ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ДРЖАВНИ СЕМИНАР 2018.

О НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ У ОСНОВНИМ И СРЕДЊИМ ШКОЛАМА

Тема 11: МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

Државна комисија за такмичења из математике ученика основних школа

БЕОГРАД
2018.

МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

Државна комисија за такмичења из математике ученика основних школа

др Зоран Каделбург, Б. Варга Јожеф,
Милош Ђорић, Вељко Ћировић

Београд, 11.02.2018.

I део – О такмичењима

1. Увод

Такмичења младих математичара Друштво математичара Србије почело је да организује још 1958. године и од тада овај вид активности се усталио и постао незаобилазан облик рада са ученицима. Нећемо претерати ако кажемо да су у поплави разноразних такмичења из многих области која се организују у последње време, такмичења која организује Друштво математичара сигурно и најстарија, и најмасовнија и најбоље организована. У њиховој реализацији, посредно и непосредно, учествују практично сви извођачи наставе из математике и рачунарства у основним и средњим школама, као и они запослени у разним просветним институцијама, а непосредну организацију и контролу изводе Државне комисије за такмичења (има их укупно четири).

Не постоје сасвим прецизни подаци о броју ученика који се такмиче, али сигурно је да на почетним ступњевима, на сва четири вида такмичења укупно, учествује годишње више десетина хиљада такмичара. Кроз оштру селекцију, од школских и општинских такмичења, преко окружних и државних, до Српских математичких олимпијада долази укупно око 100 најбољих, да би се у олимпијске екипе које представљају Србију на међународним такмичењима из математике и рачунарства пласирало њих 25.

2. Кратак историјат

Такмичења из математике су веома стара. Наравно, она нису увек имала облик какав сада имају. Према неким подацима, најстарије такмичење ученика средњих школа, са ограниченим временом за израду задатака, одржано је 1894. године у организацији Мађарског физичко-математичког друштва, којим је тада председавао познати физичар Етвеш Лоран. Наводимо задатке са тог такмичења.

1. ТАКМИЧЕЊЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
БУДИМПЕШТА, 1894.

1. Доказати да су бројеви
$$2x+3y \quad \text{и} \quad 9x+5y$$
дељиви са 17 за исте вредности целих бројева x и y.
2. Дата је кружница и тачке P и Q унутар ње. Конструисати правоугли троугао уписан у ту кружницу, код којег једна катета садржи тачку P, а друга тачку Q. За које положаје тачака P и Q задатак нема решења?
3. Странице троугла образују аритметичку прогресију с раликом d. Површина тог троугла једнака је S. Одредити странице и углове троугла. Размотрити посебно случај $d=1$, $S=6$.

Важну улогу у омасовљавању такмичења имале су Московске математичке олимпијаде, које се организују од 1935. године. На међународном плану, битне су следеће године:

1959: Прва међународна математичка олимпијада (IMO, Румунија)

1984: Прва Балканска математичка олимпијада (BMO, Грчка)

1997: Прва Јуниорска балканска математичка олимпијада (JBMO, Србија)

2011: Прва Европска математичка олимпијада за девојке (EGMO, В. Британија).

Друштво математичара Србије је непосредно по устројству такмичења за ученике средњих школа (крајем педесетих година прошлог века) започело са организацијом математичких такмичења ученика основних школа. Шездестих година такмичења су се одвијала на школском, општинском и међуопштинском нивоу. Када су такмичења постигла довољну масовност природно је било отпочети и са републичким такмичењима.

Прво Републичко такмичење из математике за ученике основних школа одржано је 4. јуна 1967. године на Природно-математичком факултету у Београду.

ЗАДАЦИ НА 1. РЕПУБЛИЧКОМ ТАКМИЧЕЊУ
МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА ОСНОВНИХ ШКОЛА
БЕОГРАД – 4. јун 1967.

8. Разред

1. Дат је систем једначина:

$$(2x-3)(y+1)-(x-2)(2y+1)=3m-2$$
$$\frac{x+y}{2}-\frac{2x-y}{6}=m+0{,}5.$$

а) Решити овај систем сматрајући m познатим бројем.

б) Одредити нумеричку вредност за m тако да буде $\frac{x}{3}=y-3$.

2. Пољопривредно добро засејало је пшеницом три њиве. Површина прве њиве износи 37% од укупне површине све три њиве, а површине друге и треће њиве односе се као $1\frac{2}{5}:3{,}5$. Површина прве њиве је већа од површине друге њиве за 4,56 хектара. Одредити укупну површину коју је пољопривредно добро засејало пшеницом и површину сваке њиве посебно.

3. Дуж AB има дужину 4 cm. Из крајњих тачака A и B те дужи описане су кружнице полупречником AB. Нека је M једна од њихових пресечних тачака. У тако добијени „криволинијски троугао“ ABM уписана је кружница. Одредити полупречник те уписане кружнице.

4. Комад леда који има облик квадра димензија 0,60 m; 0,60 m и 0,40 m стављен је у цилиндрични суд пречника 90 cm. Колика ће бити висина слоја воде у том суду пошто се лед истопи? Специфична тежина леда је $0{,}92\,\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{cm}^3}$.

5. Дата је дуж $MN=2a$.

а) Конструисати полукружницу којој је пречник MN и на њој одредити тачку P која ту полукружницу дели у размери 1 : 2.

б) Израчунати обим и површину троугла MNP у функцији од a.

в) Одредити површину и запремину тела које настаје обртањем троугла MNP око странице MN.

г) Одредити размеру запремина тела која настају обртањем троугла MNP око страница MN и MP.

Наредних година такмичења су добила на замаху. На 4. Републичком такмичењу 1970. године по први пут осим 65 ученика VIII разреда, учествовало је и 85 ученика VII разреда.

Та иста 1970. година карактеристична и по томе што је 14. јуна 1970. године одржано и 1. Савезно такмичење младих математичара Југославије за ученике основних школа. Организатор и дуго затим покровитељ такмичења је био „Математички лист за ученике основних школа“.

Прво републичко такмичење које је одржано ван Београда је било осмо, које је одржано 1974. године у Нишу. Прво савезно такмичење које је организовано ван Београда је било пето, које је одржано у Тузли 1976. године.

Ученици VI разреда укључени су у републичка такмичења почев од 14. такмичења које је реализовано у Аранђеловцу 1980. године. На савезним такмичењима ученици VI разреда су присутни тек од 27. такмичења у Лозници.

У то време су урађени и приручници за додатну наставу математике за V и VI, односно VII и VIII разред. Осмишљавање целог овог система, концепцијска поставка, уређивање приручника и окупљање око свих ових идеја великог броја веома стручних сарадника, велики је и немерљив допринос *проф. др Милице Илић-Дајовић*.

Председници Републичких (касније Државних) комисија за такмичења ученика основних школа били су *Милица Илић-Дајовић, Богољуб Маринковић*, *Илија Митровић*, *Војислав Андрић*, *др Драгослав Љубић*, *Милан Јовановић*, *др Бранислав Поповић* и *др Зоран Каделбург*.

Важна новина је уведена 1986. године – сваке године се на дан Државног такмичења објављује тзв. Билтен, тачније збирка решених задатака са свих такмичења ученика основних школа одржаних те године.

Осим Математичког листа за ученике основних школа, који је у току свих протеклих година година био један од кључних ослонаца талентованим ученицима и наставницима у припреми за математичка такмичења, доста доприноса дале су и специјализоване збирке задатака са материјалом са претходних такмичења, објављене претежно у едицији *Материјали за младе математичаре*. Посебно се истиче збирка свих решених задатака из 10 протеклих година која се, под разним називима и стално обнављана, објављује од 1997. године и досад је издата у укупно више десетина хиљада примерака.

Друштво математичара Србије је било иницијатор и први организатор *Јуниорских балканских математичких олимпијада*. Прва Балканијада је организована у Београду 1997. године, а председник организационог одбора био је *др Владимир Мићић*. Балканијаде се отада редовно одржавају сваке године, а Србија је била домаћин још два пута (Нови Сад 2004, Београд 2015).

За избор екипе за Балканијаду у почетку су организована посебна изборна такмичења, обично одмах после Савезног такмичења. Ту улогу су, почев од 2007. године, преузеле Српске математичке олимпијаде на којима учествује двадесетак најуспешнијих ученика страости до 15,5 година (што је горња старосна границе за учешће на Балканијади).

3. Актуелни систем такмичења

Актуелни систем такмичења је добро познат, па се овде нећемо задржавати на детаљима. Укратко, организују се школска и општинска такмичења (за ученике од 3. до 8. разреда ОШ), окружна (градска) за узраст 4–8. разред, државна (6–8. разред) и, најзад, Српска математичка олимпијада за ученике основних школа на којој учествују ученици 7. и 8. разреда који су остварили најбоље резултате на државном такмичењу, као и ученици 1. разреда средњих школа који нису старији од 15,5 година у тренутку одржавања Јуниорске балканијаде (ово последње јер је то услов на учествовање на ЈБМО).

Број такмичара на прва три ступња такмичења је условљен просторним и техничким условима организације. На државном такмичењу учествује око 300 ученика (по сто из сваког од три разреда), а на ЈСМО њих двадесетак, одређених на основу прецизних правила која прописује Правилник о такмичењима ДМС.

Задатке за све ступњеве такмичења саставља Државна комисија за такмичења из математике ученика основних школа која обично броји 8–10 чланова и коју именује Извршни одбор ДМС. За школско такмичење дозвољено је да школски активи математике саставе своје посебне задатке. Посебно је фиксирано да део задатака на нижим ступњевима такмичења мора да буде на неки начин узет из Математичког листа за ученике основних школа – ово је учињено као помоћ ученицима, од којих се многи по први пут сусрећу са нестандардним такмичарским задацима, а немају одговарајућу помоћ у својим срединама.

Радове ученика на свим такмичењима прегледају одговарајуће такмичарске комисије. Мада Државна комисија уз задатке шаље и скице решења и кратка упутства за бодовање, јасно је да се тако не може обезбедити потпуна униформност критеријума. Уз то су могуће и грешке прегледача, посебно због великог броја такмичара и често доста кратких рокова за прегледање.

Због свега овога је предвиђена и могућност приговора на додељени број бодова. Приговоре прегледају посебно одређене комисије (обично састављене од чланова такмичарских комнисија), с тим да је, бар теоријски, обавезно да сваки приговор прегледа најмање два члана. Често су ученици, или њихови наставници (а још чешће родитељи), незадовољни и одлукама комисија за приговоре, но с обзиром на кратке рокове и чињеницу да такмичења морају да се даље одвијају, предвиђено је да је одговор комисије за приговор коначан. О једном предвиђеном изузетку биће речи у наредном одељку.

4. Неке уведене новине

Систем такмичења се у протеклих 50 и више година непрестано дорађивао и унапређивао. Од такмичења само ученика 7. и 8. разреда (на нижим ступњевима) и само 8. разреда за Републичком такмичењу, дошло се временом до данашње организације која обухвата ученике од 3. до 8. разреда ОШ. Мишљења смо да се ту треба и зауставити, бар када је овај тип такмичења у питању (такмичења ученика млађих узраста су могућа на ревијалном нивоу, какво је нпр. такмичење „Кенгур“).

Једну од великих новина је својевремно представљало увођење могућности приговора (то се десило осамдесетих година прошлог века – пре тога тако нешто није постојало). Колико год је то очигледно потребно и оправдано, због скоро неизбежних грешака комисија при првом прегледању, оваква могућност је постала својеврсна „ноћна мора“ свих такмичарских комисија. Практично је немогуће спречити ученике (као и њихове наставнике и родитеље) да улажу приговоре који су у великој већини случајева неоправдани, али морају бити прегледани. Апели наставницима да саветују ученике да не улажу приговор кад је он очигледно неутемељен углавном немају одјека. Ово је посебно изражено на Државном такмичењу где се очекује да се коначни резултати такмичења објаве у току истог дана када је такмичење одржано. Нажалост, притисак који ствара велики број приговора ствара и могућност недовољно пажљивог прегледања чак и оних приговора где можда постоји потреба за исправком.

Нажалост, постоје ученици, па чак и наставници који ни после образложених (негативних) одговора на њихове приговоре нису убеђени.

У вези са претходним, прошле године је у Правилник унета једна новина за коју тек треба видети како ће изгледати у пракси и да ли ће бити задржана. Наиме, Државна комисија је у протеклих неколико година добијала известан приговора на бодовања задатака на окружним такмичењима. Строго према Правилнику, такве приговоре није требало прегледати, али је тешко било и одбити их када се установило да је заиста учињена грешка која је могла утицати на пласман ученика на Државно такмичење (таквих је случајева обично било неколико, највише 2–3).

С друге стране, Државна комисија је и раније тражила на увид радове свих ученика који су кандидати за пласман на Државно такмичење, но до сада се чинило да нема потребе да се ту врши нека ревизија (у смислу смањивања додељених поена), нити је то било предвиђено Правилником. Међутим, последњих година смо запазили неке неочекиване резултате на појединим задацима у неким окрузима. Детаљним прегледом смо установили да је заиста било неколико случајева неоправдано много додељених поена.

Због наведеног, ове године су у Правилник унете следеће одреднице:

„Државна комисија има право да достављене радове [са окружних такмичења] поново прегледа и да, у циљу уједначавања критеријума, изврши ревизију додељених поена.“

„На резултате окружног такмичења 6, 7. и 8. разреда могуће је уложити приговор Државној комисији у року од 5 дана од одржавања окружног такмичења. Писмени и образложени приговор може да уложи ученикова школа, а приговор потписује предметни наставник ученика.“

О неким искуствима у примени ових одредница прошле године биће речи на предавању.

II део – ЗАДАЦИ

У другом делу биће приказана решења изабраних задатака са такмичења основаца у протеклој школској години, и то са Државног такмичења, Српске и Балканске (јуниорске) математичке олимпијаде. Даћемо статистику решивости тих задатака, а осврнућемо се и на типичне грешке ученика, посебно оне због којих је било највише неоправданих приговора.

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ 2017.

VI разред

1. Број ученика који су учествовали на општинском такмичењу био је троцифрен, $\overline{abc}$. Прву награду је добило $\dfrac{3}{25}$ такмичара и Вера је приметила да је тај број једнак једном од бројева $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{ac}$. Колико је било такмичара?

2. Марко је прешао неки пут аутомобилом у четири етапе. У првој етапи је за једну петину укупног времена прешао четвртину укупног пута. У другој етапи од $120\,\mathrm{km}$ је возио брзином која је једнака средњој брзини у последње две етапе. У трећој етапи је прешао две трећине пута преосталог после прве две етапе за 102 минута. Преосталих $72\,\mathrm{km}$ је прешао у четвртој етапи за тачно један сат. Колики пут је укупно прешао и колико му је времена требало за то?

3. Докажи да је у сваком трапезу (који није паралелограм) разлика дужина основица већа од разлике дужина кракова.

4. Уписана кружница троугла ABC додирује странице BC и AC редом у тачкама P и Q. Права која садржи средиште странице AB и паралелна је са PQ сече праве BC и AC редом у тачкама D и E. Докажи да је $AE = BD$.

5. Из скупа $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ се бирају три броја и помоћу та три броја се попуњава квадратна таблица 3×3 тако да у сваком вертикалном и сваком хоризонталном реду буду уписани различити бројеви. На колико различитих начина је то могуће урадити?

VII разред

6. Над катетама $AC = b$ и $BC = a$ правоуглог троугла ABC као пречницима конструисане су кружнице k_1 и k_2. Права p додирује те кружнице у тачкама M и N. Изрази дужину MN у зависности од a и b.

7. Ако за реални број a, $a > 1$, важи једнакост $a - \sqrt{a} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{\sqrt{a}}$, израчунај $a + \dfrac{1}{a}$.

8. Одреди све четвороцифрене бројеве $\overline{abcd}$ који су потпуни квадрати и имају особину да постоји цифра k, $k > 0$, таква да је број чије су цифре редом (слева на десно) $a - k$, $b - k$, $c - k$, $d - k$ такође потпун квадрат.

9. Збир тупих углова конвексног многоугла је 2017°. Колико страница има тај многоугао?

10. Две екипе, A и B, боре се на једном математичком квизу за гомилу на којој је 2017 бомбона. У овој игри капитени екипа вуку наизменично потезе, а почиње екипа A. У једном потезу је могуће или узети једну бомбону са неке од постојећих гомила, или неку од постојећих гомила поделити на две или више мањих гомила са истим бројем бомбона у свакој. У игри побеђује она екипа чији капитен узме последњу бомбону. Докажи да екипа B има победничку стратегију.

VIII разред

11. Реши систем једначина

$$\frac{x+y}{xyz}=\frac{1}{6}, \qquad \frac{y+z}{xyz}=\frac{4}{15}, \qquad \frac{z+x}{xyz}=\frac{7}{30}.$$

12. Нека је $ABCS$ правилна тространа пирамида са основом ABC, чије су бочне ивице двапут дуже од ивице основе и нека је E тачка бочне ивице BS. Нагибни угао равни ACE према основи једнак је половини нагибног угла бочне стране према основи. Одреди однос у којем раван ACE дели запремину пирамиде.

13. Нека је N најмањи природан број који има тачно 2017 делилаца у скупу природних бројева. Докажи да N има бар 605 цифара.

14. На страници AB квадрата $ABCD$ је тачка E, а на страници CD тачка F, тако да је $AE:EB=1:2$ и $CF:FD=1:1$. Нека дужи BF и DE секу дијагоналу AC у тачкама N и M, редом. Доказати да су троуглови AME и CFN слични.

15. На 2018 картица исписани су цели бројеви од 0 до 2017. Затим су картице постављене у један ред у произвољном поретку тако да су написани бројеви видљиви. Играчи A и B наизменично узимају по једну картицу, али при том могу да узму само једну од две крајње картице. Игру почиње играч A. Игра се завршава кад су све картице узете, а победник је играч код кога је збир бројева на узетим картицама већи. Докажи да један од играча има победничку стратегију. Који?

Средњи број поена по задацима

6. разред

задатак	1.	2.	3.	4.	5.	Укупно
бодови	8,01	13,14	7,19	2,80	9,12	40,46

7. разред

задатак	1.	2.	3.	4.	5.	Укупно
бодови	8,91	6,62	6,85	5,22	8,91	36,51

8. разред

задатак	1.	2.	3.	4.	5.	Укупно
бодови	15,48	9,31	8,03	12,03	0,18	45,03

ЈЕДАНАЕСТА СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

16. Означено је неких 15 поља шаховске табле. Посматрају се све дужи са крајевима у центрима означених поља. Доказати да међу тим дужима постоје четири једнаке дужине.

17. Доказати да за позитивне реалне бројеве x, y, z важи неједнакост

$$(x^2y + y^2z + z^2x)(xy^2 + yz^2 + zx^2)(xy + yz + zx) \geqslant 3(x + y + z)^2x^2y^2z^2.$$

18. У оштроуглом троуглу ABC са међусобно различитим страницама, угао код темена C износи $60°$. Нека су A' и B', редом, подножја висина из темена A и B, а T тежиште троугла ABC. Полуправе $A'T$ и $B'T$ секу описану кружницу датог троугла редом у тачкама M и N. Доказати да је $MN = AB$.

19. За природан број q казаћемо да је K-*наследник* природног броја n ако постоји природан број p такав да је $n + p^2 = q^2$. Нека је A скуп свих природних бројева n који имају бар једног K-наследника али ниједан од K-наследника броја n нема свог K-наследника. Доказати да је

$$A = \{7, 12\} \cup \{\, 8m + 3 \mid m \in \mathbf{N} \cup \{0\}\,\} \cup \{16m + 4 \mid m \in \mathbf{N}\,\}.$$

ДВАДЕСЕТПРВА ЈУНИОРСКА БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Варна (Бугарска), 2017.

20. Одредити све скупове од шест узастопних природних бројева, таквих да производ нека два од њих сабран са производом нека друга два од њих даје производ преостала два од тих бројева,

21. Нека су x, y, z природни бројеви за које је $x \neq y \neq z \neq x$. Доказати да је

$$(x + y + z)(xy + yz + zx - 2) \geqslant 9xyz.$$

Када важи једнакост?

22. Нека је ABC оштроугли троугао за који је $AB \neq AC$, са описаном кружницом Γ и њеним центром O. Нека је M средиште странице BC и D тачка кружнице Γ за коју је $AD \perp BC$. Нека је, даље, T тачка за коју је $BDCT$ паралелограм, а Q тачка са исте стране праве BC са које је A, таква да је

$$\measuredangle BQM = \measuredangle BCA \quad \text{и} \quad \measuredangle CQM = \measuredangle CBA.$$

Нека права AO сече кружницу Γ други пут у E и нека описана кружница троугла ETQ сече Γ други пут у тачки X. Доказати да су тачке A, M и X колинеарне.

23. Дат је правилни полигон P: $A_1A_2 \ldots A_{2n}$ у равни. Казаћемо да се тачка S, која припада једној од страница полигона P, види из неке тачке E ван полигона P, ако дуж SE не садржи ниједну тачку која припада страницама полигона P осим тачке S. Обојићемо странице полигона P у три различите боје (изузев темена полигона која остављамо необојеним) тако да је свака страница обојена тачно једном бојом и да је свака боја искоришћена бар једном. Сем тога, из сваке тачке равни која је ван полигона P могу се видети тачке полигона P у највише две боје. Одредити број различитих бојења која задовољавају наведене услове (два бојења су различита ако је бар једна страница обојена различито).

Решења

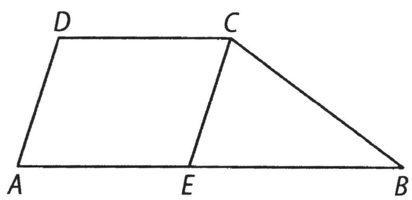
1. Размотримо три могућности наведене у задатку.

$1°$ Ако је $\dfrac{3}{25}(100a + 10b + c) = 10a + b$, онда се сређивањем добија $50a + 5b + 3c = 0$, што је немогуће за ненегативне бројеве a, b, c $(a \neq 0)$.

2° Ако је $\frac{3}{25}(100a+10b+c)=10b+c$, онда се добија $150a=110b+11c$, па је десна страна дељива са 11, а лева није ($a\neq 0$).

3° Ако је $\frac{3}{25}(100a+10b+c)=10a+c$, онда се добија $25a+15b=11c$, дакле лева страна је дељива са 5, па мора бити и десна. Како би се за $c=0$ добило $a=b=0$, што је искључено, закључујемо да мора бити $c=5$, тј. $5a+3b=11$. Лако се проверава да је ово могуће само за $a=1$, $b=2$. Тражени број такмичара је 125.

2. Последња етапа од 72 km је једна трећина пута преосталог после друге етапе, што значи да је у последње две етапе Марко прешао $72\,\mathrm{km}\cdot 3=216\,\mathrm{km}$. Тај пут је прешао за $102+60=162$ минута. Средња брзина на том делу пута је била $\frac{216}{162:60}=\frac{216\cdot 60}{162}=80\,\mathrm{km/h}$. Ово је била и брзина у другој етапи. За 120 km у другој етапи му је према томе требао $\frac{120}{80}=1{,}5$ сат, тј. 90 минута. Укупно је у последње три етапе прешао $216+120=336\,\mathrm{km}$ за $90+102+60=252$ минута. Нађених 336 km је три четвртине пута, па је укупан пут $336\,\mathrm{km}\cdot\frac{4}{3}=448\,\mathrm{km}$. Нађених 252 минута је четири петине времена, па је укупно време $252\cdot\frac{5}{4}=315$ минута (тј. 5 сати и 15 минута).



Сл. уз зад. 3

3. Посматрајмо трапез $ABCD$ са основицама AB и CD и нека је, на пример, $AB>CD$ и $BC\geqslant AD$. Ако је E тачка основице AB за коју је $CE\parallel AD$ (слика), онда је у паралелограму $AECD$, $CE=AD$, а у троуглу EBC је разлика страница $BC-CE$ мања од треће странице EB. Дакле, $BC-AD<AB-AE=AB-CD$, што је и требало доказати.

4. *Прво решење.* Нека је M средиште странице AB, а N тачка праве DE таква да је BN паралелно са AC. Троуглови AME и BMN су очигледно подударни (УСУ), одакле је $AE=BN$. Како је $CP=CQ$ (једнакост тангентних дужи), троугао CPQ је једнакокрак, а сами тим (због $PQ\parallel DE$) и троугао CDE. Сада имамо да је $\measuredangle BND=\measuredangle AEM$ (углови са паралелним крацима) $=\measuredangle CDM=\measuredangle BDN$ (унакрсни углови), па је троугао BDN једнакокрак. Тиме добијамо да је $BD=BN=AE$, чиме је доказ завршен.

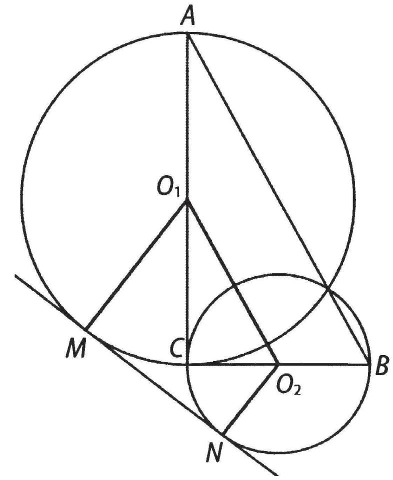
Друго решење. Нека је M средиште странице AB, а K и L подножја нормала из A и B, редом, на праву DE. Троуглови AKM и BLM су очигледно подударни (УСУ), одакле је $AK=BL$. Како је $CP=CQ$ (једнакост тангентних дужи), троугао CPQ је једнакокрак, а самим тим (због $PQ\parallel DE$) и троугао CDE. Из једнакости углова $\measuredangle AEK=\measuredangle CED=\measuredangle CDE=\measuredangle BDL$ следи да су троуглови AKE и BLD подударни (УСУ), па је $AE=BD$.

5. Три различита елемента скупа $\{1,2,3,4,5\}$ можемо одабрати на 10 начина (123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345). Нека су одабрани бројеви a, b и c. Први ред табеле 3×3 може се попунити на 6 начина (a,b,c; a,c,b; b,a,c; b,c,a; c,a,b; c,b,a). Нека су то, на пример, бројеви a,b,c; тада се прва колона може попунити на два начина: a,b,c или a,c,b. Након тога се остала поља таблице попуњавају на јединствен начин. Дакле, укупан број начина попуњавања таблице је $10\cdot 6\cdot 2=120$.

6. Означимо са O_1 и O_2 центре кружница k_1 и k_2 (слика). Правоугли трапез O_1O_2NM има основице дужина $\frac{a}{2}$ и $\frac{b}{2}$ и крак (који није нормалан на основице) дужине $\frac{c}{2}$ (средња линија датог правоуглог троугла), па се за други крак добија

$$MN^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2-(a-b)^2}{4} = \frac{ab}{2},$$

те је $MN = \sqrt{\frac{1}{2}ab}$.



Сл. уз зад. 6

7. Дата једнакост се може написати као $a - \frac{1}{a} = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}$.

Прво решење. Квадрирањем обеју страна се добија $a^2 - 2 + \frac{1}{a^2} = a + \frac{1}{a} + 2$. Сменом $a + \frac{1}{a} = x$ последња једнакост постаје $x^2 - 4 = x + 2$, односно $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2) = 0$. Како је, по условима задатка, $x > 0$, следи да је $x = a + \frac{1}{a} = 3$.

Друго решење. Како је

$$a - \frac{1}{a} = (\sqrt{a})^2 - \left(\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2 = \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)\left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right),$$

добијамо $\left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)\left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right) = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}$. С обзиром да је $\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} \neq 0$, следи да је $\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} = 1$, па се квадрирањем добија $a - 2 + \frac{1}{a} = 1$, одакле следи $a + \frac{1}{a} = 3$.

Напомена. Може се показати да су у том случају обе стране једнакости дате у задатку једнаке 1.

8. Нека су поменути бројеви једнаки, редом, x^2 и y^2. Тада се услов задатка може записати у облику $x^2 - y^2 = k \cdot 1111$, тј. $(x-y)(x+y) = k \cdot 11 \cdot 101$, где су x и y двоцифрени бројеви, прецизније, елементи скупа $\{32, 33, \ldots, 99\}$. Број $x - y$ је највише двоцифрен, па не може бити једнак броју 101 (нити неком његовом умношку). Дакле, мора бити $x - y = 11m$, $x + y = 101n$, где је $mn = k$. При томе је $x = \frac{11m + 101n}{2}$, па мора бити $n = 1$ (иначе број x не би био двоцифрен). Дакле, мора да буде $x - y = 11k$, $x + y = 101$, одакле је $x = \frac{101 + 11k}{2}$ и $y = \frac{101 - 11k}{2}$. Из $y \geqslant 32$ се добија да је $11k \leqslant 37$, па је $k \leqslant 3$, а како очигледно k мора да буде непаран (иначе y не би био цео), преостају могућности $k \in \{1, 3\}$. За $k = 1$ се добија $x = 56$, $y = 45$, а за $k = 3$ се добија $x = 67$, $y = 34$. Решења задатка су бројеви 3136 и 4489 (заиста, $56^2 = 3136$, $45^2 = 2025$ и $67^2 = 4489$, $34^2 = 1156$).

9. Збир углова конвексног n-тоугла је $(n-2) \cdot 180°$, при чему је у нашем случају свакако $n > 4$. С друге стране, број не-тупих углова конвексног многоугла (са више од 4 странице) не може бити већи од 3 (јер би иначе збир његових спољашњих углова био већи од $360°$). Зато збир углова нашег многоугла не може бити већи од $2017° + 3 \cdot 90° = 2287°$, а наравно ни мањи од $2017°$. Једини број већи од 2017 и не већи од 2287 који је дељив са 180 је број $2160 = 12 \cdot 180$. Дакле, мора бити $n - 2 = 12$, тј. $n = 14$.

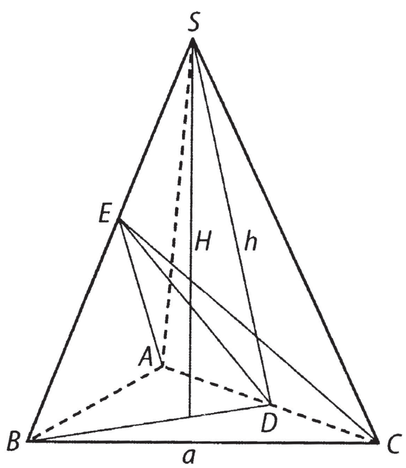
10. У првом потезу екипа A има две могућности: или 1) да узме једну бомбону, или 2) (с обзиром да је број 2017 прост) да подели ову гомилу на 2017 гомила са по једном бомбоном. У случају 1), екипа B може да подели гомилу од 2016 бомбона на две гомиле са по 1008 бомбона и у наставку да игра симетрично, повлачећи исте потезе као екипа A, али на другој гомили са истим бројем бомбона. Тако ће екипа B увек моћи да изведе потез, па ће на крају победити. У случају 2), игра се мора наставити наизменично узимањем по једне бомбоне, а како их има непарно много, победиће поново екипа B.

11. Систем се може записати у облику $\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}=\frac{1}{6}$, $\frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}=\frac{4}{15}$, $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}=\frac{7}{30}$, односно после смене $\frac{1}{yz}=a$, $\frac{1}{xz}=b$, $\frac{1}{xy}=c$, као $a+b=\frac{1}{6}$, $b+c=\frac{4}{15}$, $c+a=\frac{7}{30}$. Сабирањем једначина система се добија

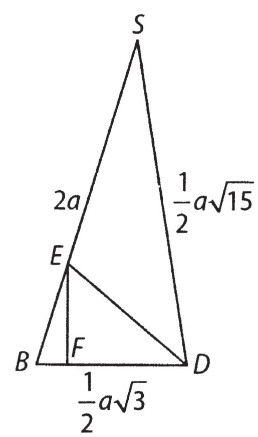
$$a+b+c=\frac{1}{2}\cdot\Big(\frac{1}{6}+\frac{4}{15}+\frac{7}{30}\Big)=\frac{1}{3}.$$

Одатле је $c=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$, $a=\frac{1}{3}-\frac{4}{15}=\frac{1}{15}$, $b=\frac{1}{3}-\frac{7}{30}=\frac{1}{10}$. Дакле, $xy=6$, $yz=15$, $zx=10$. Множењем ове три релације се добија $(xyz)^2=900$, одакле је $xyz=30$ или $xyz=-30$. Директно се проверава да су тројке $(2,3,5)$ и $(-2,-3,-5)$ решења датог система.

12. Означимо са a основну ивицу, са h апотему и са H висину дате пирамиде $ABCS$. Нека дата раван сече пирамиду по троуглу ACE, при чему је D средиште странице AC (слика 1). У троуглу SDB се лако одређују све три странице: $SD=h=\frac{1}{2}a\sqrt{15}$, $DB=\frac{1}{2}a\sqrt{3}$ и $SB=2a$ (слика 2).



Сл. уз зад. 12.1

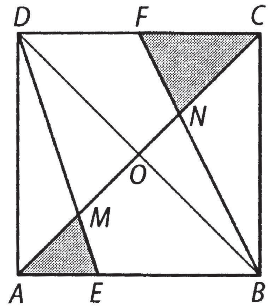


Сл. уз зад. 12.2

Како је, према претпоставци, DE симетрала угла код D троугла SDB, то је $BE:ES=BD:SD=\frac{1}{2}a\sqrt{3}:\frac{1}{2}a\sqrt{15}=1:\sqrt{5}$. Зато за висину $H_1=EF$ тог троугла важи $H_1:H=BE:ES=1:(1+\sqrt{5})$. Како пирамиде $ABCE$ и $ABCS$ имају заједничку основу ABC, то за њихове запремине V_1 и V важи $V_1:V=H_1:H=1:(1+\sqrt{5})$, па за тражене запремине V_1 и V_2 важи

$$V_1:V_2=\frac{1}{1+\sqrt{5}}V:\Big(1-\frac{1}{1+\sqrt{5}}\Big)V=1:\sqrt{5}.$$

13. Према познатој формули, природни број N са факторизацијом $N=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ има $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)$ делилаца у скупу природних бројева. Како тражени број N има 2017 делилаца, а 2017 је прост број, то N мора бити облика $N=p^{2016}$ за неки прост број p. Најмањи такав број је очигледно $N=2^{2016}$. С обзиром да је $2^{10}=1024>10^3$, то је $N=(2^{10})^{201}\cdot 2^6>(10^3)^{201}\cdot 10=10^{604}$, па број N има бар 605 цифара.



Сл. уз зад. 14

14. Означимо са O пресек дијагонала квадрата. Како дужи BF и DE секу дијагоналу AC у тачкама N и M, редом (слика), имамо да је $ON = \frac{1}{3}OC$, јер је N тежиште троугла BCD. Дакле, катете троугла BON односе се као $3 : 1$, као и катете троугла DAE. Из сличности тих троуглова следи да је $\measuredangle BNO = \measuredangle DEA = \measuredangle MEA$. Како је $\measuredangle BNO = \measuredangle FNC$ (као унакрсни), следи да је $\measuredangle MEA = \measuredangle FNC$. Из једнакости углова троуглова AME и CNF следи њихова сличност.

15. Доказаћемо да за било који почетни распоред карата играч A има победничку стратегију. Уочимо две чињенице:

1) Број картица је паран увек када је на потезу играч A.

2) Збир бројева на свим картицама је непаран (јер од 0 до 2017 има непаран број непарних бројева).

Нумеришимо места картица од 1 до 2018 и израчунајмо збир бројева картица на парним местима и збир бројева на непарним местима. Ти збирови нису једнаки, јер је збир свих бројева непаран. Претпоставимо да је већи збир на картицама које стоје на непарним местима. Тада играч A треба да узме ону крајњу картицу која је на непарном месту, без обзира на њену бројчану вредност. Тако треба да поступа у току целе игре. То може да постигне, јер после сваког његовог потеза обе крајње картице су на парним местима, а после сваког потеза играча B, једна картица је на парном, а друга на непарном месту.

У случају да је на почетку већи збир на картицама које су на парним местима, играч A треба увек да између две крајње картице узима ону која је на парном месту.

16. Број посматраних дужи је $\frac{15 \cdot 14}{2} = 105$. Одредимо број различитих могућих дужина тих дужи. У даљем ћемо користити уобичајено шаховско означавање поља табле.

Најпре, свака дужина посматраних дужи може се реализовати као дужина дужи са једним крајем у центру поља $a1$, јер се правоугаоник са супротним теменима у центрима било која два поља табле може транслирати тако да му је једно од темена у пољу $a1$, а супротно у неком другом пољу табле. Штавише, све могуће дужине се реализују као растојања од центра поља $a1$ до центра неког поља на дијагонали $a1$–$h8$ или испод ње. Број таквих поља је $2+3+\cdots+8 = 35$, па могућих дужина нема више од 35. Међутим, дужина 5 се постиже, како између поља $a1$ и $f1$, тако и између поља $a1$ и $e4$ (јер је $4^2+3^2 = 5^2$), а дужина $\sqrt{50}$ се постиже, како између поља $a1$ и $h2$, тако и између поља $a1$ и $f6$ (јер је $7^2+1^2 = 5^2+5^2$). Дакле, број могућих дужина једнак је 33, а како је $33 \cdot 3 = 99 < 105$, то тврђење задатка следи на основу Дирихлеовог принципа.

Напомена. Како је и $34 \cdot 3 = 102 < 105$, за доказ тврђења у задатку довољно је приметити једну од две напред наведене једнакости.

17. Након дељења обе стране неједнакости са $x^2y^2z^2$ добија се еквивалентна неједнакост

$$(*) \qquad \left(\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}\right)\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)(xy+yz+zx) \geqslant 3(x+y+z)^2.$$

Применом Коши-Шварцове неједнакости добијамо

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)(xy+yz+zx) \geqslant (x+y+z)^2,$$

док из неједнакости између аритметичке и геометријске средине имамо

$$\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y} \geqslant 3.$$

Из претходне две неједнакости следи неједнакост ($*$), а с њом и неједнакост која се доказује.

Напомена. За ученике који су с тим упознати, поменимо да је задатак могуће решити и применом Мјурхедове неједнакости.

18. Како је угао код C датог троугла од 60°, то је страница AB средња (по дужини) његова страница. Нека је, на пример, $CA < AB < BC$ (случај $BC < AB < CA$ се разматра аналогно). Тада тачка M припада луку AB описане кружнице на којем није тачка C, а тачка N припада луку BC на којем није тачка A.

Докажимо да су четвороуглови $AMBC$ и $ABNC$ једнакокраки трапези. Нека је M' тачка на описаној кружници, таква да је четвороугсо $AM'BC$ трапез (у том случају свакако једнакокрак). Ако је A_1 средиште странице BC, троуглови ATM' и A_1TA' су слични. Заиста, $AT = 2\,A_1T$ (T је тежиште), $M'A = 2\,A'A_1$ (због симетрије једнакокраког трапеза тачка A_1 је средиште дужи $A'N'$, где је N' подножје нормале из M' на BC) и $\measuredangle M'AT = \measuredangle A'A_1T$ (због $AM' \parallel BC$). Следи да је $\measuredangle ATM' = \measuredangle A_1TA'$, па су тачке A', T и M' колинеарне, тј. $M' \equiv M$, чиме је тврђење доказано за четвороугао $AMBC$. Слично се доказује за четвороугао $ABNC$.

Сада је $CM = BA$ (дијагонале у једнакокраком трапезу $AMBC$) и $CN = AB$ (краци у једнакокраком трапезу $ABNC$). Следи да је $\measuredangle ACM = \measuredangle ABM = \measuredangle CBM - \beta = \measuredangle ACB - \beta = 60^\circ - \beta$ и, слично, $\measuredangle BCN = \alpha - 60^\circ$ (α и β су углови датог троугла). Због $\alpha + \beta = 120^\circ$, одатле следи да је $\measuredangle ACM = \measuredangle BCN$, па су тетиве AM и BN подударне. Дакле, и четвороугао $AMBN$ је једнакокраки трапез, па су његове дијагонале подударне, тј. $MN = AB$.

До последњег закључка може се доћи и мало другачије: из $\measuredangle ACM = \measuredangle BCN$ следи да је $\measuredangle MCN = \measuredangle ACB = 60^\circ$, па је због $CM = CN = AB$ троугао CMN једнакостраничан и коначно $MN = AB$.

19. (а) Одредимо најпре скуп B природних бројева n који се могу, бар на један начин, представити у облику $q^2 - p^2$. Јасно је да тај услов задовољавају сви непарни бројеви већи од 1 (јер је $2m+1 = (m+1)^2 - m^2$) и сви бројеви дељиви са 4 и већи од 4 (јер је $4m = (m+1)^2 - (m-1)^2$ за $m > 1$). Бројеви 1 и 4 се очигледно не могу тако представити. Бројеви облика $4m - 2$ се такође не могу представити на тај начин: ако би било $4m - 2 = (q-p)(q+p)$, бројеви p и q би били исте парности (јер је лева страна паран број), па би десна страна била дељива са 4. Дакле,

$$B = \{\, 2m+1 \mid m \in \mathbf{N} \,\} \cup \{\, 4m \mid m \in \mathbf{N} \setminus \{1\} \,\}.$$

(б) У складу са уведеним ознакама, да би за природан број n важило $n \in A$, неопходно је и довољно да $n \in B$ и да, како год изабрали бројеве p, q за које је $n = q^2 - p^2$, обавезно важи $q \notin B$. Размотримо сада следеће могућности за број $n \in B$:

(1) Бројеви 7 и 12 припадају скупу A. Заиста, представљање $7 = 4^2 - 3^2$ броја 7 у траженом облику је једино могуће, а $4 \notin B$. Слично, једини приказ броја 12 у облику разлике квадрата је $12 = 4^2 - 2^2$.

(2) $n = 4m+1$, $m \in \mathbf{N}$. Тада је $n = (2m+1)^2 - (2m)^2$, а $2m+1 \in B$. Дакле, $n \notin A$.

(3) $n = 8m+7$, $m \in \mathbf{N}$. Тада је $n = (4m+4)^2 - (4m+3)^2$, $4m+4 \in B$. Дакле, $n \notin A$.

(4) $n = 8m+3$, $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Претпоставимо да је $8m+3 = q^2 - p^2 = (q+p)(q-p)$. Фактори $q+p$ и $q-p$ морају бити непарни. Ако један од њих даје остатак 1 по модулу 8, други мора дати остатак 3 и обрнуто; ако један од њих даје остатак 5, други мора дати остатак 7 и обрнуто. У оба случаја број q (који је њихов полузбир) даје остатак 2 при дељењу са 4, па он не припада скупу B. Дакле, $n \in A$.

(5) $n = 8m$, $m \in \mathbf{N}$. Сада је $n = (2m+1)^2 - (2m-1)^2$, $2m+1 \in B$, па $n \notin A$.

(6) $n = 16m+12$, $m \in \mathbf{N}$. Узмимо $n = (4m+4)^2 - (4m+2)^2$, па видимо да је могућ K-наследник $4m+4 \in B$. Дакле, $n \notin A$.

(7) $n = 16m+4$, $m \in \mathbf{N}$. Претпоставимо да је $16m+4 = (q+p)(q-p)$. Фактори $q+p$ и $q-p$ морају бити парни, а после скраћивања са 4 претходна једнакост постаје $4m+1 = \dfrac{q+p}{2} \cdot \dfrac{q-p}{2}$.

Сада бројеви $\dfrac{q+p}{2}$ и $\dfrac{q-p}{2}$ морају бити непарни, при чему они дају исти остатак (1 или 3) при дељењу са 4. У оба случаја је $q \equiv 2 \pmod 4$, па $q \notin B$. Дакле, $n \in A$.

Тиме су сви случајеви испитани и тврђење је доказано.

20. Међу шест узастопних природних бројева тачно два су дељива са 3 и они морају бити у истом од три пара бројева који се множе (иначе би два од три члана у једнакости

$$ab + cd = ef$$

која треба да важи била дељива са 3, а трећи не би). Означимо са n и $n+3$ та два броја дељива са 3. Од преостала четири броја, два дају остатак 1 при дељењу са 3, а два остатак 2. Зато су преостала два производа или оба конгруентна 1 по модулу 3 (јер је $1 \cdot 1 \equiv 1 \pmod 3$ и $2 \cdot 2 \equiv 1 \pmod 3$) или су оба конгруентна 2 по модулу 3 (јер је $1 \cdot 2 \equiv 2 \pmod 3$). Из тога следи да производ $n(n+3)$ мора бити на левој страни једнакости, на пример, $c = n$, $d = n+3$, па треба да важи једнакост

$$ab + n(n+3) = ef.$$

Даље, три од датих бројева су парни, а три непарни. Један од бројева n, $n+3$ је паран а један непаран. Зато су од преостала четири броја тачно два непарна. Како је $n(n+3)$ паран, преостала два непарна броја морају бити чиниоци у различитим од производа ab и ef.

Посматрајмо сада следећа три могућа случаја.

1° Бројеви су $n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$, $n+3$. Производ ef мора бити већи од $n(n+3)$. Једина могућност за то је $(n-2)(n-1) + n(n+3) = (n+1)(n+2)$, одакле следи $n = 3$. Заиста, важи $1 \cdot 2 + 3 \cdot 6 = 4 \cdot 5$.

2° Бројеви су $n-1$, n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$. Како једначина $(n-1)(n+4) + n(n+3) = (n+1)(n+2)$ нема целобројна решења, $n+4$ мора бити на десној страни једнакости, и то помножен бројем различите парности, дакле $n-1$ или $n+1$. У случају да је $(n+2)(n-1) + n(n+3) = (n+1)(n+4)$ добијамо да је $n = 3$. Заиста, важи $2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 4 \cdot 7$. Једначина $(n+1)(n+2) + n(n+3) = (n-1)(n+4)$ нема реалних решења.

3° Бројеви су n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$, $n+5$. Тада долазе у обзир следеће могућности:

$(n+1)(n+2) + n(n+3) = (n+4)(n+5)$, што даје $n = 6$. То је решење јер је $7 \cdot 8 + 6 \cdot 9 = 10 \cdot 11$;

$(n+2)(n+5) + n(n+3) = (n+1)(n+4)$, што нема целобројна решења;

$(n+1)(n+4) + n(n+3) = (n+2)(n+5)$ има решење $n = 2$, али то није решење задатка (јер 2 није дељиво са 3).

Задатак има три решења: $1 \cdot 2 + 3 \cdot 6 = 4 \cdot 5$, $2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 4 \cdot 7$ и $7 \cdot 8 + 6 \cdot 9 = 10 \cdot 11$.

21. Како су x, y, z различити природни бројеви, дата неједнакост је симетрична, па можемо да, не смањујући општост, претпоставимо да је $x \geqslant y+1 \geqslant z+2$. Размотрићемо следећа два могућа случаја.

1° $y \geqslant z+2$, тј. $x \geqslant y+1 \geqslant z+3$. У овом случају важи

$$(x-y)^2 \geqslant 1, \qquad (y-z)^2 \geqslant 4, \qquad (x-z)^2 \geqslant 9,$$

тј.

$$x^2 + y^2 \geqslant 2xy + 1, \qquad y^2 + z^2 \geqslant 2yz + 4, \qquad x^2 + z^2 \geqslant 2xz + 9.$$

Одавде следи

$$zx^2 + zy^2 \geqslant 2xyz + z, \qquad xy^2 + xz^2 \geqslant 2xyz + 4x, \qquad yx^2 + yz^2 \geqslant 2xyz + 9y.$$

Сабирањем претходне три неједнакости добијамо

$$xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) \geqslant 6xyz + 4x + 9y + z,$$

што се може трансформисати у $(x+y+z)(xy+yz+zx-2) \geqslant 9xyz+2x+7y-z$. Како је $x \geqslant z+3$, следи да је $2x+7y-z \geqslant 0$, па важи неједнакост која се доказује.

2° $y=z+1$. тада је $x \geqslant z+2$, а треба да докажемо неједнакост

$$(x+2z+1)(z^2+2xz+z+x-2) \geqslant 9xz(z+1),$$

што је еквивалентно са

$$(x-z-2)(x-z+1)(2z+1) \geqslant 0.$$

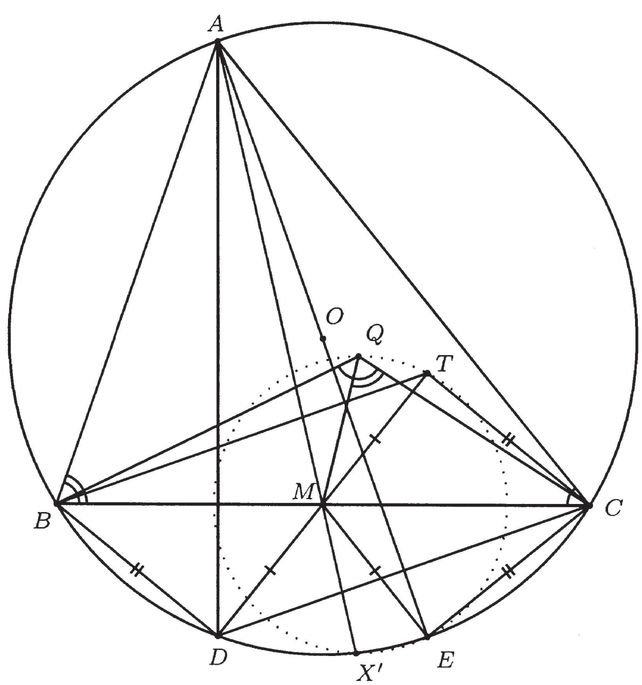
Последња неједнакост важи због $x \geqslant z+2$.

Једнакост може да важи само у случају 2°, и то за $x=z+2$, тј. када је $(x,y,z)=(k+2,k+1,k)$, $k \in \mathbf{N}$ (наравно, долазе у обзир и пермутације наведене тројке).

22. Нека је X' тачка симетрична тачки Q у односу на праву BC. Како је $\measuredangle CBA = \measuredangle CQM = \measuredangle CX'M$ и $\measuredangle BCA = \measuredangle BQM = \measuredangle BX'M$, важи

$$\measuredangle BX'C = \measuredangle BX'M + \measuredangle CX'M = \measuredangle CBA + \measuredangle BCA = 180^\circ - \measuredangle BAC,$$

одакле следи да $X' \in \Gamma$. Како је $\measuredangle AX'B = \measuredangle ACB = \measuredangle MX'B$, следи да су тачке A, M, X' колинеарне. Како је $\measuredangle DCB = \measuredangle DAB = 90^\circ - \measuredangle ABC = \measuredangle OAC = \measuredangle EAC$, добијамо да је $CBDE$ једнакокраки трапез (слика).



Сл. уз зад. 22

Како је $BDCT$ паралелограм, то је $MT=MD$, при чему су тачке M, D, T колинеарне и $BD=CT$. Како је $CBDE$ једнакокраки трапез, имамо $BD=CE$ и $ME=MD$. Како је

$$\measuredangle BTC = \measuredangle BDC = \measuredangle BED, \quad CE=BD=CT \quad \text{и} \quad ME=MT,$$

тачке E и T су симетричне у односу на праву BC. С обзиром да су Q и X' такође симетричне у односу на ту праву, следи да је $QX'ET$ такође једнакокраки трапез, што значи да тачке Q, X', E, T припадају једној кружници. Како $X' \in \Gamma$, то значи да је $X \equiv X'$, па су зато тачке A, M, X колинеарне.

23. Докажимо најпре два помоћна тврђења.

Лема 1. За сваки избор n узастопних страница $s_1, s_2, \dots, s_n$ полигона P постоји спољашња тачка Q у равни, таква да се боја сваке од страница s_i, $i = 1, 2, \dots, n$ може видети из тачке Q.

Доказ. Посматрајмо кружницу описану око датог полигона P. Јасно је да постоји њена полукружница S, таква да свака од изабраних страница s_i или има оба краја на полукружници S или има једну крајњу тачку која припада S, али се не поклапа са њеним крајем. Уочимо тачку Q на симетрали пречника те полукружнице (у полуравни у којој је S), довољно далеко да се из ње види „скоро цела" полукружница S – јасно је да се из ње види боја сваке од страница s_i. ∎

Лема 2. За произвољан низ $s_1, s_2, \dots, s_{n+1}$ од $n+1$ узастопних страница полигона P, не постоји спољашња тачка Q у његовој равни, таква да се боја сваке од страница $s_1, s_2, \dots, s_{n+1}$ може видети из тачке Q.

Доказ. Како су s_1 и s_{n+1} паралелне наспрамне странице полигона P, оне се не могу истовремено видети ни из једне спољашње тачке. ∎

Размотримо сада следеће случајеве.

1° $n = 2$. Дати многоугао је квадрат и једино што треба да обезбедимо је да је свака боја искоришћена. Две странице ће бити исте боје, и треба да изаберемо које две ће то бити, а затим да придружимо боје том избору. За то постоји $\binom{4}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 36$ начина.

2° $n = 3$. У овом случају P је шестоугао, означимо са $a_1, a_2, \dots, a_6$ (редом) његове странице. Морају постојати две узастопне странице које су различито обојене – нека је, на пример, a_1 црвена, а a_2 плава. Мора постојати бар једна страница обојена трећом бојом (нпр. зеленом), али то, према леми 1, може бити само a_4 или a_5. Имамо следеће три могућности:

1) a_4 је зелена, a_5 није; онда редом добијамо да a_3, a_5 и a_6 морају бити плаве, тј. бојење је *cppzpp*;

2) a_5 је зелена, а a_4 није; слично као под 1) добија се бојење *cpcczc*;

3) и a_4 и a_5 су зелене; следи да a_6 мора бити црвена, а a_3 плава, па је бојење *cppzzc*.

На тај начин закључујемо да постоје две врсте дозвољених бојења:

i) две наспрамне странице су различито обојене, а све остале су обојене трећом бојом; ово се може остварити на $3 \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1) = 18$ начина (најпре бирајући пар наспрамних страница, а затим додељујући боје);

ii) постоје три пара узастопних страница које су једнако обојене; ово се остварује на $2 \cdot 6 = 12$ начина.

Дакле, за $n = 3$ одговор је $18 + 12 = 30$.

3° $n \geqslant 4$. Приметимо најпре да се, према леми 1, боје било које 4 узастопне странице могу видети из неке (довољно удаљене) спољашње тачке.

Означимо странице полигона P (редом) са $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$. Морају постојати две узастопне странице које су различито обојене – нека је, на пример, a_1 плава, а a_2 црвена. Такође, мора постојати бар једна зелена страница и, опет према леми 1, то може бити само a_{n+1} или a_{n+2}. Тако опет добијамо два случаја:

1) a_{n+1} је зелена. Тада a_n мора бити црвена (не може бити зелена на основу леме 1 примењене на $a_1, a_2, \dots, a_n$; не може бити плава због $a_2, \dots, a_{n+1}$). Покажимо да не може и a_{n+2} бити зелена. Заиста, у том случају:

i) a_{n+3} не може бити зелена због $a_2, a_1, \dots, a_{n+3}$;

ii) a_{n+3} не може бити плава, јер се четири узастопне странице $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}$ могу видети из неке спољашње тачке;

iii) a_{n+3} не може бити црвена због $a_1, a_{2n}, \dots, a_{n+2}$.

Дакле, a_{n+2} мора бити црвена, а онда такве морају бити и $a_{n+3}, \dots, a_{2n}$. Добијамо дозвољено бојење: a_1 је плава, a_{n+1} је зелена, а све остале странице су црвене.

2) Случај када је a_{n+2} зелена разматра се на аналоган начин са сличним закључком.

Ово значи да су једина дозвољена бојења у случају $n \geqslant 4$ она када су неке две наспрамне странице обојене различитим бојама, а све остале странице обојене трећом бојом. Ово се може урадити на $n \cdot 3 \cdot 2 = 6n$ начина.

Дакле, коначан одговор на питање постављено у задатку је: за $n = 3$ постоји 36 дозвољених бојења; за $n = 4$ постоји 30 таквих бојења; за $n \geqslant 4$ број дозвољених бојења је $6n$.

III део

ДИСКУСИЈА

ЛИТЕРАТУРА

1. *Збирка задатака са математичких такмичења ученика основних школа школске 2016/17 године*, ДМС, Београд 2017.
2. 70 година Друштва математичара Србије, ДМС, Београд 2018.
3. *Венгерские математические олимпиады*, «Мир», Москва, 1976.