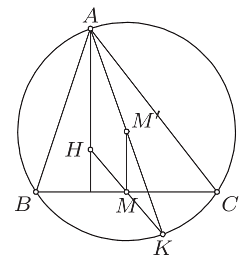
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 11.02.2012.

Први разред, А категорија

1. Нека је M средиште странице BC, а M' пресек симетрале странице BC и дужи AK. Како је M средиште дужи HK и $MM' \parallel AH$, то је MM' средња линија троугла AHK, па је $2 \cdot \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{HA}$. Ако је O центар описане кружнице троугла ABC, тада је $\overrightarrow{HA} = 2 \cdot \overrightarrow{MO}$, па је према претходном $O \equiv M'$ и самим тим AK пречник описане кружнице троугла ABC. (Тангента 66, стр. 40, Наградни задаци, M989)



ОК 2012, 1А – 1

2. Претпоставимо да овакво $m \in \mathbb{Z}$ постоји. Како је $q(m) = (m-1) \cdot m \cdot (m+1) + 3$, а $(m-1) \cdot m \cdot (m+1)$ дељиво са 3 као производ три узастопна броја, то $3 \mid q(m)$, па $3 \mid p(m)$. Самим тим,

$$3 \mid p(m) - q(m) = m^2 + 2m - 1 = 3m + (m^2 - m - 1),$$

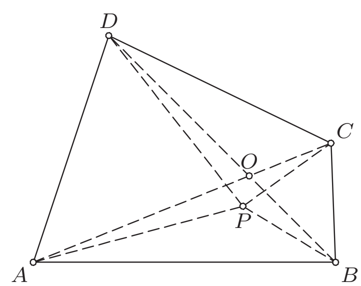
тј. $3 \mid m^2 - m - 1$. Како је $m^2 \equiv 1 \pmod 3$ када m није дељиво са 3, а $m^2 - m - 1 \equiv 2 \pmod 3$ када је m дељиво са 3, то $m^2 - m - 1$ није дељиво са 3, контрадикција.

3. Доказаћемо да постоји бесконачно много бројева n таквих да је x_n дељив са 3, а да није дељив са 9, одакле ће следити тврђење задатка. Како сваки природан број даје исти остатак по модулу 9 као и збир његових цифара, то је

$$x_n \equiv S(1^2) + S(2^2) + \ldots + S(n^2) \equiv 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \pmod 9,$$

где смо са $S(m)$ означили збир цифара природног броја m. Специјално $x_n \equiv \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} \pmod 3$. Одаберимо број n у облику $n = 9k$, $k \in \mathbb{N}$, где број k није дељив са 3. Тада је $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \dfrac{3k(9k+1)(18k+1)}{2}$ дељив са 3, а није дељив са 9, а тиме $3 \mid x_n$ и $9 \nmid x_n$. Дакле, за сваки природан број $n = 9k$, где је k природан број који није дељив са 3, број x_n није потпун степен. Како природних бројева k са наведеном особином има бесконачно много, то је доказ завршен.

4. Нека је O пресек дијагонала четвороугла $ABCD$. Без умањења општости претпоставимо да се тачка P налази у $\triangle ABC$. Како је $\sphericalangle APD = \sphericalangle BPC$, то је $180° > \sphericalangle APC = \sphericalangle APD + \sphericalangle CPD = \sphericalangle BPC + \sphericalangle CPD$, па је P у $\triangle AOB$ и важи $\sphericalangle APC = \sphericalangle BPD$. Како је P на симетрали дужи AD то је $AP = DP$, а како је P на симетрали дужи BC то је $BP = CP$, па су троуглови APC и DPB подударни и важи $AC = BD$. Сада, како је $CQ = DQ$ (јер је Q на симетрали дужи CD) и $AQ = BQ$ (јер је Q на симетрали дужи AB), то су и троуглови AQC и BQD подударни.



ОК 2012, 1А – 4

Претпоставимо да се тачка Q налази у $\triangle AOB$ или $\triangle COD$. Тада, како је $\sphericalangle AQC = \sphericalangle BQD$, то је $\sphericalangle AQD = \sphericalangle BQC$, па како је $AQ = BQ$ и $DQ = CQ$, то је $\triangle AQD \cong \triangle BQC$. Међутим, тада је $\sphericalangle DAB = \sphericalangle DAQ + \sphericalangle QAB = \sphericalangle CBQ + \sphericalangle QBA = \sphericalangle ABC$, и аналогно $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BCD$, па је четвороугао $ABCD$ трапез, контрадикција. Дакле, без умањења општости можемо претпоставити да је тачка Q у $\triangle AOD$, па је $\sphericalangle AQB = \sphericalangle AQC - \sphericalangle BQC = \sphericalangle BQD - \sphericalangle BQC = \sphericalangle CQD$, што је и требало доказати.

5. Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ бројеви записани на картицама и нека је p тражени број питања. За сваки од бројева a_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, морамо поставити барем једно питање везано за производ три броја међу којима је један a_i, па је $p \geqslant \dfrac{n}{3}$. Размотримо следећа три случаја:

Први случај. $n = 3k$, за неко $k \in \mathbb{N}$. Тада је $p \geqslant k$. Постављањем питања везана за производе $a_{3l+1}a_{3l+2}a_{3l+3}$, за $0 \leqslant l \leqslant k-1$, добијамо да је $p = k$ (производ бројева на картицама једнак је производу бројева које добијамо као одговоре на питања).

Други случај. $n = 3k+1$, за неко $k \in \mathbb{N}$. Тада је $p \geqslant k+1$. Постављањем питања везана за производе $a_1a_2a_3, a_1a_4a_5, a_1a_6a_7$ и $a_{3l-1}a_{3l}a_{3l+1}$, за $3 \leqslant l \leqslant k$, добијамо да је $p = k+1$, јер је производ бројева које добијамо као одговоре на питања једнак производу бројева на картицама, тј.

$$a_1a_2a_3 \cdot a_1a_4a_5 \cdot a_1a_6a_7 \cdot \prod_{l=3}^{k} a_{3l-1}a_{3l}a_{3l+1} = a_1^2 \cdot \prod_{l=1}^{n} a_l = \prod_{l=1}^{n} a_l.$$

Трећи случај. $n = 3k+2$, за неко $k \in \mathbb{N}$. Тада је $p \geqslant k+1$. Постављањем питања везана за производе $a_1a_2a_3, a_1a_2a_4, a_1a_2a_5$ и $a_{3l}a_{3l+1}a_{3l+2}$, за $2 \leqslant l \leqslant k$, добијамо да је $p \leqslant k+2$ (слично као у прва два случаја). Докажимо да се са $k+1$ питања не може добити жељено. У супротном, у тројкама за које су постављена питања учествује укупно $n+1$ бројева, па како сваки број мора да учествује у постављеним питањима, за један број су постављена тачно два питања. Ако је тај број x, а y и z неки од бројева који учествују у различитим питањима везаним за x, тада исте одговоре добијамо и за бројеве $-x$, $-y$, $-z$, а овом заменом се производ свих бројева мења, контрадикција.

Други разред, А категорија

1. Ако је $x = 0$ неједнакост важи за свако a. Ако је $x \neq 0$, дељењем са x^2 и увођењем смене $t = x + \frac{1}{x}$ неједнакост постаје еквивалентна са

$$f(t) = t^2 + at + a + 1 > 0,$$

за $t \notin (-2,2)$ (јер квадратна једначина $x^2 - tx + 1 = 0$ има решење у скупу реалних бројева ако и само ако $t \notin (-2,2)$). Дискриминанта тринома $f(t)$ је $D = a^2 - 4a - 4$. Довољно је размотрити следећа два случаја.
Први случај. Нека је $D < 0$, тј. $a \in (2 - 2\sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2})$. Тада неједнакост $f(t) > 0$ важи за свако реално t, па и за $t \notin (-2,2)$.
Други случај. Нека је $D \geqslant 0$, тј. $a \in (-\infty, 2 - 2\sqrt{2}] \cup [2 + 2\sqrt{2}, +\infty)$. Тада неједнакост $f(t) > 0$ важи за све $t \notin (-2,2)$ акко је $f(2) > 0$, $f(-2) > 0$ и ако се теме квадратне функције $f(t)$ налази у $(-2,2)$, тј. $-2 < -\frac{a}{2} < 2$. Ове неједнакости редом дају $a > -\frac{5}{3}$, $a < 5$, $4 > a > -4$, па је тражени скуп параметара у овом случају $(-\frac{5}{3}, 2 - 2\sqrt{2}]$.
Дакле, тражени скуп параметара је $a \in (-\frac{5}{3}, 2 + 2\sqrt{2})$.

2. Приметимо да за $|z| \leqslant 1$ важи $a > |-zi|$, па можемо претпоставити да је $a \neq -zi$. Тада важи следећи низ еквиваленција

$$\left|\frac{az-i}{a+zi}\right| \leqslant 1 \Leftrightarrow |az-i| \leqslant |a+zi| \Leftrightarrow |az-i|^2 \leqslant |a+zi|^2.$$

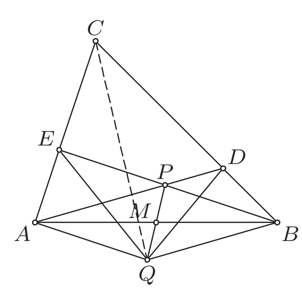
Како је $|az-i|^2 = (az-i)(a\overline{z}+i) = a^2|z|^2 - ia\overline{z} + iaz + 1$ и $|a+zi|^2 = (a+zi)(a-\overline{z}i) = a^2 + iaz - ia\overline{z} + |z|^2$, то је

$$|az-i|^2 \leqslant |a+zi|^2 \Leftrightarrow a^2|z|^2 + 1 \leqslant a^2 + |z|^2 \Leftrightarrow (a^2-1)(|z|^2-1) \leqslant 0 \Leftrightarrow |z| \leqslant 1,$$

што је и требало доказати. (Тангента, стр. 33, Писмени задаци, задатак 2)

3. Потпун квадрат се може завршавати цифрама 1, 4, 5, 6, 9. Потпун квадрат се не може завршавати са 11, 55 или 99, јер ти бројеви дају остатак 3 при дељењу са 4, а ни са 66, јер је тај број дељив са 2, а није са 4. Дакле, довољно је доказати да се потпун квадрат не може завршавати са бар четири броја 4.
Претпоставимо да постоји потпун квадрат који се завршава са бар четири броја 4, тј. нека је $a^2 = 10000k + 4444$, за неке $a, k \in \mathbb{N}$. Број a је паран, па је $a = 2b$, за неко $b \in \mathbb{N}$, и самим тим $b^2 = 2500k + 1111$. Међутим, број $2500k + 1111$ даје остатак 3 при дељењу са 4, па не може бити потпун квадрат, контрадикција.

4. Означимо са $S(XYZ)$ површину троугла XYZ. Како је $AM = MB$ и $PM = MQ$, то се дијагонале четвороугла $APBQ$ полове, па је он паралелограм. Сада, како је $EP \parallel AQ$, то је $S(AEQ) = S(APQ)$, а како је $PD \parallel QB$, то је $S(QDB) = S(QPB)$, па како је $S(APQ) = S(QPB)$, то је $S(AEQ) = S(QDB)$. Како је $AE = BD$, то су висине троуглова AQE и BDQ које одговарају овим страницама једнаке, односно тачка Q је једнако удаљена од правих AE и BD, што је и требало доказати.



ОК 2012, 2А – 4

5. Ако се у једној врсти налази бар 10 различитих бројева, онда се у наредне две појављује највише 6 нових бројева. Разбијмо таблицу на 50 парова узастопних врста. У првом пару има највише 16 различитих бројева, а у сваком од следећих 49 има највише 6 нових бројева, што даје укупно највише $16 + 49 \cdot 6 = 310$ различитих бројева.

Пример таблице са 310 различитих бројева конструишемо на следећи начин. За $k = 1, 2, \ldots, 50$, унесимо у $(2k-1)$-ву врсту све природне бројеве од $6k-5$ до $6k+4$, а у $(2k)$-ту врсту све природне бројеве од $6k+1$ до $6k+10$. Ова таблица испуњава услове задатка, а у њој се налазе бројеви од 1 до 310.

Трећи разред, А категорија

1. Услов дефинисаности датог израза је $2x+1 \neq \frac{5}{2}$ и $\frac{x^2-3}{2} > 3$, односно $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$. Како је $2^x - 16 \geqslant 0$ акко је $x \in [4, +\infty)$, а $9^{2x+1} - 243 \geqslant 0$ акко је $x \in \left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$, то је (уз услов дефинисаности) дати израз не већи од 0 акко је $x \in (3, 4]$. (Тангента 64, стр. 37, Писмени задаци, задатак 15)

2. По дефиницији, детерминанта је збир $n!$ сабирака који представљају (до на знак) производ n елемената, при чему је из сваке врсте и сваке колоне одабран по тачно један елемент. Довољно је размотрити следеће случајеве.
Први случај. Нека је $n > 4$. Посматрајмо све колоне осим прве и последње. Из ових колона могуће је изабрати највише два ненула елемента, јер се једини ненула елементи ових колона налазе у првој и последњој врсти. Како је ових колона барем 3, то је сваки сабирак који учествује у развоју детерминанте једнак 0, па је и детерминанта једнака 0.
Други случај. За $n = 3$ детерминанта је једнака 16.
Трећи случај. За $n = 4$ детерминанта је једнака 25.

3. Допунимо низ са $a_{-1} = 0$, тако да рекурентна релација остаје на снази. Показаћемо да је низ $\{a_n\}$ периодичан по модулу 2011. Како постоји само коначно много парова остатака по модулу 2011, то постоје природни бројеви m, n $(m > n)$ такви да је $m \equiv n \pmod{2011}$ и $a_m \equiv a_n \pmod{2011}$. Како је 2011 прост број који даје остатак 3 по модулу 4, то k^2+1 није дељиво са 2011 ни за једно $k \in \mathbb{Z}$, па из

$$((m-1)^2+1) \cdot a_{m-1} - (m-1) = a_m \equiv a_n = ((n-1)^2+1) \cdot a_{n-1} - (n-1) \pmod{2011}$$

следи $a_{m-1} \equiv a_{n-1} \pmod{2011}$. Настављајући овај поступак, добијамо $a_{m-n-1} \equiv a_{-1} = 0 \pmod{2011}$, дакле $2011 \mid a_{m-n-1}$.

4. Уведимо комплексну раван, тако да су a, b, c, d, e, f и z, редом, комплексни бројеви који одговарају тачкама A, B, C, D, E, F и M. Дати услов еквивалентан је са

$$|z-a|^2 + |z-c|^2 + |z-e|^2 = |z-b|^2 + |z-d|^2 + |z-f|^2 \;\Leftrightarrow$$

$$3|z|^2 + |a|^2 + |c|^2 + |e|^2 - z(\overline{a} + \overline{c} + \overline{e}) - \overline{z}(a+c+e) = 3|z|^2 + |b|^2 + |d|^2 + |f|^2 - z(\overline{b} + \overline{d} + \overline{f}) - \overline{z}(b+d+f).$$

Из последње једнакости, ако је $\alpha = b+d+f-(a+c+e)$, имамо да за свако $z \in \mathbb{C}$ важи

$$z\overline{\alpha} + \overline{z}\alpha = |b|^2 + |d|^2 + |f|^2 - (|a|^2 + |c|^2 + |e|^2).$$

Одавде, најпре одабиром $z = 0$, добијамо $|b|^2 + |d|^2 + |f|^2 - (|a|^2 + |c|^2 + |e|^2) = 0$, а потом одабиром $z = 1$ и $z = i$, редом добијамо $\overline{\alpha} + \alpha = 0$ и $\overline{\alpha} - \alpha = 0$, односно $\alpha = 0$. Овим смо доказали да је $a+c+e = b+d+f$. Из ове једнакости, имајући на уму да су комплексни бројеви који одговарају тежиштима наведених троуглова $\dfrac{a+c+e}{3}$ и $\dfrac{b+d+f}{3}$, непосредно следи тврђење задатка.

5. Докажимо индукцијом да је тражени број подскупова, у ознаци $f(n)$, једнак $2n-1$. За $n = 1$ очигледно је $f(n) = 1$. Претпоставимо да за све $k < n$ важи $f(k) = 2k-1$. Нека је F максимална фамилија непразних подскупова скупа X од n елемената тако да су свака два или дисјунктна или је један од њих подскуп другог. Један од њих је сам X, јер је у супротном $F \cup \{X\}$ већа фамилија са истим својствима. Нека је $Y \in F$ такав да он није подскуп ниједног елемента из F осим X, и нека Y има k елемената. Тада је сваки елемент фамилије F или подскуп скупа Y (таквих по индуктивној хипотези може бити највише $f(k) = 2k-1$), или дисјунктан са Y, тј. подскуп скупа $X \setminus Y$ (таквих по индуктивној хипотези може бити највише $f(n-k) = 2n-2k-1$) или сам X. Дакле, у фамилији F може бити највише $(2k-1) + (2n-2k-1) + 1 = 2n-1$ подскупова. Јасно је да је тај број могуће достићи: по индуктивној хипотези можемо изабрати, за неки непразан $Y \subseteq X$, $2k-1$ подскупова скупа Y, $2n-2k-1$ подскупова скупа $X \setminus Y$ и сам скуп X.

Четврти разред, А категорија

1. Нека је $C(c^2+1, c)$. Коришћењем формуле за површину полигона добијамо да је површина троугла ABC једнака

$$\left|\frac{(4+3)(2-1)}{2} + \frac{(c+4)((c^2+1)-2)}{2} + \frac{(3+c)(1-(c^2+1))}{2}\right| = \left|\frac{c^2-c+3}{2}\right|.$$

Минимална вредност израза $c^2 - c + 3$ достиже се за $c = \frac{1}{2}$ и једнака је $\frac{11}{4} > 0$, па је минимална вредност површине једнака $\frac{11}{8}$ и достиже се за тачку $C\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{2}\right)$. (Тангента 63, стр. 33, Тангента, задатак 4)

2. Функција $g(x) = f(x) \cdot \operatorname{ctg} x$ је диференцијабилна на $(1,2)$, непрекидна на $[1,2]$ и важи $g(1) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, па по Роловој теореми постоји $c \in (1,2)$ тако да је

$$0 = g'(c) = \frac{1}{2\sin^2 c} \cdot \left(f'(c)\sin 2c - 2f(c)\right).$$

Према томе, за произвољно $f(x)$ (које задовољава услове задатка), једначина има бар једно решење.
Ако је $f(x) = x-1$, једначина гласи $2(x-1) = \sin 2x$. Ако је $h : [1,2] \to \mathbb{R}$ дефинисана са $h(x) = 2(x-1) - \sin 2x$, број решења једначине једнак је броју нула функције $h(x)$. Ова функција је диференцијабилна на $[1,2]$ и важи $h'(x) = 2(1 - \cos 2x) > 0$, па $h(x)$ строго расте. Следи да $h(x)$ може имати највише једну нулу, а по претходном следи да има тачно једну нулу.
Дакле, најмањи могући број решења једначине је један.

3. а) Уколико су p и q непарни бројеви важи

$$p^2 + 2012pq + q^2 \equiv 1 + 0 + 1 = 2 \pmod 4,$$

па $p^2 + 2012pq + q^2$ није потпун квадрат. Дакле, барем један од p и q је паран, па је једнак 2. Нека је (без умањења општости) $p = 2$. Уколико је q непаран тада је

$$p^2 + 2012pq + q^2 \equiv 4 + 0 + 1 = 5 \pmod 8,$$

па $p^2 + 2012pq + q^2$ опет није потпун квадрат. Уколико је $p = q = 2$, тада је $p^2 + 2012pq + q^2 = 4 \cdot 2014$, што није потпун квадрат.
б) Посматрајмо једначину

$$m^2 + 2012mn + n^2 - t^2 = 0.$$

Ова једначина има решења у скупу природних бројева ако и само ако је $(2012^2 - 4)n^2 + 4t^2$ потпун квадрат, тј. ако је

$$1005 \cdot 1007 \cdot n^2 = s^2 - t^2,$$

за неко $s \in \mathbb{N}$. Нека су зато s и t такви да је $s - t = 1005 \cdot 1007$ и $s + t = n^2$. Тада је

$$m = \frac{(n-1005)(n-1007)}{2}.$$

Уколико је још n непаран, већи од 1007 и узајамно прост са 1005 и 1007, тада је НЗД$(m,n) = 1$, тј. (m,n) је пар са траженим својством. Оваквих бројева n има бесконачно много, чиме је доказ у потпуности завршен.

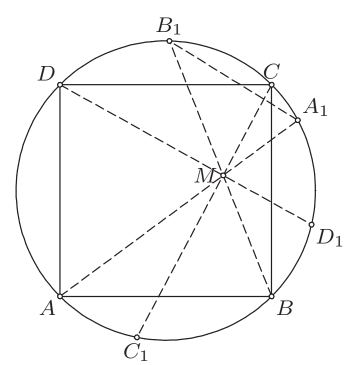
4. Како је $\sphericalangle BAA_1 = \sphericalangle BB_1A_1$ (као углови над тетивом BA_1) и $\sphericalangle AMB = \sphericalangle B_1MA_1$, то је $\triangle ABM \sim \triangle B_1A_1M$. Аналогно добијамо да је $\triangle BCM \sim \triangle C_1B_1M$, $\triangle CDM \sim \triangle D_1C_1M$ и $\triangle DAM \sim \triangle A_1D_1M$, па је

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BM}{A_1M}, \qquad \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{BM}{C_1M},$$
$$\frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DM}{C_1M}, \qquad \frac{DA}{D_1A_1} = \frac{DM}{A_1M}.$$

Сада је

$$\frac{AB}{A_1B_1} \cdot \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{BM \cdot DM}{A_1M \cdot C_1M} = \frac{BC}{B_1C_1} \cdot \frac{DA}{D_1A_1},$$

па како је $AB = BC = CD = DA$, то је заиста $A_1B_1 \cdot C_1D_1 = A_1D_1 \cdot B_1C_1$.



ОК 2012, 4А – 4

5. Доказаћемо да је $r(m) = m^2 - m - 1$.
Нека је скуп $\{1, 2, \ldots, m^2 - m - 2\} = A \cup B$ разбијен на 2 подскупа A и B:

$$A = \{1, 2, \ldots, m-2, (m-1)^2, (m-1)^2 + 1, \ldots, m^2 - m - 2\} \qquad \text{и} \qquad B = \{m-1, m, \ldots, (m-1)^2 - 1\}.$$

Покажимо да је сваки од ова 2 скупа, A и B, *слободан-од-m-сума*, тј. да једначина

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{m-1} = x_m$$

нема решења ни у A ни у B.

Ако су бројеви $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ из $\{1, 2, \ldots, m-2\}$ онда важи

$$m-1 \leqslant x_1 + x_2 + \ldots + x_{m-1} \leqslant (m-1)\cdot(m-2) < m\cdot(m-2) = (m-1)^2 - 1,$$

те је $x_1 + x_2 + \ldots + x_{m-1} \in B$.

Ако је међу бројевима $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ бар један из $\{(m-1)^2, (m-1)^2+1, \ldots, m^2-m-2\}$, тада је најмања могућа вредност суме на левој страни једначине једнака

$$\underbrace{1+1+\ldots+1}_{m-2} + (m-1)^2 = m^2 - m - 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_{m-1} \notin A.$$

Овим смо показали да је скуп A слободан-од-m-сума.

Ако су бројеви $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ из $B = \{m-1, m, \ldots, (m-1)^2 - 1\}$ онда је најмања могућа вредност суме на левој страни једначине једнака

$$\underbrace{(m-1)+(m-1)+\ldots+(m-1)}_{m-1} = (m-1)^2 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_{m-1} \notin B.$$

Овим смо показали да је и скуп B слободан-од-m-сума, стога следи да је $r(m) \geqslant m^2 - m - 1$.

Покажимо да важи и супротна неједнакост. Другим речима свако разбијање скупа $\{1, 2, \ldots, m^2-m-1\}$ на 2 подскупа A и B, садржи бар један подскуп који није слободан-од-m-сума.

Претпоставимо да ово тврђење није тачно. Без умањења општости можемо претпоставити да је $1 \in A$. То повлачи да $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{m-1} = m-1 \notin A$, тј. $m-1 \in B$. Даље имамо $\underbrace{(m-1)+(m-1)+\ldots+(m-1)}_{m-1} = (m-1)^2 \notin B$, тј. $(m-1)^2 \in A$. Сада имамо 2 могућности за m, да је у скупу A или у скупу B:

1° Ако је $m \in A$ онда имамо $\underbrace{m+m+\ldots+m}_{m-2} + 1 = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2$, па скуп A није слободан-од-m-сума.

2° Ако је $m \in B$ онда због $\underbrace{m+m+\ldots+m}_{m-2} + m - 1 = m^2 - m - 1$ следи да $m^2 - m - 1 \notin B$, тј. $m^2 - m - 1 \in A$.

Даље имамо $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{m-2} + (m-1)^2 = m^2 - m - 1$, па скуп A није слободан-од-m-сума.

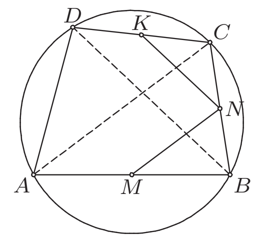
Тиме смо добили контрадикцију са полазном претпоставком, чиме смо показали неједнакост $r(m) \leqslant m^2 - m - 1$.

Из $r(m) \geqslant m^2 - m - 1$ и $r(m) \leqslant m^2 - m - 1$ следи да је $r(m) = m^2 - m - 1$.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 11.02.2012.

Први разред, Б категорија

1. Како је M средиште странице AB, а N средиште странице BC троугла ABC, то је MN средња линија овог троугла, па је $MN \parallel AC$ и самим тим $\sphericalangle BMN = \sphericalangle BAC$. Слично, KN је средња линија троугла CDB, па је $KN \parallel DB$ и самим тим $\sphericalangle CKN = \sphericalangle CDB$. Четвороугао $ABCD$ је тетиван, па је $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CDB$ (као углови над тетивом BC), а самим тим и $\sphericalangle BMN = \sphericalangle CKN$. (Тангента 66, стр. 40, Писмени задаци, задатак 2)



ОК 2012, 1Б – 1

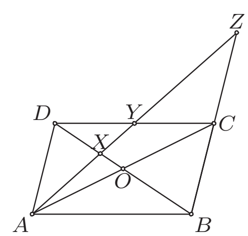
2. Нека је $Q(x) = x^3 - x^2 + x - 6$. Како је $Q(2) = 2^3 - 2^2 + 2 - 6 = 8 - 4 + 2 - 6 = 0$, то је $Q(x)$ дељиво са $x-2$. Дељењем полинома $Q(x)$ са $x-2$ добијамо $Q(x) = (x-2)(x^2+x+3)$. Даље, по услову задатка је

$$P(x) = Q(x)\cdot R(x) + x^2 - 7x + 3 = (x-2)\cdot(x^2+x+3)\cdot R(x) + x^2 - 7x + 3, \qquad (\dagger)$$

за неки полином $R(x)$. Како је остатак при дељењу полинома $S(x) = x^2 - 7x + 3$ са $x-2$ по Безуовом ставу једнак $S(2) = -7$, то је према (†) и остатак при дељењу полинома $P(x)$ са $x-2$ једнак -7.

3. Ако је $x = 3$, онда је $y^5 = 19$, па у овом случају једначина нема решења. Ако је $x \neq 3$, како је x прост број следи НЗД $(x, 3) = 1$, па x^2 даје остатак 1 при дељењу са 3 и самим тим је $2x^2 + 1 \equiv 0 \pmod 3$. Следи $3 \mid y^5$, па како је y прост број следи $y = 3$, одакле је $x = 11$.
Дакле, једино решење је $(x, y) = (3, 11)$.

4. Како је $AZ : AY = 2 : 1$, то је Y средиште дужи AZ, а како је и $YC \parallel AB$, то је YC средња линија троугла ABZ, па је Y средиште дужи CD. Нека је O пресек дијагонала датог паралелограма. Тада је O средиште дужи AC, па је тачка X тежиште троугла ACD. Самим тим, $AX : XY = 2 : 1$, па како је дужина дужи AY једнака 3, то је дужина дужи AX једнака 2.



ОК 2012, 1Б – 4

5. Како два најлакша задатка носе 10 бодова, то тежи од њих носи барем 6 бодова (јер носе различит број бодова). Како два најтежа задатка носе 18 бодова, то лакши од њих носи највише 8 бодова (јер носе различит број бодова). Дакле, трећи по тежини задатак мора носити 7 бодова, па задаци укупно носе $10 + 18 + 7 = 35$ бодова. (Тангента 59, стр. 24, Наградни задаци, М856)

Други разред, Б категорија

1. Дати израз је дефинисан ако и само ако је $4 + 7x - 2x^2 \geqslant 0$, односно ако и само ако је $x \in \left[-\frac{1}{2}, 4\right] = \mathcal{D}$. Даље, како је за $x \geqslant -\frac{1}{2}$ десна страна дате неједначине ненегативна, то је довољно одредити све $x \in \mathcal{D}$ који задовољавају неједначину

$$6x^2 - 3x - 3 > 0.$$

Решења последње квадратне неједначине су из скупа $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$, па је решење почетне неједначине скуп $(1, 4]$. (Тангента 63, стр. 32, Писмени задаци, задатак 2)

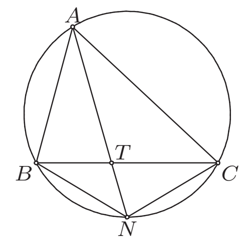
2. Нека је $f(x) = kx^2 + lx + m$, за неке k, l, $m \in \mathbb{R}$. Из услова задатка следи

$$k(a^2 - b^2) + l(a-b) = f(a) - f(b) = c(b-a) \quad \text{и} \quad k(a^2 - c^2) + l(a-c) = f(a) - f(c) = b(c-a).$$

Како су a, b, c различити, следи $a - b \neq 0$, $a - c \neq 0$, па дељењем прве једначине са $a-b$, а друге са $a-c$, добијамо $k(a+b) + l + c = 0 = k(a+c) + l + b$, одакле је $k(b-c) = b - c$. Како је $b - c \neq 0$, следи $k = 1$, па је $l = -(a+b+c)$ и $m = ab+bc+ca$. Следи $f(a+b+c) = (a+b+c)^2 - (a+b+c)(a+b+c) + (ab+bc+ca) = ab+bc+ca$, што је и требало доказати.

3. Како $4 \mid 2012$, то за $n \geqslant 2$ имамо да $4^2 \mid 4^n \mid 2012^n$. Зато је број 2012^n, за $n > 1$, дељив са 8. Број који се завршава са 2012, није дељив са 8 пошто $8 \nmid 012$ (природан број при дељењу са 8 даје исти остатак као и број састављен од његове последње три цифре). Из свега наведеног закључујемо да број n са наведеном особином не постоји.

4. Како је $\sphericalangle BAN = \sphericalangle NAC$, то је $BN = CN$ (као тетиве описане кружнице троугла ABC које одговарају овим угловима). Такође, $\sphericalangle BCN = \sphericalangle BAN$ (као углови над тетивом BN), па је $\sphericalangle TCN = \sphericalangle CAN$, а како је и $\sphericalangle TNC = \sphericalangle CNA$, то је $\triangle TCN \sim \triangle CAN$. Из ове сличности закључујемо да је $\dfrac{TN}{CN} = \dfrac{CN}{AN}$, па како је $BN = CN$, то је $BN^2 = AN \cdot TN$, што је и требало доказати. (Тангента 64, стр. 43, Писмени задаци, задатак 2)



ОК 2012, 2Б – 4

5. Уколико је на маскенбалу била заступљена бела боја, тада црна није, па из другог услова следи да су биле заступљене плава и зелена, а потом из трећег и четвртог услова следи да нису биле заступљене ни жута, ни црвена. Дакле, црна, жута и црвена боја нису биле заступљене.

Уколико, с друге стране, бела боја није била заступљена, тада црна јесте, па из другог услова следи да је била заступљена или плава или зелена боја. За прву могућност из четвртог услова следи да ни црвена боја није била заступљена (па свеукупно: бела, зелена и црвена боја нису биле заступљене), а за другу могућност из трећег услова следи да ни жута боја није била заступљена (па свеукупно: бела, плава и жута боја нису биле заступљене).

Тиме смо показали да сигурно постоје бар три боје које нису биле заступљене на маскенбалу, па је број заступљених боја највише $n-1$. Према Дирихлеовом принципу следи да се могу наћи две особе на маскенбалу обучене у костиме исте боје.

Трећи разред, Б категорија

1. Коришћењем основних особина векторског, скаларног и мешовитог производа добијамо

$$\begin{aligned}\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\right]\cdot(\vec{c}+\vec{a}) &= \left(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot(\vec{c}+\vec{a})\\ &= [a,b,c]+[b,c,a]=2[a,b,c]\\ &= 2(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}),\end{aligned}$$

што је и требало доказати. (Тангента 66, стр. 38, Писмени задаци, задатак 3)

2. Из прве једначине је $\sin x = 1$ и $\cos 2y = 1$, или $\sin x = -1$ и $\cos 2y = -1$. Такође, уколико је $\sin x = \pm 1$, тада је $\cos x = 0$, па уколико x и y задовољавају прву једначину, задовољавају и другу. Како је $\sin x = \cos 2y = 1$ акко је $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, за неко $k \in \mathbb{Z}$, и $y = l\pi$, за неко $l \in \mathbb{Z}$, а $\sin x = \cos 2y = -1$ акко је $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, за неко $k \in \mathbb{Z}$, и $y = \frac{\pi}{2} + l\pi$, за неко $l \in \mathbb{Z}$, то су решења датог система једначина парови $\left(\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{m\pi}{2}\right)$, где су m, n произвољни цели бројеви исте парности. (Тангента 58, стр. 31, Писмени задаци, задатак 2)

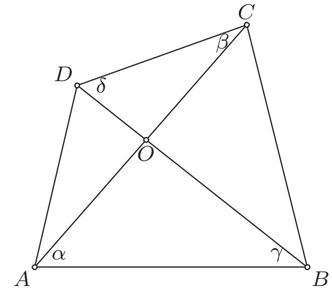
3. Потпун квадрат се може завршавати цифрама 1, 4, 5, 6, 9. Потпун квадрат се не може завршавати са 11, 55 или 99, јер ти бројеви дају остатак 3 при дељењу са 4, а ни са 66, јер је тај број дељив са 2, а није са 4. Дакле, довољно је доказати да се потпун квадрат не може завршавати са бар четири броја 4. Претпоставимо да постоји потпун квадрат који се завршава са бар четири броја 4, тј. нека је $a^2 = 10000k + 4444$, за неке a, $k \in \mathbb{N}$. Број a је паран, па је $a = 2b$, за неко $b \in \mathbb{N}$, и самим тим $b^2 = 2500k + 1111$. Међутим, број $2500k + 1111$ даје остатак 3 при дељењу са 4, па не може бити потпун квадрат, контрадикција.

4. Нека је $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle ACD = \beta$, $\sphericalangle ABD = \gamma$, $\sphericalangle BDC = \delta$. Применом косинусних теорема на троуглове ABC, ACD, ABD, BCD, редом добијамо

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 - 2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos\alpha &= BC^2,\\ CD^2 + AC^2 - 2\cdot CD\cdot AC\cdot\cos\beta &= AD^2,\\ AB^2 + BD^2 - 2\cdot AB\cdot BD\cdot\cos\gamma &= AD^2,\\ CD^2 + BD^2 - 2\cdot CD\cdot BD\cdot\cos\delta &= BC^2.\end{aligned}$$

Заменом у дати израз добијамо

$$\frac{2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos\alpha}{2\cdot CD\cdot AC\cdot\cos\beta} = \frac{2\cdot AB\cdot BD\cdot\cos\gamma}{2\cdot CD\cdot BD\cdot\cos\delta} \Leftrightarrow \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{\cos\gamma}{\cos\delta},$$



ОК 2012, 3Б – 4

па је $\cos\alpha\cdot\cos\delta = \cos\beta\cdot\cos\gamma$. Применом формуле за претварање производа косинуса у збир, добијамо да је последња једнакост еквивалентна са $\cos(\alpha-\delta)+\cos(\alpha+\delta) = \cos(\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma)$. Нека је тачка O пресек дијагонала четвороугла $ABCD$. Тада из троуглова AOB и COD налазимо $\alpha+\gamma=\beta+\delta$, па је $\cos(\alpha-\delta)=\cos(\beta-\gamma)$, односно $\cos(\alpha+\delta)=\cos(\beta+\gamma)$. Како је $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 360^\circ - \sphericalangle AOB - \sphericalangle COD < 360^\circ$, то је из претходне једнакости $\alpha+\delta=\beta+\gamma$, па је $\alpha=\beta$, односно $AB \parallel CD$.

5. Ако се у једној врсти налази бар 10 различитих бројева, онда се у наредне две појављује највише 6 нових бројева. Разбијмо таблицу на 50 парова узастопних врста. У првом пару има највише 16 различитих бројева, а у сваком од следећих 49 има највише 6 нових бројева, што даје укупно највише $16+49\cdot 6=310$ различитих бројева.
Пример таблице са 310 различитих бројева конструишемо на следећи начин. За $k=1,2,\dots,50$, унесимо у $(2k-1)$-ву врсту све природне бројеве од $6k-5$ до $6k+4$, а у $(2k)$-ту врсту све природне бројеве од $6k+1$ до $6k+10$. Ова таблица испуњава услове задатка, а у њој се налазе бројеви од 1 до 310.

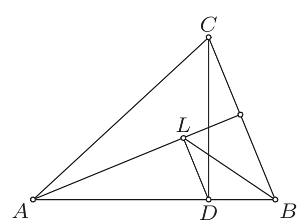
Четврти разред, Б категорија

1. Коефицијент правца праве која пролази кроз тачке A и B једнак је $\dfrac{4-3}{-1-2}=-\dfrac{1}{3}$, па је потребно одредити тачку дате функције у којој је коефицијент правца тангенте једнак $-\dfrac{1}{3}$. Како је коефицијент правца тангенте у тачки x_0 функције $y=f(x)$ једнак $f'(x_0)$, то је $1-\dfrac{1}{x_0+1}=-\dfrac{1}{3}$, односно $x_0=-\dfrac{1}{4}$. Дакле, тражена тачка је $\left(-\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{4}-\ln\dfrac{3}{4}\right)$. (Тангента 66, стр. 38, Писмени задаци, задатак 1)

2. Претпоставимо да је функција f периодична и нека је $T>0$ једна њена периода (не обавезно минимална). Како је $f(0)=f(T)$, то је $0=\sin T^2$, одакле је $T^2=k\pi$, за неко $k\in\mathbb{N}$, односно $T=\sqrt{k\pi}$. Нека је n произвољан природан број. Из $f(\sqrt{n\pi})=f(\sqrt{n\pi}+T)$ имамо $0=\sin(\sqrt{n\pi}+T)^2$, те како је $T=\sqrt{k\pi}$, добијамо $(\sqrt{n\pi}+\sqrt{k\pi})^2=l_n\pi$, за неко $l_n\in\mathbb{Z}$. Одавде, сређивањем, налазимо да је $2\sqrt{kn}=l_n-k-l\in\mathbb{N}$. Дакле, за сваки природан број n важи да је $2\sqrt{nk}$ природан број. Специјално, за $n=1$ и $n=2$ имамо да су бројеви $2\sqrt{k}$ и $2\sqrt{2k}$ природни. Самим тим, њихов количник је рационалан број, односно $\dfrac{2\sqrt{2k}}{2\sqrt{k}}=\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$, контрадикција. Овим смо доказали да функција f није периодична.

3. Како је $2^x>2012$, то је $x\geqslant 11$. Сада је $6^y=2^x-2012\geqslant 2^{11}-2012=36$, па је $y\geqslant 2$. При томе, ако је $y=2$, тада је $x=11$ и ово је једно решење дате једначине. Уколико је $y\geqslant 3$, тада је 6^y дељиво са 8, а како је $x\geqslant 11$, то је и 2^x дељиво са 8, па је 2^x-6^y дељиво са 8. Међутим, 2012 није дељив са 8, па је $(x,y)=(11,2)$ једино решење једначине.

4. Како је $\sphericalangle DAL = 90^\circ - \sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD$, $AD=CB$ и $\sphericalangle ALD=\sphericalangle CDB=90^\circ$, то је по ставу УСУ $\triangle ADL\cong\triangle CBD$, па је $LD=DB$. Самим тим, троугао DBL је једнакокраки, па је $\sphericalangle DLB=\sphericalangle DBL$. Сада је $180^\circ=\sphericalangle LAB+\sphericalangle ABL+\sphericalangle BLA = 90^\circ-\sphericalangle ABC+\sphericalangle ABL+90^\circ+\sphericalangle ABL$, па је $2\cdot\sphericalangle ABL=\sphericalangle ABC$, што је и требало доказати. (Тангента 66, стр. 16, Наградни задаци, М990)



ОК 2012, 4Б – 4

5. Нека су $a_1,a_2,\dots,a_{2011}$ бројеви записани на картицама и нека је p тражени број питања. За сваки од бројева a_i, $1\leqslant i\leqslant n$, морамо поставити барем једно питање везано за производ три броја међу којима је један a_i, па је $p\geqslant\dfrac{2011}{3}$, односно $p\geqslant 671$. Постављањем питања везана за производе $a_1a_2a_3, a_1a_4a_5, a_1a_6a_7$ и $a_{3l-1}a_{3l}a_{3l+1}$, за $3\leqslant l\leqslant 670$, можемо сазнати и производ свих бројева, јер је

$$a_1a_2a_3\cdot a_1a_4a_5\cdot a_1a_6a_7\cdot\prod_{l=3}^{670}a_{3l-1}a_{3l}a_{3l+1}=a_1^2\cdot\prod_{i=1}^{2011}a_i=\prod_{i=1}^{2011}a_i,$$

па је $p=671$.