

**11. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА**

Београд, 20.05.2017.

1. Означено је неких 15 поља шаховске табле. Посматрају се све дужи са крајевима у центрима означених поља. Доказати да међу тим дужима постоје четири једнаке дужине.
2. Доказати да за позитивне реалне бројеве x, y, z важи неједнакост

$$(x^2y + y^2z + z^2x)(xy^2 + yz^2 + zx^2)(xy + yz + zx) \geq 3(x + y + z)^2x^2y^2z^2.$$

3. У оштроуглом троуглу ABC са међусобно различитим странама, угао код темена C износи 60° . Нека су A' и B' , редом, подножја висина из темена A и B , а T тежиште троугла ABC . Полуправе $A'T$ и $B'T$ секу описану кружницу датог троугла редом у тачкама M и N . Доказати да је $MN = AB$.
4. За природан број q казаћемо да је K -наследник природног броја n ако постоји природан број p такав да је $n + p^2 = q^2$. Нека је A скуп свих природних бројева n који имају бар једног K -наследника али ниједан од K -наследника броја n нема свог K -наследника. Доказати да је

$$A = \{7, 12\} \cup \{8m + 3 \mid m \in \mathbf{N} \cup \{0\}\} \cup \{16m + 4 \mid m \in \mathbf{N}\}.$$

Сваки задатак вреди 10 поена

Време за рад је 240 минута