МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Државна комисија за такмичења из математике ученика средњих школа

Бојан Башић, Душан Ђукић, Марко Радовановић

Београд, 11. 2. 2018

На међународним математичким такмичењима средњошколци из Србије редовно постижу резултате на које сви можемо бити поносни. На Балканској математичкој олимпијади у Тирани (Албанија) 2016. године, Република Србија је освојила екипно прво место. Протекле године, 2017, Балканијада је одржана у Македонији, где је екипа Републике Србије потврдила да је у самом врху балканских земаља, будући да су наши ученици освојили две златне, две сребрне и две бронзане медаље, и екипно друго место, а ове године наша земља ће бити поносан домаћин Балканске математичке олимпијаде, која ће се одржати у Београду од 7. до 12. маја, где се надамо новим успесима наших ученика. На Међународној математичкој олимпијади одржаној у Рио де Жанеиру (Бразил), наша екипа је освојила врло високо 18. место у конкуренцији од 111 земаља из свих крајева света (поређења ради, на последњим спортским Олимпијским играма, такође у Рио де Жанеиру, 2016. године, Република Србија је по броју освојених медаља заузела 31. место).

Екипа која представља земљу на међународним математичким такмичењима бира се кроз низ такмичења, почев од општинског нивоа па закључно са Српском математичком олимпијадом и додатним изборним такмичењем за одабир олимпијске екипе. Наравно, сврха такмичења није само да се одабере шест најбољих ученика, већ и да код свих који учествују подстакне интересовање за математику и побуди такмичарски дух. Стога Државна комисија с пажњом припрема задатке за све нивое такмичења, трудећи се (некада с више, а понекад ипак, признајемо, с нешто мање успеха) да нађе прави баланс у погледу тежине задатака за сваки ниво, разноврсности математичких области из којих се задаци постављају итд.

Предавање ће се састојати из три целине. У првој целини биће презентован систем такмичења у земљи, разматране неке његове позитивне и негативне стране и разматран простор за побољшања. Такође ће бити анализиран учинак измена уведених у Правилник о такмичењима пред почетак претходне сезоне, нарочито у погледу избора оних шест ученика који на крају стичу част и обавезу да представљају земљу на међународним такмичењима, а које су уведене по угледу на земље које традиционално остварују високе пласмане, све са жељом да, иако можемо бити, као што је већ речено, генерално врло задовољни учинком наших ученика, искористимо сваку прилику за додатно побољшање тих резултата.

У другој целини биће презентовани одабрани задаци са свих нивоа такмичења. Биће указано на то с чим се наши ученици углавном добро сналазе а шта им често задаје проблема, биће наглашене неке лепе идеје као и неке типичне грешке итд.

Најзад, последња целина је предвиђена за дискусију. Сви предавачи су дугогодишњи чланови Комисије, међу њима су актуелни председник и потпредседник Комисије, и сви предавачи имају вишегодишње искуство с руковођењем екипе Србије на међународним такмичењима, па верујемо да се у овој целини могу јавити занимљиве теме за дискусију.

О избору олимпијске екипе

У Математичкој гимназији у Београду је 31. марта и 1. априла 2018. године одржана 11. по реду Српска математичка олимпијада. На такмичењу су учествовала 33 ученика средњих школа. Како је један од основних циљева овог такмичења избор екипе Републике Србије за међународна такмичења, пре свега за Међународну математичку олимпијаду, такмичење је осмишљено по угледу на ММО. Према томе, такмичење траје два дана, током сваког дана се раде по три задатка, при чему сваки задатак вреди по 7 бодова. Сличност са ММО не завршава се на техничким детаљима, већ се комисија труди да задаци за СМО по концепцији а и по тежини осликавају задатке са ММО, желећи да се на тај начин постигну што вернији услови, те да као последица тога буде изабрана екипа која ће заиста најбоље представити Србију на ММО.

С обзиром на чињеницу да из године у годину о избору олимпијске екипе одлучује врло мала бодовна разлика, понекад и само један бод, често се јављала потреба и за додатним изборним такмичењем, што је било нарочито упечатљиво на СМО годину дана раније, када је чак шест ученика учествовало у деоби о 4. до 9. места, приликом последње измене Правилника о такмичењима у њега је уврштен (између осталог) следећи члан:

Члан 30

На основу резултата на СМО за ученике средњих школа одређује се 6 чланова екипе за Балканску математичку олимпијаду (БМО). Осим тога, одређује се још 6 кандидата за Међународну математичку олимпијаду (ММО), при чему за избор за олимпијску екипу осим првих 12 ученика конкуришу и сви ученици који имају исти број бодова као ученик који је заузео 12. место.

По завршетку БМО, а у року предвиђеном за пријављивање екипе за ММО, организује се додатно изборно такмичење (максимално 42 бода). Бодови са СМО (максимално 42) сабирају се са бодовима са изборног такмичења. Ученицима који су у текућој школској години освојили златну медаљу на БМО на овај збир се додаје још 7 бодова, а ученицима који су освојили сребрну медаљу се додају још 3 бода. Првих 6 ученика на основу тако добијеног укупног збира чине екипу за ММО.

Након прегледа радова на последњој СМО, као најуспешнији су се показали

1. *Никола Павловић,* ученик трећег разреда Гимназије „Јован Јовановић Змај“ у Новом Саду,

2. *Марко Медведев,* ученик трећег разреда Математичке гимназије у Београду,

3. *Игор Медведев,* ученик трећег разреда Математичке гимназије у Београду,

4. *Алекса Милојевић,* ученик другог разреда Математичке гимназије у Београду,

који су сви освојили по 27 бодова, као и

5. *Јелена Иванчић,* ученица првог разреда Математичке гимназије у Београду,

са освојених 26 бодова, и

6. *Павле Мартиновић,* ученик другог разреда Математичке гимназије у Београду,

са освојених 25 бодова. Ових шест ученика су уједно представљали екипу Србије на Балканијади у Македонији. На додатно изборно такмичење позвани су још:

7. *Огњен Тошић,* ученик четвртог разреда Математичке гимназије у Београду,

8. *Милош Милићев,* ученик првог разреда Математичке гимназије у Београду,

9. *Вукашин Михаиловић,* ученик првог разреда Математичке гимназије у Београду,

10. *Милоје Јоксимовић,* ученик четвртог разреда Математичке гимназије у Београду,

11. *Владимир Виктор Мирјанић,* ученик другог разреда Математичке гимназије у Београду,

12. *Бранислав Шобот,* ученик четвртог разреда Гимназије „Јован Јовановић Змај“ у Новом Саду.

Након додатног изборног такмичења, састав екипе се унеколико изменио, те су нашу земљу у Рију (успешно) представљали Алекса Милојевић, Павле Мартиновић, Игор Медведев, Јелена Иванчић, Марко Медведев и Огњен Тошић. Више детаља о њиховом учинку даћемо у наредном одељку.

У наставку су приложени задаци са СМО и додатног изборног такмичења.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

11. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

31. март 2017.

Први дан

1. Нека су a, b и c позитивни реални бројеви за које важи $a+b+c=1$. Доказати:

$$a\sqrt{2b+1}+b\sqrt{2c+1}+c\sqrt{2a+1}\leqslant\sqrt{2-(a^2+b^2+c^2)}.$$

2. Дат је конвексан тетиван четвороугао $ABCD$. Нека се праве AD и BC секу у тачки E. На страницама AD и BC су одабране тачке M и N, редом, такве да важи $AM:MD=BN:NC$. Кружнице описане око троугла $\triangle EMN$ и четвороугла $ABCD$ секу се у тачкама X и Y. Доказати да се праве AB, CD и XY секу у једној тачки или су све паралелне.

3. У врсти се налази $2n-1$ сијалица. У почетку је средња (n-та) упаљена, а све остале су угашене. У једном кораку је дозвољено одабрати две несуседне угашене сијалице између којих су све сијалице упаљене, и променити стање тим двема сијалицама, као и свим сијалицама између њих (на пример, од конфигурације $\bullet\circ\circ\circ\bullet$ добија се $\circ\bullet\bullet\bullet\circ$.) Колико највише корака је могуће извршити?

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

11. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

1. април 2017.

Други дан

4. Нека је a природан број такав да за сваки природан број n број n^2a-1 има бар један делилац већи од 1 који даје остатак 1 при дељењу са n. Доказати да је a потпун квадрат.

5. Одредити колико се највише краљица може поставити на таблу 2017×2017, при чему свака краљица сме да напада највише једну од преосталих.

6. Нека је k кружница описана око $\triangle ABC$, а k_a приписана кружница наспрам темена A. Две заједничке тангенте кружница k и k_a секу праву BC у тачкама P и Q. Доказати да важи $\measuredangle PAB = \measuredangle QAC$.

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА УЧЕШЋЕ НА МЕЂУНАРОДНОЈ МАТЕМАТИЧКОЈ ОЛИМПИЈАДИ

21. мај 2017.

Први дан

1. Дат је $\triangle ABC$. Тачка D је средиште странице BC, а на страницама AC и AB уочене су тачке E и F, редом, такве да важи $DE = DF$ и $\measuredangle EDF = \measuredangle BAC$. Доказати:

$$DE \geqslant \frac{AB + AC}{4}.$$

2. Назовимо *кораком* функцију која уређен пар природних бројева (x, y) коме је тачно једна координата парна пресликава у пар $(\frac{x}{2}, y+\frac{x}{2})$ ако $2 \mid x$, односно у пар $(x+\frac{y}{2}, \frac{y}{2})$ ако $2 \mid y$. Доказати да за сваки непаран природан број n, $n > 1$, постоји паран природан број b, $b < n$, такав да се сукцесивном применом коначно много корака од уређеног пара (n, b) добија уређен пар (b, n).

3. За функцију $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ кажемо да је *живахна* ако за све $a, b \in \mathbb{N}$ важи

$$f(a + b - 1) = \underbrace{f(f(\cdots f}_{a \text{ пута}}(b) \cdots)).$$

Нека је g живахна функција таква да за неко $A \geqslant 2$ важи $g(A + 2018) = g(A) + 1$.

a) Доказати да је за све $n \geqslant A + 2$ испуњено $g(n + 2017^{2017}) = g(n)$.

b) Ако важи $g(A + 2017^{2017}) \neq g(A)$, одредити $g(n)$ за $n \leqslant A - 1$.

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА УЧЕШЋЕ НА МЕЂУНАРОДНОЈ МАТЕМАТИЧКОЈ ОЛИМПИЈАДИ

22. мај 2017.

Други дан

4. Квадрат $n \times n$ је подељен на јединичне квадрате. Потребно је на њега поставити одређен број једнакокрако-правоуглих троуглова хипотенузе 2, с теменима у теменима јединичних квадрата, на такав начин да свака страница сваког јединичног квадрата припада тачно једном троуглу (тј. лежи у унутрашњости или на рубу). Одредити све вредности n за које је ово могуће.

5. За дати природан број $n \geqslant 2$, нека је $C(n)$ најмања позитивна реална константа за коју постоји n реалних бројева $x_1, x_2, \ldots, x_n$ који нису сви нула и задовољавају услове:

(i) $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$;

(ii) за свако $i = 1, 2, \ldots, n$ важи $x_i \leqslant x_{i+1}$ или $x_i \leqslant x_{i+1} + C(n)x_{i+2}$ (где индексе узимамо по модулу n).

Доказати:

a) $C(n) \geqslant 2$ за све n;

b) $C(n) = 2$ ако и само ако је n паран број.

6. За дати природан број k уочимо најмањи природан број n који има тачно k делилаца. Ако је n потпун куб, да ли k може бити дељив неким простим бројем облика $3j + 2$?

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

58. Међународна математичка олимпијада 2017.

58. Међународна математичка олимпијада је одржана од 13. до 23. јула 2017. у Рио де Жанеиру у Бразилу, уз учешће 615 такмичара из 111 земаља. Екипом су руководили Душан Ђукић са Машинског факултета у Београду и Бојан Башић са Природно-математичког факултета у Новом Саду. Одлазак екипе на олимпијаду су, осим ДМС и МПНТР, финансијски подржали НИС и КПМГ.

Завршни део припрема екипе одржан је од 30. јуна до 7. јула у Хемијско-медицинској школи у Вршцу. По правилу, пре подне су држана по 4 часа предавања, док су поподне исто толико времена ученици проводили у школи, радећи на одабраним задацима – традиционална "32 задатка" и тзв. шортлисти за ММО 2016. Припреме је финансијски подржала и Математичка гимназија. Предавања су држали Душан Ђукић, Александар Пејчев и Марко Радовановић.

Рио де Жанеиро

Рио де Жанеиро, или само Рио, је други по величини град у Бразилу, са око 6,5 милиона становника. Основали су га Португалци у 16. веку на врху брда познатог као Глава Шећера, као противтежу претходно основаној француској колонији у суседству. Име града на португалском значи Јануарска река, мада се под називом "река" у овом случају свесно подразумевао залив. Значај града је порастао са откривањем злата и дијаманата у данашњем Минас Жераису. Тако је у 18. веку Рио преузео од Салвадора титулу главног града португалске колоније Бразила. Краће време почетком 19. века, током Наполеонових напада, Рио је чак био престоница португалске империје – то је јединствен случај да престоница европске државе буде у прекоокеанској колонији.

Када је 1822. године Бразил прогласио независност, Рио је остао његова престоница. Ипак, у исто време се развијао Сао Пауло, и касније претекао Рио по величини и значају. Ривалство ова два града је разрешено 1960, измештањем престонице у новоосновани град Бразилију у савани у средишњем Бразилу.

Светску славу Рио дугује пре свега свом величанственом природном окружењу, плажама као што су Копакабана и Ипанема, статуи Христа Спаситеља на брду Корковадо, и наравно карневалу и фудбалу – чувена Маракана је све донедавно била највећи стадион на свету. С друге стране, са брзим насељавањем града, на падинама брда стварала су се сиротињска дивља насеља, фавеле, те је због високе стопе криминала град доспео на лош глас. Многе фавеле су биле практично државе у држави, ван домашаја власти. Пре Олимпијских игара 2016. овде су спроведене опсежне војне и полицијске акције у покушају да се криминал искорени и насеља врате под локалну власт. С обзиром на велике класне разлике у земљи, ова решења су била (очекивано) сасвим кратког даха.

Пут до Рија је био дуг – екипа је путовала читавих 25 сати. У јулу је овде тропска зима. То не значи да је хладно – преко дана је било обично око 25 степени – али су морски таласи довољно велики да купање не представља уживање. Вође и остатак екипа били су у одвојеним хотелима у богатијој четврти на обали, удаљеној од центра. Иако смо веровали да је овде безбедно, неколико екипа су биле жртве оружане пљачке увече на плажи.

Задаци и координација

Такмичари су радили шест задатака одабраних из шортлисте од 32 задатка – први и четврти су предвиђени да буду лаки, други и пети средње тежине, а трећи и шести тешки. Задаци су и ове године изабрани по тзв. протоколу Џефа Смита. Проблемска комисија која је саставила шортлисту трудила се да не претера са тешким задацима, што је била честа замерка до 2015. С друге стране, лаки задаци су били или прелаки или напросто непривлачни, док је лакших средњих задатака било мало, а средњи задаци су неретко изгледали "чудно".

Мада се инсистира на правилу тајности шортлисте до следеће олимпијаде, ваљда није проблем констатовати да, након елиминације неколико задатака из шортлисте, није остала прихватљива средња геометрија, док је преостала средња теорија бројева некима изгледала претешко. Стичем утисак да су некадашњи противници средње геометрије усмерили свој рат на средњу теорију бројева. Тако се овакав избор задатака по областима чини изнуђеним.

- **1. задатак:** Лака теорија бројева која изгледа без везе, али у којој је лако погрешити. Петоро наших такмичара су имали комплетна решења која и поред најбоље воље обично нису успевали да сажму на мање од две-три стране. По очекивању, овде су координатори круто гледали у шему за оцењивање и ловили непрецизности ради скидања поена. Мада су тврдили да су прочитали радове, ипак смо морали да им све преводимо. Алекса је, осим бројева дељивих са 3, у коначан одговор укључио и бројеве из неког фантомског скупа, не приметивши да је тај скуп тривијално празан. Координатори су за њега нудили 5 поена, али како је шема давала 5 и за доста мање, ово смо прихватили тек након дугих расправа с њима, у уверењу да су ипак били конзистентни.
- **2. задатак:** Пад популарности неједнакости је природно наметнуо функционалне једначине као алтернативу. Жири је овај задатак сматрао релативно тешким. С друге стране, задатак је приступачан и шема је садржала 3-4 прилично јефтина поена. Нашим ученицима овакве ствари леже, па тако имамо сасвим солидна три цела решења у екипи. Остало троје имају по три поена на исте закључке (погођена решења, $f(x)=0$ акко $x=1$, $f(0)=\pm 1$ и $f(x+1)=f(x)-f(0)$), с тим да је Јелена имала и (ипак недовољне) елементе четвртог поена.
- **3. задатак:** Ово је чудна комбинаторно-геометријска загонетка, доста налик на познати проблем о човеку и лаву. Да се решење схвати довољан је минут, али да се реши, месец дана може бити мало. Задатак је урађен трагично (на читавој олимпијади освојено је само 26 поена), упркос гласним члановима жирија који су одушевљено истицали његову приступачност. Међутим, бар две ствари су овај задатак чиниле чудним. Једна је питање постојања стратегије, које је чак и на овом нивоу многим такмичарима могло бити нејасно – доказ непостојања ловчеве стратегије *не подразумева* налажење зечеве контрастратегије. Друга је потреба за посматрањем циклуса од по више (нпр. 200) корака – разматрање појединачних

корака било је потпуно бескорисно. Наравно, координација је била брза – покупили смо своје нуле и отишли.

- **4. задатак:** Класична геометрија која није прелака, али допушта разне приступе. Наши такмичари су га сви урадили, на шест различитих начина. Међутим, по сопственом признању, изгледа да су се ипак намучили. Игор је притом своје решење стрпао у коверат за 6. задатак, али због тога није кажњен. Координатори су унапред прочитали и разумели радове, те смо 42 поена добили одмах. Иначе, због површне сличности са неким задатком на аустралијском такмичењу, и овом задатку је претило искључивање са шортлисте.
- **5. задатак:** Ово је комбинаторно-алгоритамска главоломка која подсећа на 5. задатак са ММО 2014. (о кејптаунским новчићима). Мада овај задатак није тежи од 2-гог, било је јасно да нам неће одговарати, док неким другим екипама хоће. На њему су биле успешне пре свега далекоисточне екипе, а у нешто мањој мери и западне. Занимљиво је да га је на простору бивше Југославије решио само један Црногорац. Ми у екипи имамо само мрвице. Иначе, задатак је у суштини "0-7" (тј. или је решен, или није), али је чудна шема оцењивања предвидела ситне поене за поједина (не сва) нерешења која се не могу поправити. Тако је Павле по шеми добио два поена за неутемељен покушај Холовом теоремом, а Алекса и Марко по поен за неуспешне покушаје индукцијом. Координатори су се опирали, али шема оцењивања беше неумољива. Овакви парцијални поени су били веома чести.
- **6. задатак:** Званично теорија бројева, али са јаким алгебарским елементима. Није то био тако страшан задатак. Има више различитих природних решења, од којих је једно донекле имитирало конструкцију Лагранжовог интерполационог полинома, а бар два су користила индукцију без великих препрека. Ипак, ми имамо нуле, а и многи други такође. Наши такмичари нису честито ни промислили о њему. Ту битан део кривице сноси 5. задатак. Неколико земаља је боље урадило 6-ти задатак него 5-ти. Могуће да бисмо и ми били кадри да будемо међу њима – штета за ове нуле.

Резултати

Завршни састанак је трајао краће него обично. Вероватно се неко досетио да је након координације, у ишчекивању граница за медаље, (уз дужно поштовање) мало ко у стању да слуша извештаје о финансијском билансу IMO фондације. Тако је финансијски део састанка одржан после првог дана такмичења, а на завршном састанку су границе брзо дошле на ред. Било је јасно да овакви задаци нису могли да развуку поене такмичара, те ће тако велики број њих бити сконцентрисан на истим поенима (заиста, испоставило се да се чак 41% свих такмичара нагомилало у интервалу од 14 до 18 поена). Изгласана је опција са највишим границама која ово сликовито показује: 16 за бронзу, али само 19 за сребро, и рекордно ниских 25 за злато. Само шест такмичара има преко 29 поена, а тројица апсолутних победника из Ирана, Јапана и Вијетнама имају по 35 поена.

Наши резултати су овакви:

SRB 1	Алекса Милојевић	5	7	0	7	1	0	**20**	сребрна медаља
SRB 2	Павле Мартиновић	7	3	0	7	2	0	**19**	сребрна медаља

SRB 3	Игор Медведев	7	3	0	7	0	0	**17**	бронзана медаља
SRB 4	Јелена Иванчић	7	3	0	7	0	0	**17**	бронзана медаља
SRB 5	Марко Медведев	7	7	0	7	1	0	**22**	сребрна медаља
SRB 6	Огњен Тошић	7	7	0	7	0	0	**21**	сребрна медаља
Србија укупно		**40**	**30**	**0**	**42**	**4**	**0**	**116**	

Вероватно се ту и тамо могло имати и више поена, али реално гледано, нико у екипи није подбацио. Троје ученика имају практично по три задатка. Алекси се превиди попут овог у првом задатку ретко догађају, али то је надокнадио решењем другог. Павлу је онај покушај на 5. задатку донео сребро; и испис му је био пристојан – координатори су имали муке с његовим рукописом (иако пише латиницом), али ми се већ навикавамо. Осећа се да је Игор био под притиском. Није испало лоше, али ово му није максимум. Јелена је најмлађа у екипи, али то се ни по чему не види – ово је добар резултат, а сигуран сам да би убудуће могао бити и доста бољи. Марко је одлично наступио, а оно што је урадио исписао је пажљиво, не остављајући евентуалним цепидлакама прилику да га казне. Огњен је трећи пут на Олимпијади и, на страну што не брине много о детаљима у испису, било је само питање времена кад ће освојити сребро. Најзад, посрећиле су нам се и границе за медаље, па тако четири наша такмичара имају сребра.

Можда и није било много тешко поправити прошлогодишњи пласман, али наћи се поново у првих 20 је ипак успех. Ове године су уведене новине у начину избора екипе и мислимо да ови резултати показују да је то био добар потез. Не кажемо да је ова екипа "паметнија" од прошлогодишње, али је добила на форми и мотивацији. Непосредан узрок успона на листи је добро урађен други задатак: на њему имамо више поена од Кине, Америке и Русије. С друге стране, пети задатак је очигледан разлог што нисмо још бољи. Ипак, морамо приметити да је избор задатака прилично промешао екипне резултате – илустрације ради, једина екипа са Балкана која је боља од нас је, сасвим неуобичајено, Грчка, која има само поен мање од Русије. Са неким другим задацима могло је бити из корена другачије. Ми смо мала земља и зависимо од генерације, али на нама је да зависност екипних резултата од самих задатака минимизујемо.

У наставку су приложени задаци са овогодишње ММО.

Уторак, 18. јул 2017.

1. задатак. За дати природан број $a_0 > 1$, дефинишимо низ $a_0, a_1, a_2, \ldots$ тако да је за свако $n \geqslant 0$

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{ако је } \sqrt{a_n} \text{ цео број,} \\ a_n + 3, & \text{у супротном.} \end{cases}$$

Одредити све вредности a_0 за које постоји број A такав да је $a_n = A$ за бесконачно много вредности n.

2. задатак. Са $\mathbb{R}$ је означен скуп реалних бројева. Одредити све функције $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да за све реалне бројеве x и y важи

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy).$$

3. задатак. Ловац и невидљиви зец играју игру у равни. Полазне тачке зеца и ловца, редом означене са A_0 и B_0, су исте. Након $n-1$ кругова игре, зец је у тачки A_{n-1}, а ловац у тачки B_{n-1}. У n-том кругу се догађа следеће, овим редом:

(i) Зец се неприметно помера у тачку A_n на растојању тачно 1 од тачке A_{n-1}.

(ii) Ловац на радару очитава тачку P_n. Једино што радар гарантује је да је растојање између тачака P_n и A_n највише 1.

(iii) Ловац се помера у тачку B_n на растојању тачно 1 од тачке B_{n-1}, што зец види.

Да ли ловац увек, ма какви били кретање зеца и извештаји са радара, може да се креће тако да осигура да после 10^9 кругова растојање између њега и зеца буде највише 100?

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

Среда, 19. јул 2017.

4. задатак. Дате су различите тачке R и S на кружници Ω тако да RS није њен пречник. Нека је ℓ тангента на кружницу Ω у тачки R. Тачка T је таква да је S средиште дужи RT. Тачка J на краћем луку RS кружнице Ω је таква да описана кружница Γ троугла JST сече праву ℓ у две различите тачке. Нека је A она од те две тачке која је ближа тачки R. Права AJ поново сече кружницу Ω у тачки K. Доказати да права KT додирује кружницу Γ.

5. задатак. Дат је природан број $N \geqslant 2$. У реду се налази $N(N+1)$ фудбалера међусобно различитих висина. Шеф Вучко жели да уклони $N(N-1)$ играча, остављајући ред са $2N$ играча у коме је задовољено следећих N услова:

(1) између двојице највиших играча не стоји нико;

(2) између трећег и четвртог играча по висини не стоји нико;

$\vdots$

(N) између двојице најнижих играча не стоји нико.

Доказати да се ово увек може извести.

6. задатак. Уређени пар целих бројева (x, y) зовемо *примитивном тачком* ако је највећи заједнички делилац бројева x и y једнак 1. Нека је S коначан скуп примитивних тачака. Доказати да постоје природан број n и цели бројеви a_0, a_1, …, a_n такви да за све тачке (x, y) из скупа S важи

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

Одабрани задаци с такмичења 2016/17.

Бојан Башић

1. **(Општинско, 1А.1)** У парку облика квадрата чија дужина странице износи 1 км постоји 4567 стабала пречника не већег од 50 цм (свако стабло се читаво налази у парку). Доказати да се у том парку може наћи простор величине 10 м $\times$ 20 м унутар ког се не налази ниједно стабло (нити део стабла).

2. **(Општинско, 1Б.3)** У једној кутији се налазе куглице плаве, зелене и црвене боје. Ако желимо да извучемо одређен број куглица а да будемо сигурни да међу њима постоји бар по једна куглица сваке боје, неопходно је извући 11 куглица. Ако желимо да будемо сигурни да међу извученим куглицама постоји куглица зелене боје, неопходно је извући 10 куглица. Ако желимо да будемо сигурни да међу извученим куглицама постоји куглица црвене боје, неопходно је извући 8 куглица. Колико куглица од сваке боје има у кутији?

3. **(Општинско, 3Б.1)** Одредити све реалне бројеве x за које важи

$$\sin x = \sin 2x = \sin 3x = \cdots = \sin 2017x.$$

4. **(Општинско, 3Б.5)** Дијагонале четвороугла деле тај четвороугао на четири троугла са целобројним површинама. Да ли је могуће да се производ тих површина завршава на 2017?

5. **(Општинско, 4Б.5)** Ана је три пута бацала коцкицу и у сваком бацању добила природан број од 1 до 6. Она је производ та три (не нужно различита) броја рекла Петру, а збир Зорану (при чему обојица знају шта представљају обе саопштене вредности). Између Петра и Зорана се водио следећи разговор:

   – Петар: „Не могу са сигурношћу да одредим сва три броја која је Ана добила.“

   – Зоран: „Знао сам да не можеш.“

   – Петар: „Иако досад нисам знао чак ни који је најмањи број који је Ана добила, захваљујући твом коментару сад знам.“

   Која је три броја (у некој пермутацији) Ана добила?

6. **(Окружно, 3Б.3)** Наћи све вредности реалног параметра m за које систем једначина

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4; \\ (x+m)^2 + (y-m)^2 &= 1 \end{aligned}$$

   има тачно једно решење.

7. **(Државно, 1Б.3)** У колико најмање потеза може скакач из доњег левог поља шаховске табле (a1) стићи до горњег десног (h8)? Доказати!

8. **(Државно, 2Б.3)** У $\triangle ABC$ тачке A_0, B_0 и C_0 су подножја висина из темена A, B и C, редом, и притом важи $\triangle ABC \sim \triangle A_0B_0C_0$.

   a) Ако се зна да је $\triangle ABC$ оштроугли, израчунати његове углове.

   b) Ако се зна да је $\triangle ABC$ тупоугли, израчунати његове углове.

9. **(Државно, 2Б.5)** Дата је фигура на слици доле, сачињена од шест јединичних квадратића. Да ли је могуће од непарног броја копија ове фигуре саставити правоугаоник?