Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА УЧЕШЋЕ НА МЕЂУНАРОДНОЈ МАТЕМАТИЧКОЈ ОЛИМПИЈАДИ

21. мај 2017.

Први дан

1. Дат је $\triangle ABC$. Тачка D је средиште странице BC, а на страницама AC и AB уочене су тачке E и F, редом, такве да важи $DE = DF$ и $\measuredangle EDF = \measuredangle BAC$. Доказати:

$$DE \geqslant \frac{AB + AC}{4}.$$

2. Назовимо *кораком* функцију која уређен пар природних бројева (x, y) коме је тачно једна координата парна пресликава у пар $(\frac{x}{2}, y+\frac{x}{2})$ ако $2 \mid x$, односно у пар $(x+\frac{y}{2}, \frac{y}{2})$ ако $2 \mid y$. Доказати да за сваки непаран природан број n, $n > 1$, постоји паран природан број b, $b < n$, такав да се сукцесивном применом коначно много корака од уређеног пара (n, b) добија уређен пар (b, n).

3. За функцију $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ кажемо да је *живахна* ако за све $a, b \in \mathbb{N}$ важи

$$f(a+b-1) = \underbrace{f(f(\cdots f}_{a \text{ пута}}(b)\cdots)).$$

Нека је g живахна функција таква да за неко $A \geqslant 2$ важи $g(A + 2018) = g(A) + 1$.

a) Доказати да је за све $n \geqslant A + 2$ испуњено $g(n + 2017^{2017}) = g(n)$.

b) Ако важи $g(A + 2017^{2017}) \neq g(A)$, одредити $g(n)$ за $n \leqslant A - 1$.

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА УЧЕШЋЕ НА МЕЂУНАРОДНОЈ МАТЕМАТИЧКОЈ ОЛИМПИЈАДИ

22. мај 2017.

Други дан

4. Квадрат $n \times n$ је подељен на јединичне квадрате. Потребно је на њега поставити одређен број једнакокрако-правоуглих троуглова хипотенузе 2, с теменима у теменима јединичних квадрата, на такав начин да свака страница сваког јединичног квадрата припада тачно једном троуглу (тј. лежи у унутрашњости или на рубу). Одредити све вредности n за које је ово могуће.

5. За дати природан број $n \geqslant 2$, нека је $C(n)$ најмања позитивна реална константа за коју постоји n реалних бројева $x_1, x_2, \ldots, x_n$ који нису сви нула и задовољавају услове:

(i) $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$;

(ii) за свако $i = 1, 2, \ldots, n$ важи $x_i \leqslant x_{i+1}$ или $x_i \leqslant x_{i+1} + C(n)x_{i+2}$ (где индексе узимамо по модулу n).

Доказати:

a) $C(n) \geqslant 2$ за све n;

b) $C(n) = 2$ ако и само ако је n паран број.

6. За дати природан број k уочимо најмањи природан број n који има тачно k делилаца. Ако је n потпун куб, да ли k може бити дељив неким простим бројем облика $3j + 2$?

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.