.е - 546 г.п.н.е.

По својој свестраности у интересовањима, превазилази све друге филозофе и мудраце, па чак и осталих шест великих мудраца. Интересовао се и бавио: политиком, математиком, филозофијом, астрономијом, трговином, хидротехником и још ко зна чиме све не. Био је генијалан практичар, али се далеко уздигао изнад прагматичног приступа у посматрању стања и појава, нарочито у природи и постао непосредни оснивач јонске науке и филозофије, а тиме и посредни оснивач науке и филозофије уопште.

Уводећи први принцип каузалности (узрочно-последични приступ), успео је да превазиђе сву догму, која је потицала из јаког утицаја теологије и митологије. Природу је на рационалан начин покушавао да разуме и објасни природним путем.

Посматрајући поједине појаве и процесе у живој и неживој природи, он је налазио промене, а у тим променама је нашао и нешто непромењиво, нешто из чега све настаје и у чему све завршава, а то је <u>вода</u>. Дакле, Талес је за праоснову свега узео материју која се емпиријски може проверавати, а тиме је успоставио и апсолутни затворени космички принцип.

Један је од првих који су проучавајући астрологију (данашње значење астрономије) изазивао дивљење свих умних људи, јер је подучавао морепловце да се оријентишу према сазвежђу Малог медведа, предвидео је помрачење Сунца које се десило 25. маја 585. г.п.н.е. Установио је путању кретања Сунца од солстиција до солстиција, утврдио је величину Сунца и Месеца, односно да је месечев круг седамстодвадесети део сунчевог круга. Израчунао је период појаве равнодневице, смене годишњих доба, трајање године од 365 дана.

Један период живота провео је у Египту изучавајућу геометрију. То је златни период у стваралачном смислу за Талеса. Открио је многе значајне зависности између дужи и углова, а постао је и славан нарочито пошто је применом теореме, која се и данас свуда у свету зове по његовом имену, измерио висину Велике пирамиде у Гизи,

користећи се дужином сенке пирамиде у тренутку када је дужина сенке вертикално пободеног штапа била једнака дужини штапа (неки кажу и на основу дужине сопствене сенке). Примењујући исти принцип утврдио је висине и свих других познатих пирамида. Био је у стању да утврди удаљеност брода од обале, ширину реке на неприступачном терену за мерење и много шта друго што је изазивало велику пажњу обичних људи.

У свету математике и међу математичарима многи га сматрају оцем Античке математике, а приписује му се да је први спроводио доказе за тврђења које је наводио и најпре емпиријски проверавао. Приписују му се следеће теореме:

- Пречник полови круг
- Углови на основици једнакокраког троугла су једнаки
- Угао уписан у полукруг је прав
- Наспрамни углови добијени у пресеку две праве су једнаки
- Троугао је одређен једном страницом и угловима налеглим на њу

На основу саданашњег становишта, строгог доказивања које се примењује уз поштовање принципа дедукције, Талесови докази су неубедљиви, јер се своде на доказивање помоћу „очигледности“. Свакако треба му се одати признање на томе што је уочио неопходност постојања доказа за свако тврђење, па иако му је најјачи аргумент често био „види се са слике“.

Поред многих значајних дела за собом је оставио и неке од значајних мисли, које се до данас памте:

- „Ако заповедаш, управљај сам собом.“
- „Из даљине је веће поштовање.“
- „Најбржи је ум, јер кроз све јури.“
- „Ако је владар једном омражен, онда га терете његова дела,
  била она добра или лоша.“
- Говорио је да се живот и смрт не разликују.
  Када му је приговорено: „Зашто онда не умреш.“
  Одговорио је: „Баш зато што нема никакве разлике.“
- Човеку који га је питао: „Шта је било пре: ноћ или дан?“.
  Одговорио је: „Ноћ је за један дан старија.“
- На питање: „Шта је најтеже?“
  Одговорио је: „Најтеже је себе спознати.“
- На питање: „Шта је најлакше?“
  Одговорио је: „Најлакше је делити савете.“
- На питање: „Како ћемо живети најбоље и најправедније?“
  Одговорио је: „Ако не будемо радили оно што другима приговарамо.“

Талес из Милета умро је 546.год. п.н.е. али његово дело је и данас живо.

Појмови који се користе у Талесовој теореми су:

Размера дужи је количник њихових дужина.

Дужи *a* и *b* пропорционалне су дужима *c* и *d* ако је размера дужи *a* и *b* једнака размери дужи *c* и *d*, т.ј. ако је $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

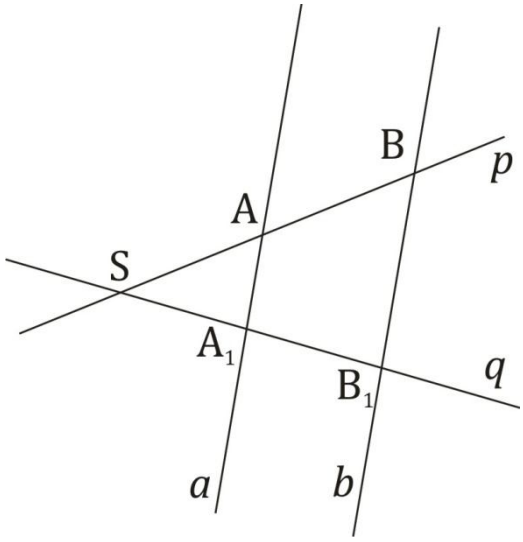
Талесова теорема:

Нека се праве p и q секу у тачки S и нека паралелне праве a и b секу праву p у тачкама A и B, а праву q у тачкама A_1 и B_1. Тада је:

$SA : AB = SA_1 : A_1B_1$,

$SA : SB = SA_1 : SB_1$,

$SA : SB = AA_1 : BB_1$.



Применом Талесове теореме могу се решавати многи и рачунски и конструктивни задаци. Навешћемо неке примере:

Задатак 1: Нека су p и q две паралелене праве на слици. Заокружи тврђења која су тачна.

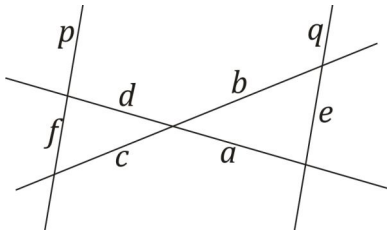
а)

1° $a : b = f : e$

2° $c : d = a : b$

3° $a : b = c : d$

4° $c : d = e : f$



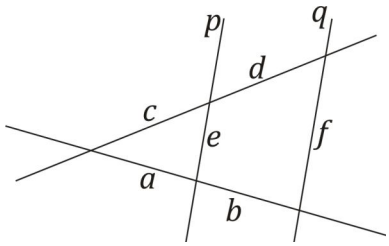
б)

1° $a : b = f : e$

2° $c : d = a : b$

3° $a : b = c : d$

4° $c : d = e : f$



Задатак 2: Ако је јединична дуж 2cm, конструиши дуж AB, чија је дужина

а) $\sqrt{5}$ б) $\sqrt{8}$

Конструисану дуж AB подели на 5 једнаких делова.

Задатак 3: Ако је јединична дуж 2cm, конструиши дуж AB, чија је дужина

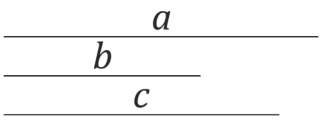
а) $2\sqrt{3}$ б) $3\sqrt{2}$

Конструиши тачку C на дужи AB тако да важи: AC : CB = 3 : 4.

Задатак 4: Ако су задате дужи *a, b* и *c*, конструиши дуж *d* тако да важи:

а) $a : b = c : d$

б) $a : b = d : c$



Задаци, свакако могу бити и пуно интересантнији. Промер таквог задатка је следећи.

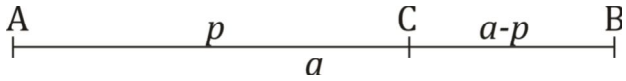
Задатак 5: Деда Милоје и његов унук Драган су се често надмудривали у решавању математичких мозгалица и практичном решавању задатака. Тако је једном приликом унук Драган поставио деди питање: „Деда Милоје, могао ли би ти да ми измериш висину овог ораха у нашем дворишту“. Деда је одговорио: „Могао бих сигурно, али не када се теби прохте већ када за то дође време.“ Унуку није било баш јасно шта деда смера, али је знатижељно посматрао деду, који је поставио свој штап према Сунцу, држећи га усправно и дуго седео на столичици. Једног тренутка је приметио да је сенка ораха дошла тачно до кућног прага. Тада је узвикнуо: „Сада је дошло време када ће се висина ораха показати сама.“ Извадио је метар из џепа и измерио тачно 135 cm, дужину сенке свог штапа. Некада давно посадио је орах тачно 12m од кућног прага, јер ближе није добро за кућу. Унук Драган је још гледао са чуђењем деду, све док деда Милоје није рекао: „Орах је висок тачно 8 метара!“ Унук је упитао: „Како си деда тако сигуран?“ Деда само рече: „Сигуран сам исто толико као што овом мом штапу треба да порасте још 10 cm, па да буде тачно метар“. Да ли је деда Милоје тачно одредио висину? Може ли и Драган то да провери сам?

Деда Милоје је применио исти метод као и Талес, много векова пре, када је прво измерио димензије основе Велике пирамиде у Гизи (ширина основе пирамиде), да би одредио удаљеност врха пирамиде од ивице, па затим дужину сенке саме пирамиде и коначно дужину сенке свог штапа и тако израчунао висину пирамиде од 138,5 метара.

Појам **златног пресека** је свакако један од оних који су добродошли у свакој причи о сличности и изазива редовно велико интересовање код ученика. И не само ученика.

„Геометрија има два велика блага: једно је Питагорина теорема, а друго је златни пресек. Прво се може поредити са чистим златом, а друго са драгуљем непроценљиве вредности.“ Johannes Kepler, Mysterium cosmographicum (Свемирска тајна), 1596. год.

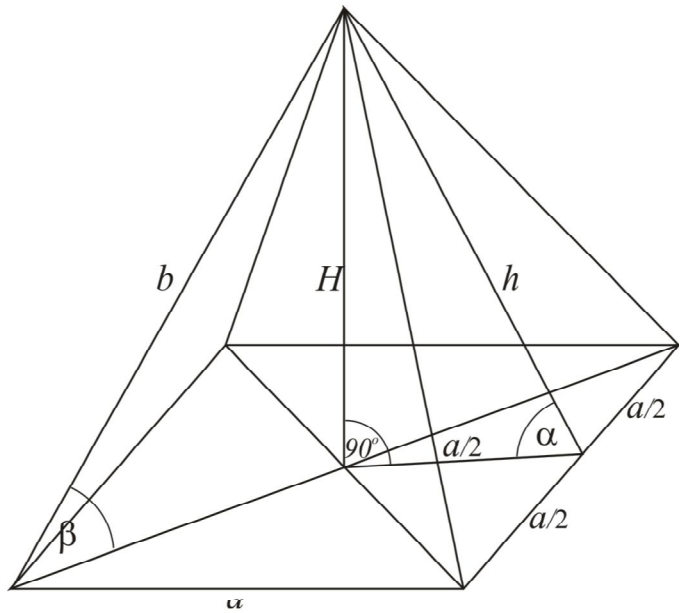
Дуж AB је тачком C подељена у размери златног пресека ако се цела дуж према свом већем делу, односи као већи део према мањем делу: $AB : AC = AC : CB$



$$\frac{a}{p} = \frac{p}{a-p} = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

ИСТОРИЈАТ ОТКРИЋА ЗЛАТНОГ ПРЕСЕКА:

СТАРИ ЕГИПАТ



ХЕРОДОТ (484. – 424. п.н.е.)
„Један египатски свештеник ми је споменуо говорећи о облику Кеопсове пирамиде, да је квадрат њене висине (висина пирамиде H) једнак површини бочне стране (троугао који је део омотача)“.

Директна последица те особине пирамиде је:

$$h : a/2 = \varphi = 1{,}618...$$

Односно низ занимљивих једнакости у којима се појављује размера златног пресека φ:

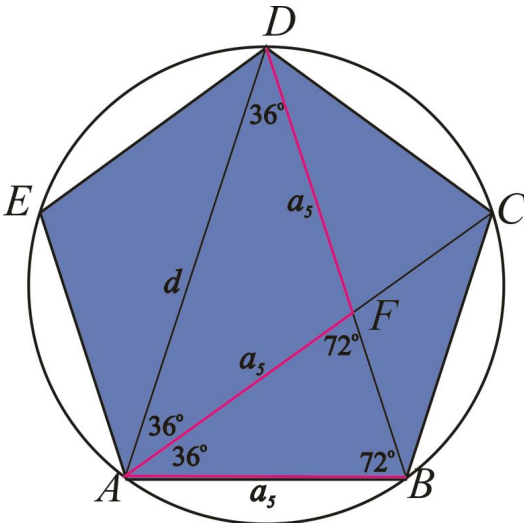
$H = \frac{a}{2}\sqrt{\varphi}$ висина пирамиде (H)

$b = \frac{a}{2}\sqrt{\varphi + 2}$ бочна ивица (b)

$\alpha = arctg\sqrt{\varphi}$ нагибни угао бочне стране према равни основе (α)

$\beta = arctg\sqrt{\frac{\varphi}{2}}$ нагибни угао бочне ивице према равни основе (β)

АНТИЧКА ГРЧКА



Питагорејци (око 500. г.п.н.е.), као најзначајнија група математичара, односно неприкосновени ауторитети за математику у читавој античкој Грчкој, долазе до једног од најважнијих открића у математици:

„Дијагонала и страница правилног петоугла су несамерљиве величине.“

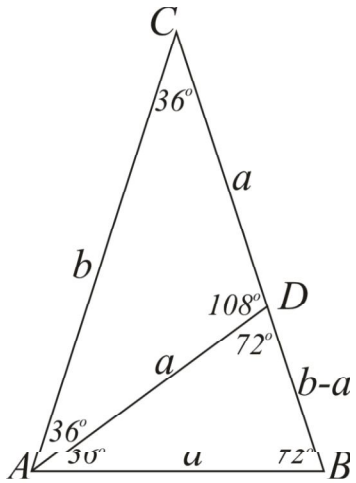
$$d : a_5 = \varphi : 1$$

На основу сличности троуглова ΔABD и ΔBFA је:

BD : AB = AB : BF.

Троугао ΔADF је једнакокраки па је AF = DF = AB и директно следи: BD : DF = DF : BF, што значи да тачка F дели дуж BD у златном пресеку.

Специјално, у сржи претходног открића налази се јединствени једнакокраки троугао са углом при врху од 36° и угловима на основици двоструко већим од 72°. Његова јединственост је у томе што се може поделити на два једнакокрака троугла са угловима при врху од 36° и 108°. Заједничко теме тих троуглова које припада краку полазног троугла дели тај крак на два дела у златном пресеку.



<u>Еуклидов доказ да тачка D дели дуж BC у златном пресеку</u>

Ако уведемо ознаке BC = b, CD = a и DB = $b - a$ тада се добија:

|BC| : |CD| = |CD| : |DB|

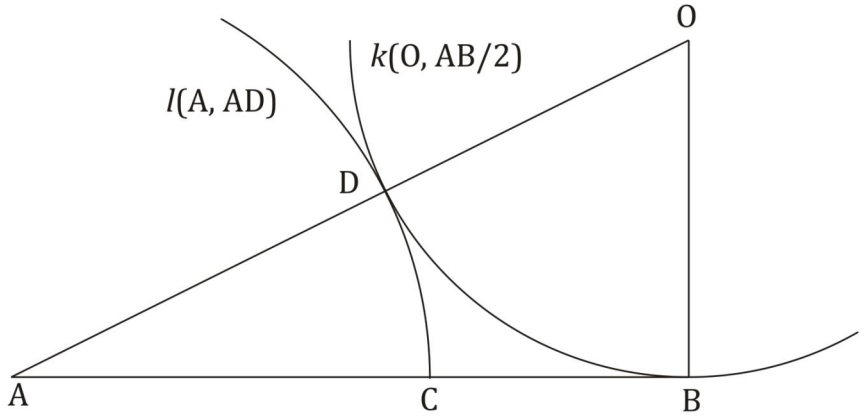
$$b : a = a : (b - a)$$

$$a^2 + ba - b^2 = 0$$

$$|CD| = a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \cdot b \quad \text{и} \quad |DB| = b - a = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot b$$

$$\frac{|CD|}{|DB|} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$$

КОНСТРУКЦИЈА ЗЛАТНОГ ПРЕСЕКА:



<u>Подела дужи AB на два дела у златном пресеку:</u>

- ⊡ конструиши нормалу у једном крају дужи нпр. тачки B и конструиши на њој тачку O тако да је OB⊥AB и OB=AB/2
- ⊡ конструиши кружницу k са центром O и полупречником AB/2
- ⊡ обележи тачком D пресек дужи AO и кружнице k
- ⊡ конструиши кружницу l са центром A и полупречником AD
- ⊡ обележи пресек кружнице l са дужи AB тачком C

<u>Доказ да тачка C дели дуж AB у златном пресеку:</u>

На основу конструкције важи: AO = AD + DO, AD = AC и OD = OB = AB/2.
Применом Питагорине теореме на △ABO добија се:

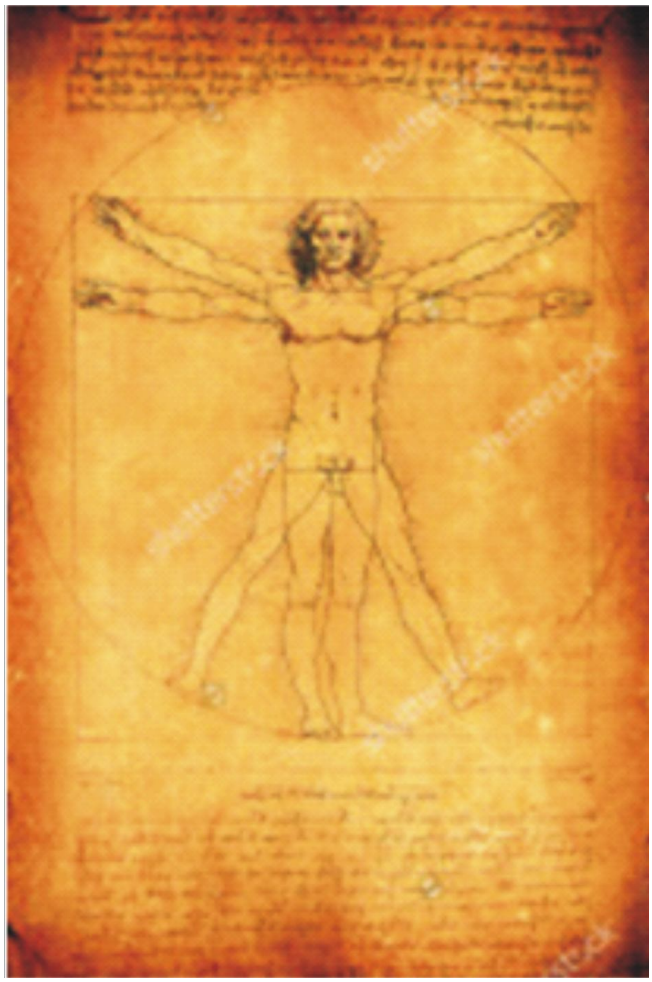
$AO^2 = AB^2 + BO^2$
$(AD + DO)^2 = AB^2 + BO^2$
$(AD + AB/2)^2 = AB^2 + (AB/2)^2$
$AD^2 + AD\cdot AB + AB^2/4 = AB^2 + AB^2/4$
$AD^2 + AD\cdot AB = AB^2$
$AD^2 = AB^2 - AD\cdot AB$
$AD^2 = AB\cdot(AB - AD)$
$AC^2 = AB\cdot(AB - AC)$, јер је по конструкцији AD = AC,
$AC^2 = AB\cdot BC$, пошто тачка C дели дуж AB на два дела,
AC : BC = AB : AC и кончно
AB : AC = AC : BC што је и требало доказати.

ЗАНИМЉИВОСТИ:

- Антонио Страдивари (1644. г. – 1737. г.), родоначелник најпознатије породице градитеља виолина, јер по многима најбоље концертне виолине потичу из те радионице, користио је златни пресек у изради. Дужина трупа виолине према врату је била у истој размери као и дужина целе виолине према трупу.

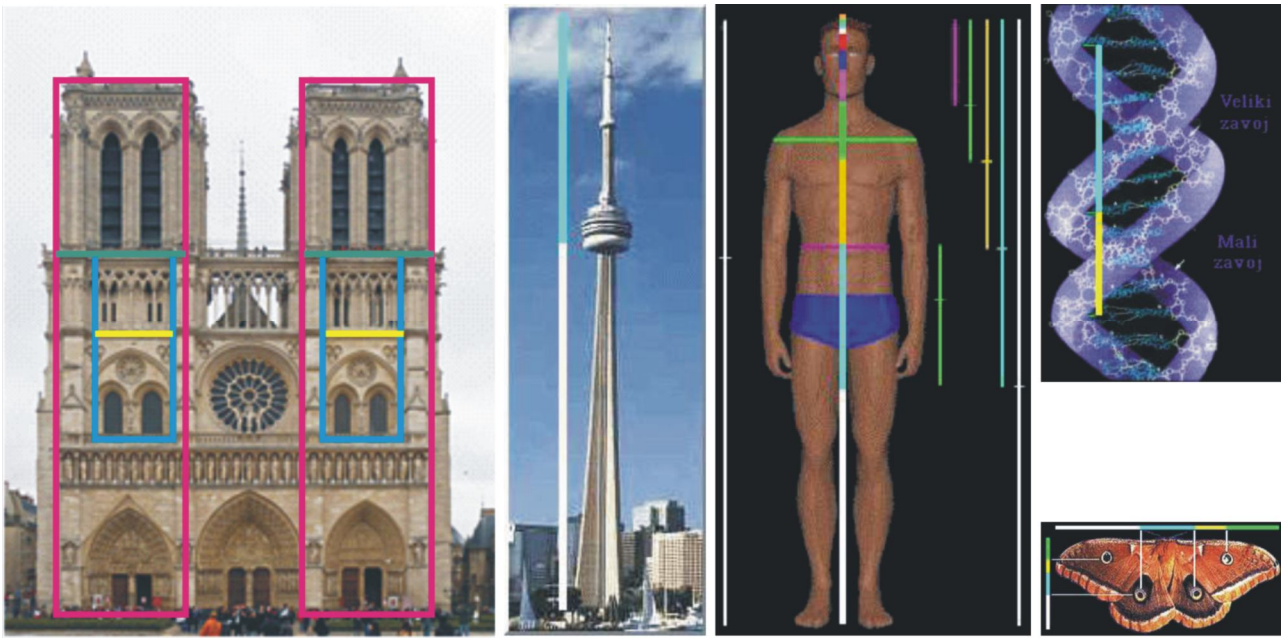
- Леонардо да Винчи (1452. г. – 1519. г.) генијални ренесансни архитекта, проналазач, вајар, сликар, својом сликом Витрувијанског човека величао је склад људског тела, које је у складу са златним пресеком. Прецизније, говорио је, треба измерити човекову висину и затим поделити са дужином од пода до човековог пупка и добићете божански број $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, број складнији од свих других.

  Корист тог Леонардовог открића, које је он користио у многим својим уметничким делима имамо и ми данас. Без његовог одушевљења златним пресеком, коме је додељивао и мистична значења, били бисмо ускраћени за готово мистичну лепота једне Монализе или Сикстинсте капеле.



- Златни пресек користио се у архитектонским решењима за изградњу многих светски важних грађевина, као што су Партенон у Акропољу (Атина),

или катедрала Нотр Дам (Париз), Олимпијски торањ, али и на крајње неочекиваним местима као што је ДНК (дезоксирибонуклеинска киселина), или чудесно лепе шаре лептирових крила, као и пропорције складно грађеног људског тела.



Примери задатака у којима се користи златни пресек:

Задатак 1: Ако је дуж AB тачком C подељена у златном пресеку и дужина дужи AB је 10cm, израчунај дужине дужи AC и CB.

Упутство: Треба применити конструкцију за поделу дужи на два дела у златном пресеку и наведене једнакости за тако добијене делове.

Рачун са ирационалним обликом за $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ је сложенији рачун,

па се може користити и приближна вредност за $\varphi \approx 1{,}618$.

Задатак 2: Конструиши правоугли троугао ΔABC, ако је хипотенуза према једној од катета у размери златног пресека, а дужина хипотенузе је AB = 12cm. Израчунај површину тог троугла.

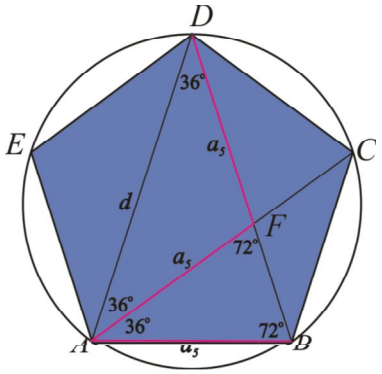
Задатак 3: Конструиши правугаоник и израчунај његову површину ако је његов обим 52,36cm, а дужине страница се односе у златном пресеку. ($\varphi \approx 1{,}618$)

Задатак 4: Конструиши правилан петоугао ABCDE, ако је његов обим 25cm. ($\varphi \approx 1{,}62$)

Задатак 5: Конструиши правоугли троугао ABC са правим углом код темена C, ако је збир катета 12cm, а њихове дужине се односе у размери златног пресека.

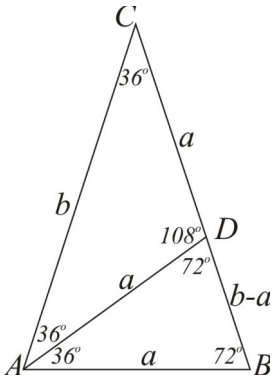
Задатак 6: Конструиши правилан петоугао коме је дијагонала d=6cm.

Упутство: Погледај скицу десно. Дијагоналу треба поделити у златном пресеку. Већи од добијених делова је страница петоугла.

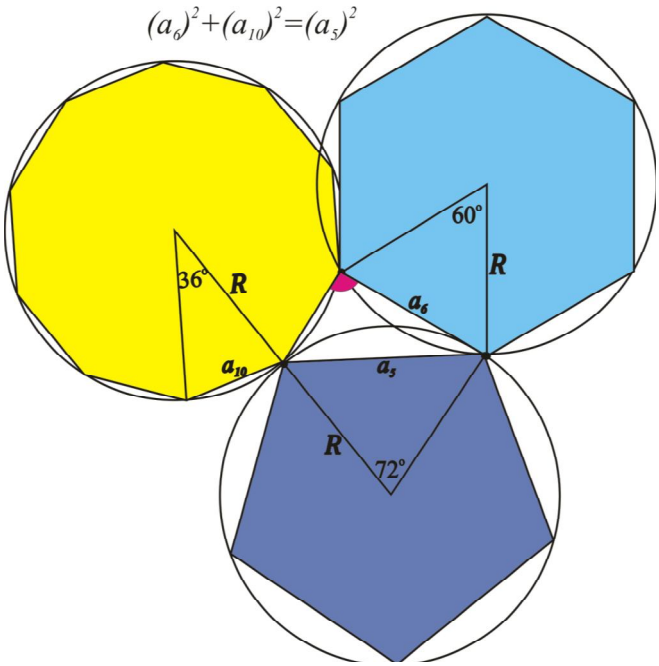


Задатак 7: Конструиши правилан десетоугао коме је полупречник описане кружнице R=8cm.

Упутство: полупречник R описане кружнице и страница a правилног десетоугла односе се уразмери златног пресека па треба користити „златни троугао“. Тачка C је центар описане кружнице, а $b = 8cm$.



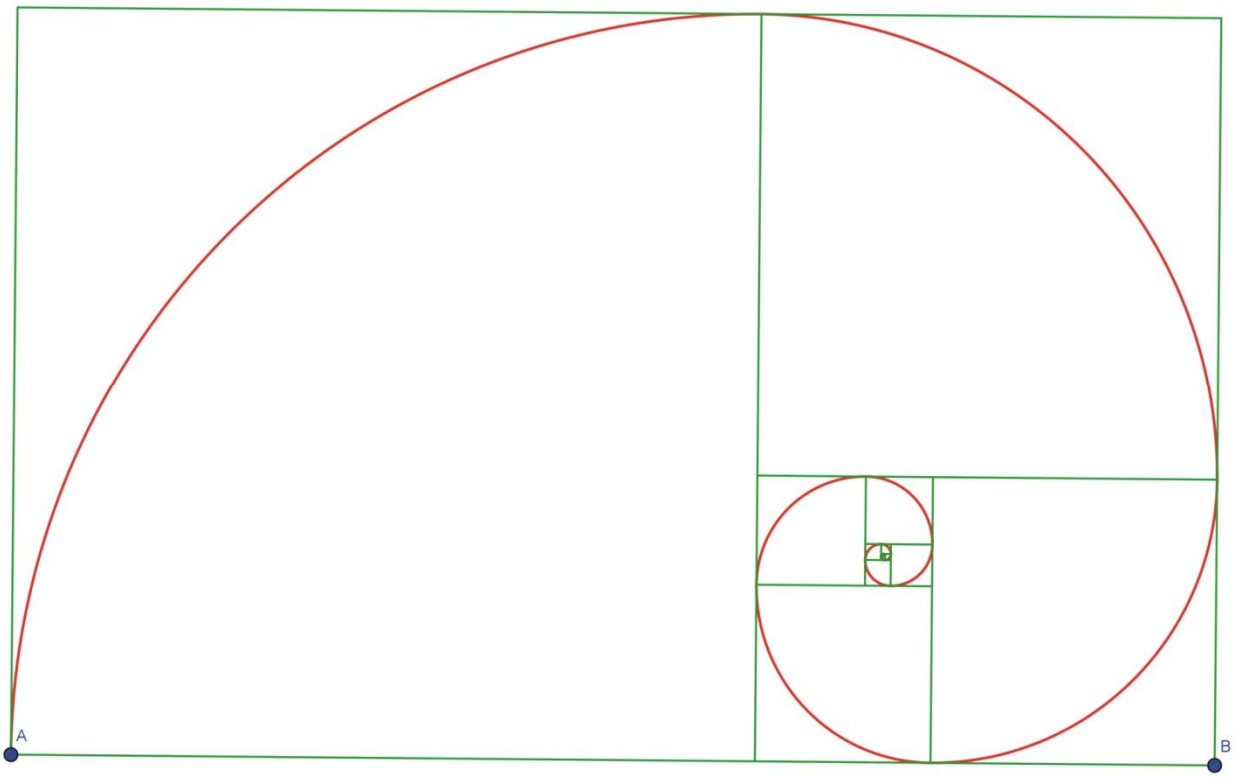
Задатак 8: Конструиши правилан петоугао, ако је позната дужина странице правилног десетоугла a_{10} и оба многоугла имају исти полупречник описане кружнице.



"Нестандардна конструкција"

Задатак 9: Конструиши спиралу коришћењем златног пресека.

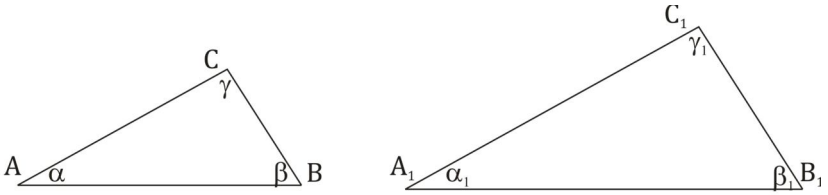
Упутство: Погледај скицу доле. Потребно је конструисати т.з.в. „златни правоугаоник", чије дужине страница су у размери златног пресека, тако да је подељен на квадрат и правоугаоник који се даље дели у златном пресеку. У све квадрате треба уписати четвртину кружнице.



Сличност троуглова.

- Два троугла ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ су слична (записује се $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$) ако су им парови одговарајућих страница пропорционални и одговарајући углови подударни.
- Дакле, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ ако важи:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \quad \text{и} \quad \alpha = \alpha_1,\ \beta = \beta_1 \ \text{и}\ \gamma = \gamma_1$$

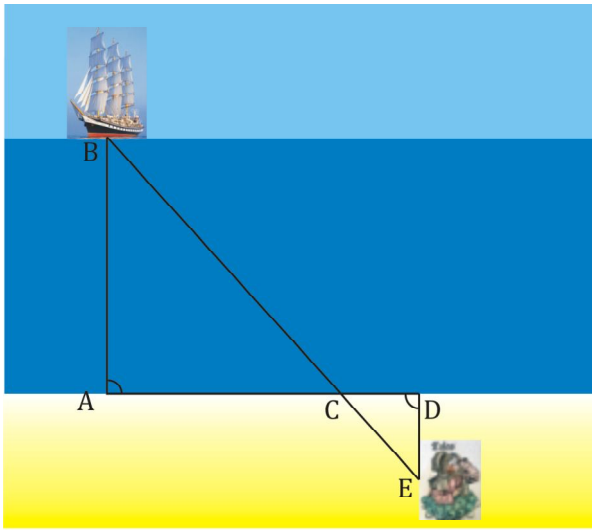


- Да би два троугла била слична довољно је да су им одговарајући унутрашњи углови подударни.
- Да би два троугла била слична довољно је да су им парови одговарајућих страница пропорционални.
- Обими сличних троуглова су у истој размери као и странице.
- Површине сличних троуглова су у размери једнакој квадрату размере страница.

Применом сличности троуглова могу се решити многи свакодневни проблеми са којима се суочавамо. Један од примера је већ спомињано израчунавање висине неких неприступачних и високих објеката, као што су пирамида, дрво, торањ, зграда и слично.

Још у давна времена Талес је утврђивао удаљеност бродова од обале.

- Уочио је сличност троуглова ABC и DEC.
- Мерио је дужине дужи AC, CD и DE.
- Користио је пропорцију AB : DE = AC : CD где је једина непозната величина AB, управо потребна удаљеност брода од обале.
- Ако је на пример AC=47m, CD=10m и DE=10m, тада добијамо AB=47m, па је бродић удаљен од обале 47m.



Модел једног огледног часа:

- Једна група ученика је потребно да припреми уже које би било дужине 12m, такво да је на сваком метру направљен уочљив чвор, по угледу на неимаре из древног Египта који су, по предању на тај начин добијали прав угао и помоћу нама познате Питагорине тројке (3, 4, 5), слагали камене блокове тешке и преко 2 тоне, правећи монументалне грађевине, од којих су нама најпознатије пирамиде.

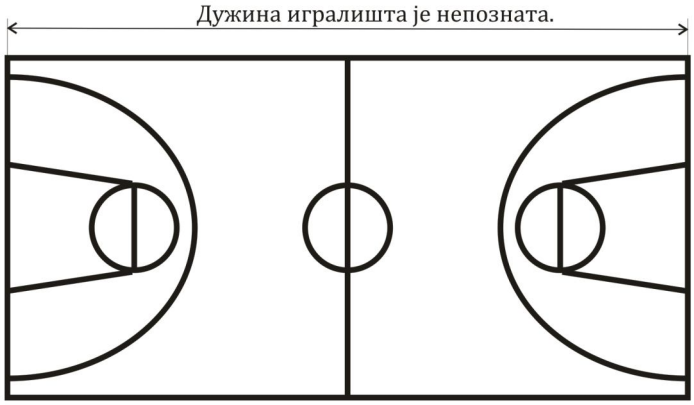
- Друга група ученика треба да обезбеди пантљику за мерење коју најчешће користе грађевински инжењери и геометри.

- Трећа група ученика би требала да припреми теодолитске штапове (пикети или маркице) или обрађене летве, дужине не мање од 2m.

- Четврта група ученика би била задужена за израчунавање, односно за обраду добијених вредности мерењем

- У готово свим школским двориштима постоје спортска игралишта, која су боље окружење од спорских сала за место извођења часа. Отворени простор остављаја јачи утисак на ученика да се решава неки реалан проблем.

- Задатак се своди на утврђивање растојања између паралелних линија којима је обележено игралиште. Први циљ би био утврђивање дужине игралишта, помоћу примене сличности троуглова, а резултат би се проверио мерењем пантљиком.



- Потребно је поставити једну летву на леву ивицу игралишта (тачка D), а другу на рецимо угао друге стране игралишта (тачка B). Трећу летву треба помоћу ужета поставити тако да буде под правим углом удаљена од тачке D тачно 4m, а то се

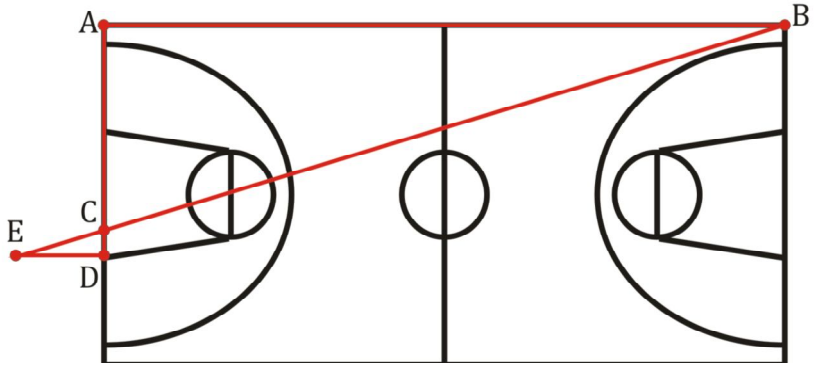
постиже тако што прва три метра ужета затегнемо по ивици игралишта, а следећа четири метра од тачке D затежемо ван игралишта, тако да се последњи чвор поклопи са почетним чвором. Ту тачку ћемо обележити са E и код ње поставити вертикалну летву, са провером вертикалног положаја из више праваца (нормалност праве и равни т.ј. Кошијева теорема о нормалности праве и равни). Тачку C треба утврдити тако да дође до потпуног поклапања правца (колинеарност три тачке) тачака E, C и B (односно летви које су на тим замишљеним тачкама). Сада је преостало да измеримо растојање између летви постављеним на позицијама тачака A и C односно C и D. Добијене мере треба предати ученицима четврте групе, а они на основу пропорције:

$$AB : AC = DE : DC$$

израчунају растојање између тачака A и B односно одреде дужину игралишта.

- Последњи део би требао да буде мерење пантљиком дужине игралишта и упоређивање са израчунатом вредношћу.

- На реализованом часу по овом сценарију, израчуната вредност за дужину кошаркашког игралишта је 26m56cm, на основу мере за AC=10m16cm и CD=1m53cm. Пантљиком измерена дужина је била 26m50cm, што се разликује за 6cm. Мала разлика је одушевила ученике и значајно „подигла“ значај математике у њиховим очима, што свакако не треба сматрати за безначајно запажање.



- На сличан начин могу се наставити активности по наведеној процедури за утврђивање раздаљине између неких других линија на спортском терену.

- Улога наставника на овом часу, свакако, као и на било ком другом часу је нејбитнија да би се постигли жељени циљеви часа. Добра припрема и упућеност свих група, на које су ученици одељења подељени је јако битна. Прецизност у постављању летава и у мерењу је од највишег значаја да би добијени резултат био ученицима уверљив. У случају неке веће непрецизности у обављању задатка било које од група ученика, постиже се супротан, негативан ефекат који рађа сумњу код ученика у најширем смислу у значај математике уопште.

Ученицима не треба давати потврду увреженог мишљења: „Ако не ради, то је физика. Ако смрди, то је хемија. Ако ничему не служи то је математика.“

Примери задатака у којима се користи сличност троуглова:

Задатак 1: Заокружи тврђења која су тачна и образложи их:

а) Свака два једнакостранична троугла су слична
б) Свака два једнакокрака троугла су слична
в) Свака два правоугла троугла су слична
г) Свака два једнакокрака правоугла троугла су слична
д) Свака два подударна троугла су слична
ђ) Свака два слична троугла су подударна

Задатак 2: У једнакокраком троуглу ABC један унутрашњи угао је 57°, а у другом једнакокраком троуглу PQR је један унутрашњи угао 66°. Заокружи тврђење које је тачно и образложи га:

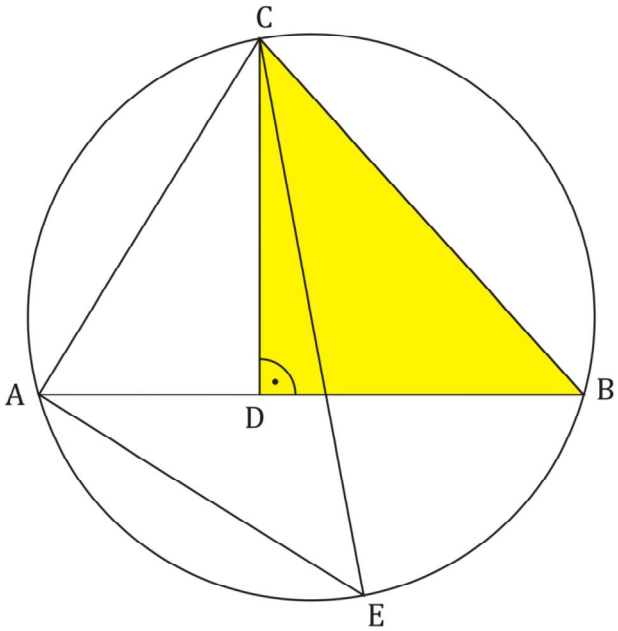
а) Троуглови сигурно нису слични
б) Троуглови сигурно јесу слични
в) Троуглови троуглови могу бити слични

Задатак 3: Два правоугла троугла ABC и PQR су слична. Странице првог троугла су дужина: 10cm, 26cm и 24cm, а хипотенуза другог троугла је 39cm. Израчунај дужине катета троугла PQR.

Задатак 4: Два троугла ABC и $A_1B_1C_1$ су слична. Странице троугла ABC су дужина: $\frac{30}{7}$cm, $\frac{50}{7}$cm и $\frac{60}{7}$cm, а обим другог троугла је 120cm. Израчунај дужине страница троугла $A_1B_1C_1$.

Задатак 5: Катете правоуглог троугла су 10cm и 20cm. Ако је површина њему сличног троугла 4 пута већа, израчунај дужине катета тог троугла.

Задатак 6: Око троугла ABC је описана кружница (слика десно) и на њој је тачка E дијаметрално супротна са теменом C. Тачка D је подножје висине из темена C на станицу AB.



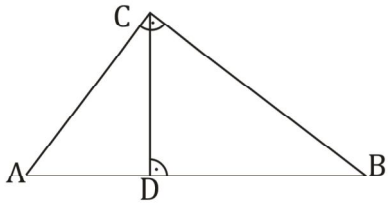
а) Докажи: △ACE~ △BCD.

б) Докажи једнакост:

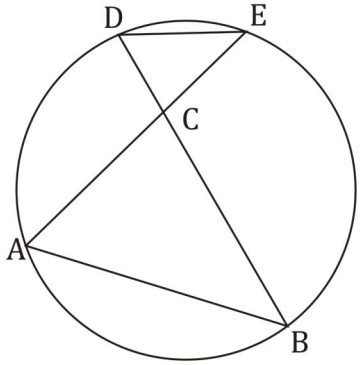
$$a \cdot b = 2 \cdot R \cdot h_C$$

в) Докажи једнакост: $4 \cdot P = \frac{a \cdot b \cdot c}{R}$

Задатак 7: Дат је правоугли $\triangle ABC$, коме су дужине катета $AC=6cm$ и $BC=8cm$. Израчунај дужину висине из темена C, као и удаљеност подножја висине из темена C од темена A и B, односно дужине дужи AD и BD.



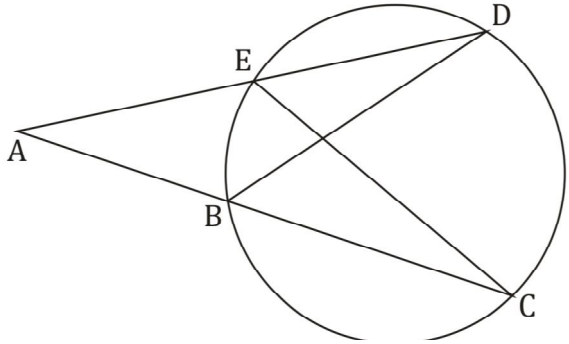
Задатак 8: Докажи да је $\triangle ABC$ сличан са $\triangle DEC$.
(слика десно)



Задатак 9: Дужине страница $\triangle ABC$ су: 8cm, 10cm и 14cm. Израчунај дужине њему сличног троугла $\triangle PQR$ ако је:

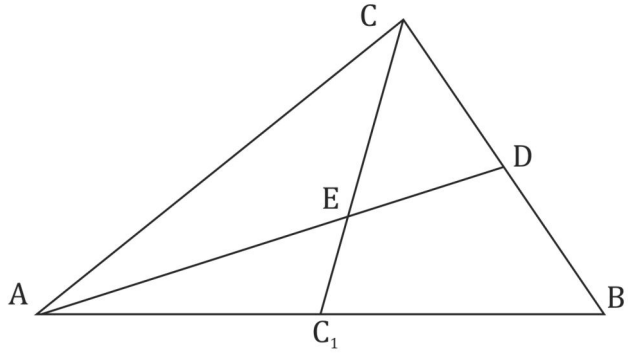
а) дужина најдуже странице троугла $\triangle PQR$ једнака 14cm;
б) обим троугла $\triangle PQR$ једнак 80cm;
в) разлика најдуже и најкраће странице троугла $\triangle PQR$ једнака 6cm.

Задатак 10: Докажи да је троугао $\triangle ACE$ сличан са троуглом $\triangle ABD$.
(слика десно)
Докажи једнакост:
$AB \cdot AC = AE \cdot AD$



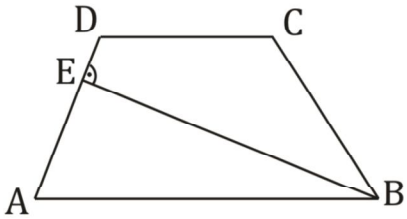
Задатак 11: Конструиши ΔABC ако је $AC=6cm$, $BC=4cm$ и $\gamma=60^o$. На страници BC конструиши тачку D такву да је $BD : DC = AB : AC$.

Задатак 12: Права која садржи теме A троугла ABC сече страницу BC у тачки D, тако да је $BD : CD = 2017 : 2018$. Тежишна дуж CC_1 сече праву AD у тачки E.
Одреди размеру дужи CE и EC_1.



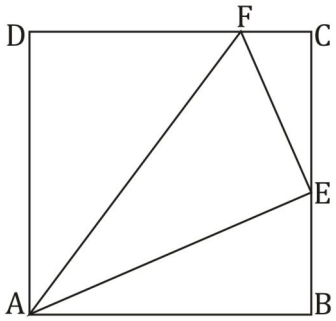
Решење: Ако је тачка F таква да је C-E-F и $|EC_1| = |C_1F|$ троуглови ΔFBC и ΔEDC су слични па важи $|FE| : |EC| = 2017 : 2018 = 4034 : 4036$ из чега директно следи $|C_1E| : |EC| = 2017 : 4036$

Задатак 13: Однос основица трапеза ABCD је AB : CD = 2 : 1. Пресек нормале из темена B на праву AD је тачка E. Докажи да је CE = CB.

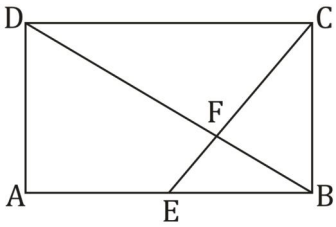


Задатак 14: Тачка E припада страници BC, а тачка F страници CD квадрата ABCD. Ако је EF=6cm, AF=10cm и AE=8cm, одреди површину квадрата.

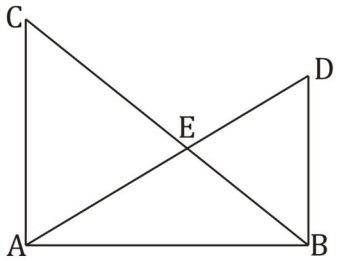
Решење: $\Delta ABE \sim \Delta ECF$ па је AB = 4BE односно $AB=32/\sqrt{17}$cm P = $1024/17\text{cm}^2$.



Задатак 15: Тачка E је средиште странице AB правоугаоника ABCD, а тачка F пресек дужи BD и CE. Ако је BF=3cm и CF=4cm израчунај дужине страница тог правоугаоника.



Задатак 16: Хипотенузе BC и AD правоуглих троуглова $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$, секу се у тачки E. Ако је AC=8cm и BD=6cm, израчунај растојање од тачке E до дужи AB.



Задатак 17: Израчунај површину круга описаног око једнакокраког троугла чији је крак дужине 12cm, а висина која одговара основици 9cm.

Решење: Ако је D средиште основице AB, а E средиште крака BC и O центар описане кружнице, лако се добија $\Delta ADC \approx \Delta OEC$, па је CO = 8cm и P = $64\pi\text{cm}^2$.

Задатак 18: Нека је M тачка странице AB паралелограма ABCD, а N тачка пресека дужи AC и DM. Ако је |AM| : |MB| = 1 : 2, израчунати однос површина троугла AMN и паралелограма ABCD.

Решење: $P_{AMD} : P_{ABCD} = 1 : 6$ и $P_{AMN} : P_{NCD} = 1 : 9$ па одатле следи $P_{AMN} : P_{ABCD} = 1 : 24$

Задатак 19: Нека је O тачка пресека дијагонала AC и BD трапеза ABCD коме су основице AB=a и CD=b. Одреди однос површина троугла ABO и трапеза ABCD.

Решење: Из сличности троуглова ABO и CDO са коефицијентом пропорционалности $k=\frac{a}{b}$ добија се $P_{ABO} : P_{ABCD} = a : (a + b)$.

Задатак 20: Нека је ABC дати троугао и тачке D, E и F припадају редом правама AB, BC и CA са распоредом A-B-D, B-C-E и C-A-F. Ако је |BD| : |AB| = 2 : 1, |CE| : |BC| = 3 : 1, |AF| : |CA| = 4 : 1 израчунај размеру површина троуглова ΔDEF и ΔABC

Решење: $P_{\Delta DEF} : P_{\Delta ABC} = 1 : 36$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Икодиновић, С. Димитријевић: Математика 7 - уџбеник; ''Клет''- Београд, 2012.
2. Н. Икодиновић, С. Димитријевић и др.: Математика 7 - збирка; ''Клет''- Београд, 2012.
3. В. Мићић, В. Јоцковић, Ђ. Дугошија, В. Андрић: Математика за 7. разред основне школе; "Завод за уџбенике" – Београд, 2011.
4. Н. Икодиновић, С. Димитријевић: Математика 8 - уџбеник; ''Клет'' - Београд, 2013.
5. В. Мићић, В. Јоцковић, Ђ. Дугошија, В. Андрић: Математика за 8. разред основне школе; "Завод за уџбенике" – Београд, 2011.
6. Н. Икодиновић, С. Димитријевић и др.: Математика 8 - збирка ''Клет''- Београд, 2013.
7. Друштво математичара Србије: Материјал са семинара о сличности; Београд, 2003.
8. Н. Икодиновић: Математика – уџбеник са збирком задатака за први разред гимназија и средњих стручних школа, ''Клет''- Београд, 2013.
9. П. Миличић, В. Стојановић, З. Каделбург, Б. Боричић: Математика за први разред средње школе, "Завод за уџбенике" – Београд, 1992.
10. Ж. Ивановић, С. Огњановић: Математика 1 – збирка задатака и тестова за први разред гимназија и техничких школа, ''Круг'' – Београд 2004.
11. В. Стојановић: Mathematiskop 3 збирка решених задатака за први разред средњих школа, „ИП Математископ“, Београд 2007.
12. В. Богославов: Збирка решених задатака из математике 1, "Завод за уџбенике" – Београд, 2006.
13. Љ. Вуковић, Д. Ђорић, П. Младеновић: Припремни задаци за математичка такмичења ученика 7. и 8. разреда, „ДМС“, Београд, 2006.
14. Друштво математичара Србије: Билтени са такмичења ученика основних и средњих школа.
15. Друштво математичара Србије: Математички лист, година XLI - L

Контакт: dragoljub64@gmail.com,
milosavmilenkovic1@gmail.com