ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 11.02.2012.

Први разред, А категорија

1. Нека је K тачка симетрична ортоцентру H троугла ABC у односу на средиште странице BC. Доказати да је AK пречник описане кружнице троугла ABC.

2. Дати су полиноми $p(x) = x^3 + x^2 + x + 2$ и $q(x) = x^3 - x + 3$. Да ли постоји цео број m тако да $q(m) \mid p(m)$?

3. За свако $n \in \mathbb{N}$ број x_n настао је узастопним дописивањем квадрата првих n природних бројева (нпр. $x_{12} = 149162536496481100121144$). Доказати да постоји бесконачно много природних бројева n, таквих да број x_n није потпун степен природног броја (природан број y је потпун степен ако и само ако постоје природни бројеви $k > 1$ и a, тако да важи $y = a^k$).

4. Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао који није трапез. Симетрале страница AD и BC секу се у тачки P, а симетрале страница AB и CD секу се у тачки Q. Уколико се тачке P и Q налазе у унутрашњости четвороугла $ABCD$ и важи $\sphericalangle APD = \sphericalangle BPC$, доказати да је $\sphericalangle AQB = \sphericalangle CQD$.

5. На свакој од $n > 4$ картица уписан је један од бројева $+1$ или -1. Са колико најмање питања можемо сазнати производ свих бројева записаних на картицама, ако једним питањем можемо сазнати вредност производа бројева на тачно три произвољно изабране картице?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 11.02.2012.

Други разред, А категорија

1. Наћи све реалне бројеве a такве да неједнакост

$$x^4 + ax^3 + (a+3)x^2 + ax + 1 > 0$$

важи за све реалне бројеве x.

2. Нека је $a \in \mathbb{R}$, $|a| > 1$. Доказати да за све $z \in \mathbb{C}$ важи

$$\left|\frac{az - i}{a + zi}\right| \leqslant 1 \Leftrightarrow |z| \leqslant 1.$$

3. Доказати да се квадрат природног броја не може завршавати са четири исте ненула цифре.

4. На страницама BC и AC троугла ABC дате су тачке D и E, редом, тако да важи $AE = BD$. Означимо са M средиште странице AB, а са P пресек правих AD и BE. Доказати да тачка Q симетрична тачки P у односу на M лежи на симетрали угла ACB.

5. У поља таблице 100×100 су уписани бројеви. У свакој врсти има бар 10 различитих бројева, али у сваке три узастопне врсте има највише 16 различитих бројева. Колико се највише различитих бројева може налазити у таблици?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 11.02.2012.

Трећи разред, А категорија

1. У скупу реалних бројева решити неједначину

$$\frac{2^x - 16}{(9^{2x+1} - 243) \cdot \sqrt{5^{\frac{x^2-3}{2}} - 125}} \leqslant 0.$$

2. Нека је $n > 2$ природан број. Доказати да је вредност детерминанте

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n-1 \\ 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 3 \\ n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

једнака квадрату целог броја.

3. Низ $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ је дефинисан са $a_0 = 1$ и

$$a_{n+1} = (n^2 + 1) \cdot a_n - n,$$

за $n \geqslant 0$. Доказати да постоји члан низа који је дељив са 2011.

4. Нека је $ABCDEF$ конвексан шестоугао такав да за сваку тачку M која је у равни тог шестоугла важи

$$MA^2 + MC^2 + ME^2 = MB^2 + MD^2 + MF^2.$$

Доказати да се тежишта троуглова ACE и BDF поклапају.

5. Нека је $n \in \mathbb{N}$. Колико се највише непразних подскупова може издвојити из скупа од n елемената тако да су свака два или дисјунктна или је један од њих подскуп другог?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 11.02.2012.

Четврти разред, А категорија

1. Дате су тачке $A(1,3)$ и $B(2,4)$. Одредити тачку C на параболи $x = y^2 + 1$ за коју троугао ABC има најмању могућу површину.

2. Нека је $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ диференцијабилна функција и $f(1) = 0$. Колики је најмањи могући број решења једначине

$$2 \cdot f(x) = f'(x) \cdot \sin 2x\,?$$

3. а) Доказати да не постоје прости бројеви p и q такви да је број

$$p^2 + 2012pq + q^2$$

потпун квадрат.

б) Доказати да постоји бесконачно много парова узајамно простих природних бројева (m,n), тако да је

$$m^2 + 2012mn + n^2$$

потпун квадрат.

4. Нека је M унутрашња тачка квадрата $ABCD$. Нека су A_1, B_1, C_1, D_1 друге тачке пресека правих AM, BM, CM, DM са описаном кружницом квадрата $ABCD$, редом. Доказати да је

$$A_1B_1 \cdot C_1D_1 = A_1D_1 \cdot B_1C_1.$$

5. Нека је $m \geqslant 3$ природан број. Наћи најмањи природан број $r(m)$ за који важи да се за свако разбијање скупа $\{1, 2, \ldots, r(m)\}$ на 2 подскупа из једног од њих може изабрати m бројева (не обавезно различитих) $x_1, x_2, \ldots, x_m$ за које важи

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{m-1} = x_m.$$

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 11.02.2012.

Први разред, Б категорија

1. Нека су M, N и K средишта страница AB, BC и CD тетивног четвороугла $ABCD$, редом. Доказати да важи

$$\sphericalangle BMN = \sphericalangle CKN.$$

2. Нека је $P(x)$ полином са целим коефицијентима који при дељењу са $x^3 - x^2 + x - 6$ даје остатак $x^2 - 7x + 3$. Колики је остатак при дељењу полинома $P(x)$ са $x - 2$?

3. У скупу простих бројева решити једначину

$$2x^2 + 1 = y^5.$$

4. Нека је $ABCD$ паралелограм, а Z тачка на продужетку странице BC тако да важи распоред $B - C - Z$. Нека права AZ сече праве BD и CD у тачкама X и Y, редом. Ако је дужина дужи AZ једнака 6, а дужина дужи AY једнака 3, одредити дужину дужи AX.

5. На неком такмичењу из математике било је 5 задатака различите тежине, па никоја два нису носила исти број бодова, али је сваки носио број бодова који је природан број. Ако се за два урађена најлакша задатка добијало 10 бодова, а за два урађена најтежа задатка 18 бодова, колико бодова се добијало за свих 5 урађених задатака?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 11.02.2012.

Други разред, Б категорија

1. У скупу реалних бројева решити неједначину

$$\sqrt{4+7x-2x^2} < 2x+1.$$

2. Нека су бројеви $a, b, c \in \mathbb{R}$ по паровима различити и $f(x)$ квадратни трином, тако да је $f(a) = bc$, $f(b) = ca$, $f(c) = ab$. Доказати да је

$$f(a+b+c) = ab+bc+ca.$$

3. Да ли постоји природан број $n > 1$ такав да су последње четири цифре броја 2012^n једнаке 2012 ?

4. Ако симетрала унутрашњег угла код темена A троугла ABC сече описану кружницу у тачки N, а страницу BC у тачки T, доказати да је

$$BN^2 = AN \cdot TN.$$

5. На једном маскенбалу окупило се $n \geqslant 4$ људи. Сви су се снабдевали код истог продавца, који је у понуди имао костиме у некој од $n+2$ могуће боје. Неке од боја у понуди биле су: бела, црна, плава, зелена, жута, црвена. На маскенбалу се испоставило:

- тачно једна од боја {бела, црна} била је заступљена;
- тачно две од боја {црна, плава, зелена} биле су заступљене;
- од боја {бела, плава, жута} био је заступљен паран број (тј. или ниједна од њих, или тачно две);
- од боја {бела, зелена, црвена} био је заступљен паран број.

Доказати да се могу наћи две особе на маскенбалу обучене у костиме исте боје.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 11.02.2012.

Трећи разред, Б категорија

1. Доказати да за произвољне векторе $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ важи

$$\left[\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)\times\left(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\right)\right]\cdot(\overrightarrow{c}+\overrightarrow{a})=2\overrightarrow{c}\cdot(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}).$$

2. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{aligned}\sin x\cdot\cos 2y &= 1\\ \cos x\cdot\sin 2y &= 0.\end{aligned}$$

3. Доказати да се квадрат природног броја не може завршавати са четири исте ненула цифре.

4. У конвексном четвороуглу $ABCD$ важи

$$\frac{AB^2-BC^2+AC^2}{CD^2-AD^2+AC^2}=\frac{AB^2-AD^2+BD^2}{CD^2-BC^2+BD^2}.$$

Доказати да је $AB\parallel CD$.

5. У поља таблице 100×100 су уписани бројеви. У свакој врсти има бар 10 различитих бројева, али у сваке три узастопне врсте има највише 16 различитих бројева. Колико највише различитих бројева може да се нађе у таблици?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 11.02.2012.

Четврти разред, Б категорија

1. Одредити тачку на графику функције $y = x - \ln(x+1)$ у којој је тангента паралелна са правом која пролази кроз тачке $A(2,3)$ и $B(-1,4)$.

2. Да ли је функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дефинисана са $f(x) = \sin(x^2)$, за све $x \in \mathbb{R}$, периодична?

3. У скупу природних бројева решити једначину

$$2^x - 6^y = 2012.$$

4. У оштроуглом троуглу ABC тачка D је подножје висине из темена C и важи $AD = BC$. Ако је L подножје нормале из D на висину из темена A троугла ABC, доказати да је BL симетрала угла ABC.

5. На свакој од 2011 картица уписан је један од бројева $+1$ или -1. Са колико најмање питања можемо сазнати производ свих бројева, ако једним питањем можемо сазнати вредност производа бројева на тачно три произвољно изабране картице?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.