ДРУШТВО МАТЕМАТИЧА СРБИЈЕ

ДРЖАВНИ СЕМИНАР 2018.

о настави математике и информатике
у основним и средњим школама

ТЕМА:

ПРИРОДНИ БРОЈЕВИ – ДИВНИ СВЕТ ВЕЛИКИХ МАТЕМАТИЧКИХ ТАЈНИ

АУТОРИ:

ДР ВОЈИСЛАВ АНДРИЋ,
ИВАНКА ТОМИЋ,
ВЕЉКО ЋИРОВИЋ.

БЕОГРАД,
11. 2. 2018.

САДРЖАЈ

ТЕМА 1.
ПРИРОДНИ БРОЈЕВИ

Структуру природних бројева уводимо као уређену тројку $(N,', 1)$, где је N непразан скуп, ' операција дужине један и 1 константа из скупа N, тако да важи

(P1) $(\forall x)(1 \neq x')$; (1 није следбеник ниједног природног броја)
(P2) $(\forall\, x, y)(x' = y' \Rightarrow x = y)$; (Ако су следбеници два броја једнаки онда су та два броја једнаки)
(P3) (Аксиома индукције) Ако је $M \subseteq N$ који задовољава услове
  (1) $1 \in M$;
  (2) $(\forall x)$ $(x \in M \Rightarrow x' \in M)$ онда је $M = N$.
Елементе скупа N називамо природним бројевима.

Посебно је значајна аксиома (P3) на основу које следи важан:

ПРИНЦИП МАТЕМАТИЧКЕ ИНДУКЦИЈЕ

Нека је T(n) тврђење које зависи од природног броја n, тако да важи:

1) T(1) је тачно тврђење.
2) За свако n, ако је T(n) тачно, онда је и T(n') тачно тврђење.

Тада је T(n) тачно тврђење за све приордне броје n.

ДЕФИНИЦИЈА САБИРАЊА И МНОЖЕЊА У *N*

У $(N,', 1)$ дефинишемо бинарне операције сабирања и множења на следећи начин:

$$x + 1 = x';$$
$$x + y' = (x + y)';$$
$$x \cdot 1 = x;$$
$$x \cdot y' = (x \cdot y) + x;$$

ВАЖНЕ ОСОБИНЕ

- Ниједан природни број није једнак свом следбенику.
- Број 1 је једини елеменат скупа N који није следбеник ниједног природног броја.
- За свака два природна броја m и n, збир m + n и производ m · n су једнинствеено одређени природни бројеви.
- За свака три природна броја x, y i zважи:
  (1) $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
  (2) $x + (y + z) = (x + y) + z$
  (3) $x + y = y + x$
  (4) $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$
  (5) $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$
  (6) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
  (7) $x \cdot y = y \cdot x$.

ТЕМА 2.
ПРОСТИ БРОЈЕВИ

ДЕЉИВОСТ

Нека су *m* и *n* природни бројеви. Кажемо да број *m* дели број *n* ако постоји природан број *t* такав да важи: ***mt* = *n*.**

Записујемо: $m \mid n$ (број *m* дели број *n*).

Природни број *n* је **прост** ако је већи од 1 и дељив једино бројевима 1 и *n*.

Сваки природни број је дељив неким простим бројем.

ЕУКЛИДОВ АЛГОРИТАМ

Еуклидов алгоритам је ефикасан начин за одређивање највећег заједничког делиоца два природна броја, који не захтевањихову претходну факторизацију. То је најстарији нетривијални алгоритам који је преживио до данас. Први пут се у писаном облику појављује у Еуклидовим „Елементима“ (300. г.пр.н.е.). Иако се налази у Еуклидовим „Елементима“, верује се да алгоритам није његово дело, већ да је био познат више од 200 година раније.

Теорема. [Теорема о дељењу са остатком] За произвољан природан број b и цео број a постоје јединствени цели бројеви q и r такви да је $a = qb+r$, $0 \leq r < b$. Број q је количник, а r је остатак при дељењу са b.

Нека су a и b цели бројеви. Цео број d зовемо заједничким делиоцем бројева a и b ако је $d \mid a$ и $d \mid b$. Ако је бар један од бројева a и b различит од нуле, онда постоји само коначно много заједничких делилаца бројева a и b. Највећи мњђу њима назива се највећим заједничким делиоцем бројева a и b и обележава са NZD(a,b) или gcd(a,b).

Теорема. Нека су a, b, q i r цели бројеви такви да је $b > 0$, $0 \leq r < b$ и $a = bq + r$. Тада је NZD(a,b) = NZD(b,r).
Теорема. [Еуклидов алгоритам] Нека су и природан број, тада према теореми о дељењу са остатком важи следећи низ једнакости:

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1, & 0 &\leq r_1 < b \\ b &= r_1 q_2 + r_2, & 0 &\leq r_2 < r_1 \\ r_1 &= r_2 q_3 + r_3, & 0 &\leq r_3 < r_2 \\ &\dots \\ r_{n-2} &= r_{n-1} q_n + r_n, & 0 &\leq r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} &= r_n q_{n+1}, & r_{n+1} &= 0. \end{aligned}$$

Пример 1. Користећи Еуклидов алгоритам одредити NZD(114, 522).

Теорема. Ако су a и b цели бројеви, тада једначинба $ax + by = NZD(a, b)$ има бар једно целобројно решење.

Пример 2. Одредити d = NZD(222,102) и наћи целе бројеве x и y такве да је 222x+102y = d.

Пример 3. Доказати да се разломак $\frac{21n+4}{14n+3}$ не може скратити ни за један природан број n.

НАЈВАЖНИЈЕ ТЕОРЕМЕ ВЕЗАНЕ ЗА ПРОСТЕ БРОЈЕВЕ

(**Еуклид**) Постоји бесконачно много простих бројева.

(**Основни став аритметике**) Сваки природан број n, већи од 1, може се на јединствен начин представити у облику производа простих чинилаца.

Ако је p прост број и важи $p|ab$, тада је $p|a$ или $p|b$.

За произвољан број $k \in N$ постоји k узастопних сложених природних бројева.

(Мала Фермаова) Ако је p прост број и p не дели цео број a, тада је

$$a^p \equiv a(\operatorname{mod} p)$$

$$a^{p-1} \equiv 1(\operatorname{mod} p)$$

(Вилсон) Ако је p прост број, тада је $(p-1)! \equiv -1(\operatorname{mod} p)$.

ЗАДАЦИ

1. Колико има простих бројева који се не могу записати у облику збира два сложена броја?
2. Одреди прост број p и природан број n такве да је $1+2+3+...+n=p$.
3. Одредити све парове простих бројева p и q (p > q) такве да је p+q+11 дељив са p–q.
4. Одредити све ненегативне целе бројеве k за које низ бројева
$$k+1, k+2, ..., k+10$$
садржи максималан број простих бројева.
5. Одредити све природне бројеве n за које су бројеви $n+1$, $n+3$, $n+7$, $n+9$, $n+13$ и $n+15$ прости бројеви.
6. Доказати да постоји бесконачно много простих бројева облика $4n+3$.
7. Доказати да је $1997 | (1^{1997}+2^{1997}+\cdots+1996^{1997})$.
8. Доказати да је $1897 | (2903^n - 803^n - 464^n + 261^n)$, за све $n \in N$.
9. Одредити све шестоцифрене природне бројеве $(a_1a_2a_3a_4a_5a_6)_{10}$ формиране од цифара 1,2,3,4,5 и 6 тако да је свака употребљена тачно по једном и да је број $(a_1a_2...a_k)_{10}$ дељив са $k \in \{1,2,3,4,5,6\}$.
10. Доказати да међу 15 у паровима међусобно узајамно простих природних бројева већих од 1 и не већих од 2017 постоји најмање један прост број.
11. Одредите све просте бројеве p, q, r и s чији је збир прост број, а бројеви $p^2 + qs$ и $p^2 + qr$ квадрати природних бројева. (Бројеви p, q, r и s су различити.)
12. Одредити све просте бројеве p и q, такве да је $p+q=(p-q)^3$.
13. Ако су a, b и c три произвољна цела броја, тада је производ
$abc(a^3 - b^3)(b^3 - c^3)(c^3 - a^3)$ дељив са 7.
14. Доказати да је број n^4+4^n сложен за све $n \in N$ за које је $n>1$.

ФАКТОРИЗАЦИЈА, КАНОНСКИ ОБЛИК И БРОЈ ДЕЛИЛАЦА ПРИРОДНОГ БРОЈА

Теорема. Ако је прородан број n већи пд 1 онда је n прост или је производ простих чинилаца.

Канонски облик природног броја n је $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$. Бројеви $p_1, p_2, \dots\ p_k$ су прости, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ су ненегативни цели бројеви.

Теорема (Основни став аритметике). Сваки природан број већи од 1 има јединствен канонски облик.

Теорема. Нека су природни бројеви a и b дати у канонском облику $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ и $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k}$ тада $b|a$ акко за свако $i \in \{1,2,\dots,k\}$ је $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$.

Теорема. Производ НЗД(a,b) и НЗС(a,b) једнак је производу бројева a и b.

Број делилаца природног броја $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ једнак је $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k + 1)$.

Ако је природан број n потпун квадрат другог природног броја онда је број његових делилаца непаран.

ЗАДАЦИ

1. Наћи најмањи број, који помножен са 2 постаје квадрат, а помножен са 3 потаје куб неког природног броја.
2. Наћи петоцифрен природан број чија је половина квадрат, а трећина куб неког природног броја.
3. Одредити број делилаца броја $2^1 \cdot 3^2 \cdot 4^3 \cdot 5^4 \cdot 6^5$.
4. Производ два двоцифрена броја записан је само помоћу четворки. Одредити те двоцифрене бројеве.
5. Одредити двоцифрен број који има највише делилаца.
6. Одредити колико има природних делилаца број 10!.
7. Са колико нула се завршава број 2017! ?
8. Природан број n је дељив са 12 и има укупно 14 различитих делилаца у скупу природних бројева. Одредити број n .
9. Квадрат природног броја n је шестоцифрен број који се састоји (када се засебно посматрају две по две цифре) од три двоцифрена броја. Први и трећи су једнаки, а други је два пута мањи од њих. Одредити n.
10. Нека су x и y природни бројеви такви да важи $x|y^2$, $y^2|x^3$, $x^3|y^4$, $y^4|x^5$, … Доказати да важи $x = y$.
11. а) Природан број n има тачно 80 различитих делилаца у скупу N (укључујући 1 и n). Доказати да је производ свих делилаца једнак n^{40}.
    б) Природан број n има тачно 2017 различитих делилаца у скупу N (укључујући 1 и n). Доказати да је број n потпун квадрат неког природног броја.
12. Нека је $n \in N$, $n > 2$. Доказати да постоји прост број p такав да важи $n < p < n!$.
13. Доказати да се број $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ може представити на 2^{k-1} различитих начина у облику производа два узајамно проста фактора.

ТЕМА 4.
ПИТАГОРИНИ БРОЈЕВИ

4.1. ПИТАГОРИНЕ ТРОЈКЕ

ДЕФИНИЦИЈА 1: Уређена тројка природних бројева (x, y, z) је Питагорина тројка ако и само ако је $x^2 + y^2 = z^2$.

ДЕФИНИЦИЈА 2: Уређена тројка природних бројева (x, y, z) је основна Питагорина тројка ако и само ако је $x^2 + y^2 = z^2$ и ако су x, y и z узајамно прости природни бројеви.

ДЕФИНИЦИЈА 3: Уређена тројка природних бројева (x, y, z) је изведена Питагорина тројка ако и само ако је $x^2 + y^2 = z^2$ и ако је НЗД (x, y, z) = d, где је d природан број већи од 1.

ТЕОРЕМА 1. *Ако је (x, y, z) Питагорина тројка, онда је и (кx, кy, кz) такође Питагорина тројка (к је природан број).*

ТЕОРЕМА 2. *Питагориних тројки има бесконачно много.*

ТЕОРЕМА 3. *Ако је* (x, y, z) *основна Питагорина тројка, онда су x и y природни бројеви различите парности.*

ТЕОРЕМА 4. *Тројка (x, y, z) је основна Питагорина тројка, ако и само ако постоје природни бројеви m и n такви да је* $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$ *и* $z = m^2 + n^2$, *при чему је* $m > n$, *НЗД* $(m, n) = 1$ *и m и n су различите парности.*

		Основне Питагорине тројке			Изведене Питагорине Тројке					
m	*n*	*X*	*y*	*z*	*к = 2*			***к = 3***		
					x	*y*	*Z*	*x*	*y*	*Z*
2	1	4	3	5	8	6	10	12	9	15
3		12	5	13	24	10	26	36	15	39
4	1	8	15	17	16	30	34	24	45	51
4	3	24	7	25	48	14	50	72	21	75
5	2	20	21	29	40	42	58	60	63	87
5	4	40	9	41	80	18	82	120	27	123
6	1	12	35	37	24	70	74	36	105	111
6	5	60	11	61	120	22	122	180	33	183
7	2	28	45	53	56	90	106	84	135	159
7	4	56	33	65	112	66	130	168	99	195
7	6	84	13	85	168	26	170	252	39	255
8	1	16	63	65	32	126	130	48	189	195
8	3	48	55	73	96	110	146	144	165	219
8	5	80	39	91	160	78	182	240	117	273

1. Ако је (x, y, z) основна Питагорина тројка, онда је x увек дељиво са 4, y је непаран број већи од 1, а z је облика $4к + 1$. Докажи.
2. Одреди све Питагорине троуглове код којих је једна страница једнака 12.
3. Да ли постоји основна Питагорина тројка чији је елемент број 30? Да ли постоји Питагорина тројка чији је елемент број 30?
4. Докажи да су мерни бројеви обима и површине Питагориних троуглова парни бројеви.
5. Постоји ли Питагорин троугао чија је површина једнака: а) 78; b) 120?
6. Одреди Питагорин троугао чији је обим: а) 88; b) 84.
7. Колико има Питагориних троуглова код којих је мерни број површине 4 пута већи од мерног броја обима?
8. Ивице квадра су $a = 12$ и $b = 5$. Одреди трећу ивицу квадра с тако да су и ивица c и дијагонала квадра D природни бројеви.
9. Ако су a, b и c цели бројеви такви да је $a^2 + b^2 = c^2$, онда је бар један од бројева a и b дељив са 3. Докажи.
10. Докажи да једначина $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ има бесконачно много решења у скупу целих бројева, тј. докажи да Питагориних четворки има бесконачно много.
11. Докажи, да Питагориних петорки, шрсторки ... има бесконачно много.
12. Нека су a, b и с природни бројеви такви да је $a^2 + b^2 = c^2$. Докажи да је број abc дељив са 60.
13. Одреди све Питагорине троуглове чији мерни број обима је једнак мерном броју површине.
14. Ако је $к$ природан број већи од 2, онда увек постоји Питагорина тројка чији је елеменат број $к$. Докажи. Да ли тврђење важи и за основне Питагорине тројке?
15. Докажи да постоји бесконачно много правоуглих троуглова код којих је хипотенуза за 1 већа од дуже катете.
16. Да ли број правоуглих троуглова код којих се катете разликују за 1 коначан или бесконачан?

4.2. ХЕРОНОВИ ТРОУГЛОВИ

ДЕФИНИЦИЈА 1: Природне бројеве *x, y, z* називамо Хероновим бројевима ако и само ако троугао чије су странице *x, y, z* има целобројну површину. Троугао чије странице су *x, y, z* тада зовемо Хероновим троуглом.

ДЕФИНИЦИЈА 2: Херонов троугао је „прави“ Херонов троугао, ако није правоугли и ако су све његове странице различите.

ТЕОРЕМА 1. *Сви Питагорини троуглови истовремено су и Херонови.*

ТЕОРЕМА 2. *Постоји бесконачно много Херонових троуглова..*

ТЕОРЕМА 3. *Ако се “слепе” два Питагорина троугла који имају једнаку бар једну катету, добија се Херонов троугао.*

ТЕОРЕМА 4. *Формулама* $a = 4m^2 + n^2$; $b = 2m^2 + 2n^2$; $c = 6m^2 - 3n^2$ *(*m *и* n *су природни бројеви такви да је* $m > n$*) дефинисана је једна класа Херонових троуглова.*

1. Колико има Херонових троуглова који се могу разложити на два правоугла троугла чија је једна катета 20?
2. Одредити бар један прави Херонов троугао код кога су и полупречник описаног и полупречник уписаног круга природни бројеви.
3. Постоје и Херонови четвороуглови?
4. Не постоји једнакостраничан нити једнакокрако-правоугли Херонов троугао. Доказати.
5. Конструиши бар један Херонов троугао чија је: а) једна од висина једнака 10; b) једна од страница једнака 10.
6. Одредити странице бар једног правог Хероновог троугла чије висине нису цели бројеви.
7. Одредити бар један Херонов четвороугао чија је дијагонала 13.
8. Одредити бар један Херонове четвороуглове странице 12.
9. Доказати да постоји бесконачно много Херонових четвороуглова.
10. Постоји ли Херонов петоугао?
11. Доказати да постоји бесконачно много неподударних троуглова Т таквих да је:
    - дужине страница a, b и c троугла Т су узајамно прости природни бројеви;
    - површина Р троугла Т је цео број;
    - ниједна од висина троугла Т није цео број. (8. БМО 1991.)

ТЕМА 5.
ОТВОРЕНИ ПРОБЛЕМИ

5.1. ГОЛБАХОВА ХИПОТЕЗА

Пруски математичар Кристијан Голдбах је 12. јуна 1742. године писао Леонарду Ојлеру (Писмо XLIII) и предложио претпоставку:

Сваки цео број већи 2 од је могуће написати као збир три проста броја.

Он је 1 сматрао простим бројем, што су математичари касније одбацили. Модерна верзија овог првобитног Голдбаховог предлога би гласила:

Сваки цео број већи од 5 је могуће написати као збир три проста броја.

Ојлер се заинтересовао за ову тему и предложио да се ова претпоставка изрази на следећи начин:

Сваки паран број већи од 2 се може представити као збир два проста броја и чак нагласио како му ова теорема изгледа прилично очигледна мада је није доказао.

5.2. ПРОБЛЕМ ПРОСТИХ БРОЈЕВА БЛИЗАНАЦА (ДРУГИ ЛАНДАУОВ ПРОБЛЕМ)

Прости бројеви близанци су прости бројеви који се разликују за 2

(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61), (71, 73), (101, 103), (107, 109), (137, 139), (149, 151), (179, 181), (191, 193), (197, 199), (227, 229), (239, 241), (269, 271), (281, 283), (311, 313), (347, 349), (419, 421), (431, 433), (461, 463), (521, 523), (569, 571), (599, 601), (617, 619), (641, 643), (659, 661), (809, 811), (821, 823), (827, 829), (857, 859), (881, 883), (1019, 1021), (1031, 1033), (1049, 1051), (1061, 1063), (1091, 1093), (1151, 1153), (1229, 1231), (1277, 1279), (1289, 1291), (1301, 1303), (1319, 1321), (1427, 1429), (1451, 1453), (1481, 1483), (1487, 1489), (1607, 1609), (1619, 1621), (1667, 1669), (1697, 1699), (1721, 1723), (1787, 1789), (1871, 1873), (1877, 1879), (1931, 1933), (1949, 1951), (1997, 1999), (2027, 2029), (2081, 2083), (2087, 2089), (2111, 2113), (2129, 2131), (2141, 2143), (2237, 2239), (2267, 2269), (2309, 2311), (2339, 2341), (2381, 2383) …

Да ли простих бројева близанаца их има коначно или бесконачно много?

5.3. ПРОБЛЕМ НЕПАРНИХ САВРШЕНИХ БРОЈЕВА

Није познато да ли постоји иједан непаран савршен број, али ако постоји мора бити веома велик, већи од 10^{300}.