VEKTORI

Nenad O. Vesić[1]

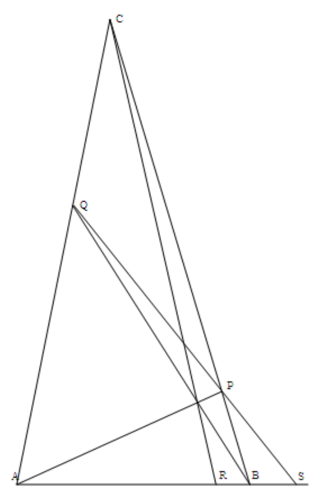
1 Uvod

Odnos vektora $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}$, jednak je α $\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = \alpha\right)$, ako je

$$\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{CD}.$$

Teorema 1 (TEOREME BLIZANCI)

Dat je trougao $\triangle ABC$ i tačke P i Q na pravama BC, CA redom i tačke R i S na pravoj AB.



1. *(**Čevaova teorema**) Prave AP, BQ i CR su paralelne ili se seku u jednoj tački* (pripadaju jednom pramenu pravih) *ako i samo ako je*

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1.$$

[1]student-doktorant, Prirodno-matematički fakultet Niš
e-mail:vesic_specijalac@yahoo.com

2. *(**Menelajeva teorema**) Tačke P, Q i S su kolinearne (pripadaju jednoj pravoj) ako i samo ako je*

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{SB}} = -1.$$

Podsetimo se da je dužina d duži AB norma vektora $\overrightarrow{AB}$

$$\left(d = |\overrightarrow{AB}|\right).$$

Podsetimo se i da za proizvoljna dva vektora $\overrightarrow{a_i}, i = \overline{1,n}$ važi nejednakost trougla

$$|\overrightarrow{a_1} + \ldots + \overrightarrow{a_n}| \leq |\overrightarrow{a_1}| + \ldots + |\overrightarrow{a_n}|.$$

Jednakost u prethodnoj nejednakosti važi ako i samo ako su vektori $\overrightarrow{a_i}, i = \overline{1,n}$ istosmerni, tj. $\overrightarrow{a_i} = \alpha_i \overrightarrow{a_1}$ za realne konstante $\alpha_i \geq 0$.

Uvedimo još neke neophodne pojmove:

Neka su $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ proizvoljni realni brojevi i neka su $a_1, \ldots, a_n$ proizvoljni vektori. Vektor

$$c = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n$$

je *linearna kombinacija vektora* $a_1, \ldots, a_n$.

Vektori $a_1, \ldots, a_n$ su linearno nezavisni ako iz

$$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n = \overrightarrow{0},$$

gde su $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ realni brojevi, sledi da je

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Vektori koji nisu linearno nezavisni su linearno zavisni vektori.

Pojašnjenje 1 *Ukoliko su vektori $a_1, \ldots, a_n$ linearno zavisni, sledi da je bar jedan od parametara $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ različit od* 0.

Pojašnjenje 2 *Ukoliko su vektori $v_1, \ldots, v_k$ linearno zavisni, neki od tih vektora je moguće predstaviti kao linearnu kombinaciju ostalih.*

Pojašnjenje 3 *Ukoliko su vektori $v_1, \ldots, v_k$ linearno nezavisni, linearnu kombinaciju*

$$c = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots \alpha_k \cdot v_k$$

moguće je na jedinstven način predstaviti kao linearnu kombinaciju vektora $v_1, \ldots, v_k$.

Napomena 1 *Za proizvoljne tačke $A_1, A_2, \ldots, A_n$ je*

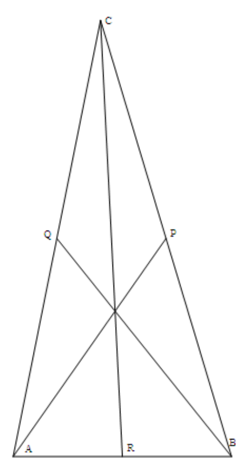
$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_nA_1} = \overrightarrow{0}.$$

Iz prethodne napomene sledi da je zbir vektora određenih stranicama zatvorenog mnogougla jednak $\overrightarrow{0}$. Pored toga, vektori određeni stranicama trougla su još i po parovima linearno nezavisni.

2 VEKTORI I TROUGLOVI

Zadatak 1 *Od težišnih linija trougla, moguće je formirati trougao.*

REŠENjE: Uočimo proizvoljan trougao . Neka su $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BQ}$ i $\overrightarrow{CR}$ vektori određeni težišnim linijama trougla .



Najpre je

$$\begin{cases} \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} \\ \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CQ} \\ \overrightarrow{CR} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AR} \end{cases}$$

i kako su tačke A_1, B_1 i C_1 središta duži BC, CA i AB, sledi da je

$$\begin{cases} \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}, \\ \overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}, \\ \overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \end{cases}$$

tj.

$$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CR} = \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) = \overrightarrow{0}.$$

Dokažimo da su vektori $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BQ}$ i $\overrightarrow{CR}$ linearno nezavisni po parovima. Dovoljno je, bez umanjenja opštosti, dokazati linearnu nezavisnost jednog para, recimo $\overrightarrow{AP}$ i $\overrightarrow{BQ}$.

Kako je

$$\begin{cases} \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}, \\ \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}\right), \end{cases}$$

to za proizvoljne realne konstante α i β važi da je

$$\overrightarrow{0} = \alpha\overrightarrow{AP} + \beta\overrightarrow{BQ} = \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)\overrightarrow{BC}.$$

Kako su vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ linearno nezavisni sledi da je

$$\begin{cases} \alpha + \frac{\beta}{2} = 0 \\ \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 0 \end{cases}$$

Rešavanjem prethodnog sistema dobijamo da je $\alpha = \beta = 0$, čime je dokazana linearna nezavisnost vektora $\overrightarrow{AP}$ i $\overrightarrow{BQ}$. Analognim postupkom dokazujemo i linearnu nezavisnost vektora druga dva para čime je zadatak završen.

Zadatak 2 *Tačke P i Q su tačke na stranicama BC i AC trougla $\triangle ABC$, pri čemu je $BP : CP = 1 : 4$ i $CQ : QA = 2 : 3$.*

1. *Ako je R tačka preseka pravih AB i PQ, odrediti odnos*

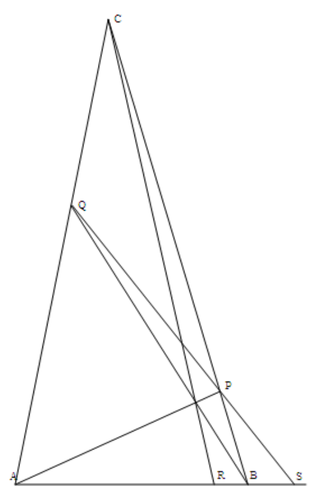
$$\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}.$$

2. *Neka je S tačka prave AB. Odrediti odnos*

$$\frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{SB}}.$$

   tako da su tačke P, Q i S kolinearne.

Rešenje: Rešenje ovog zatatka sledi direktno iz teorema blizanaca.



1. Iz

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1$$

   sledi da je $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = \frac{6}{1}$.

2. Analogno prethodnom, sledi da je

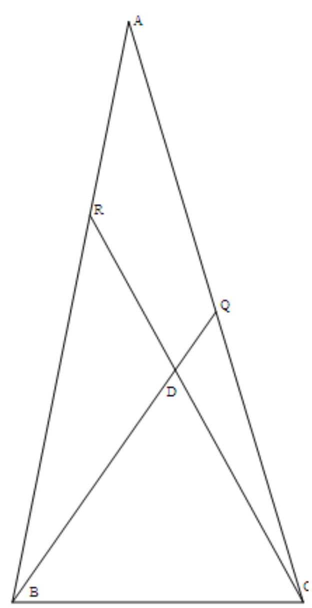
$$\frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{SB}} = \frac{-6}{1}. \quad \square$$

Zadatak 3 *Neka tačka Q stranice AC deli stranicu AC trougla $\triangle ABC$ u razmeri $AQ : QC = n_b : m_b$. Neka još i tačka R stranice AB trougla $\triangle ABC$ deli stranicu AB u odnosu $AR : RB = n_c : m_c$. Ako je tačka D tačka preseka duži BQ i CR, odrediti odnose $BD : DQ$ i $CD : DR$.*

REŠENjE: Ovaj zadatak ćemo rešiti pomoću vektora. Za početak, imamo da je

$$\overrightarrow{BD} = p \cdot \overrightarrow{BQ} \text{ i } \overrightarrow{CD} = q \cdot \overrightarrow{CR},$$

gde su p i q realni brojevi, $0 < p, q < 1$ (zbog rasporeda tačaka $B - D - Q, C - D - R$).



Kako je $\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{BA} + \frac{n_b}{m_b+n_b} \cdot \overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{CR} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{BQ} + \frac{n_c}{m_c+n_c} \cdot \overrightarrow{AC}$ sledi da je

$$\overrightarrow{BD} = p \cdot \overrightarrow{BB_1} = p \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{pn_b}{m_b + n_b}\overrightarrow{AC},$$

$$\overrightarrow{DR} = (1-q)\overrightarrow{CR} = (1-q)\overrightarrow{CA} + \frac{n_c}{m_c + n_c}\overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{C_1B} = \frac{m_c}{m_c + n_c}\overrightarrow{AB}$$

Kako je

$$\vec{0} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DR} + \overrightarrow{RB} = p \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{pn_b}{m_b + n_b}\overrightarrow{AC} +$$

$$(1-q)\left(\overrightarrow{CA} + \frac{n_c}{m_c + n_c}\overrightarrow{AB}\right) + \frac{m_c}{m_c + n_c}\overrightarrow{AB} =$$

$$\left(p + \frac{q \cdot n_c}{m_c + n_c} - 1\right) \cdot \overrightarrow{BA} + \left(\frac{p \cdot n_b}{m_b + n_b} + q - 1\right)\overrightarrow{AC},$$

to zbog linearne nezavisnosti vektora $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{AC}$ sledi da je

$$\begin{cases} p + \frac{q \cdot n_c}{m_c + n_c} = 1 \\ \frac{p \cdot n_b}{m_b + n_b} + q = 1 \end{cases}$$

Rešavanjem prethodnog sistema jednačina, dobijamo da je

$$p = \frac{m_b \cdot m_c + n_b \cdot m_c}{m_b \cdot m_c + n_b \cdot m_c + m_b \cdot n_c} \Rightarrow$$

$$BD : DQ = p : (1-p) = (m_b \cdot m_c + n_b \cdot m_c) : (m_b \cdot n_c),$$

odnosno

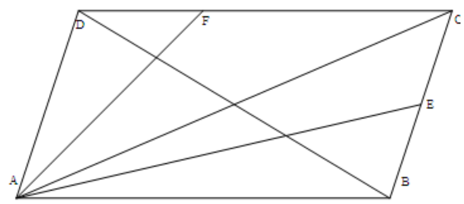
$$q = \frac{m_b \cdot m_c + m_b \cdot n_c}{m_b \cdot m_c + n_b \cdot m_c + m_b \cdot n_c} \Rightarrow$$

$$CD : DR = q : (1-q) = (m_b \cdot m_c + m_b \cdot n_c) : (n_b \cdot m_c).$$

3 VEKTORI I ČETVOROUGLOVI

Zadatak 4 *Dat je paralelogram $ABCD$. Tačke E i F stranica BC i CD paralelograma dele te stranice u razmerama $BE : EC = 1 : 1$ i $CF : FD = 2 : 1$. Dijagonala BD paralelograma $ABCD$ seče duži AE i AF u tačkama K i L. Odrediti odnos $BK : KL : LD$.*

REŠENjE: Neka se dijagonale paralelograma seku u tački O. To znači da je $AO : OC = 1 : 1$.



Posmatrajmo trougao $\triangle ABC$. U zadatku 2. smo dokazali da je $BK : KO = 2 : 1$. Kako se dijagonale paralelograma polove sledi da je

$$1' : \ BK = \frac{2}{6}BD,$$
$$2' : KO = \frac{1}{6}BD.$$

Posmatrajmo trougao $\triangle ADC$. U zadatku 2. smo takođe dokazali da je $DL : LO = 1 : 1$. Odatle sledi da je

$$1" : \ OL = \frac{1}{2}OD = \frac{1}{4}BD,$$
$$2" : \ LD = OL = \frac{1}{4}BD.$$

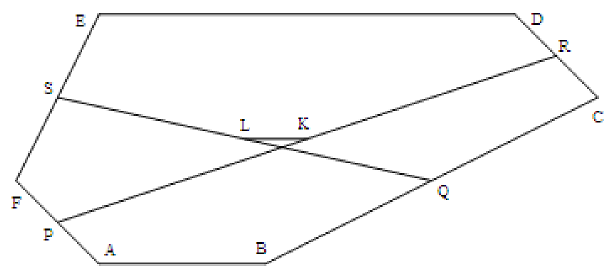
Kako je $KL = KO + OL = \frac{5}{12}DB$ to je

$$BK : KL : LD = 4 : 5 : 3.$$

4 VEKTORI I MNOGOUGLOVI

Zadatak 5 *Neka je $ABCDEF$ konveksni šestougao kod koga je $AB \| DE$. Neka je K središte duži određene središtima stranica AF i CD i neka je L središte duži određene središtima stranica BC i EF šestougla $ABCDEF$. Dokazati da se tačke K i L poklapaju ako i samo ako su duži AB i DE jednake.*

REŠENjE: Neka je P središte stranice AF, Q središte stranice BC, R središte stranice CD i S središte stranice EF. Tačke K i L su središta duži PR i QS, respektivno.



Sada je

$$\begin{cases} \vec{KL} = \vec{KP} + \vec{PF} + \vec{FS} + \vec{SL}, \\ \vec{KL} = \vec{KR} + \vec{RC} + \vec{CQ} + \vec{QL}. \end{cases}$$

Sabiranjem prethodne dve jednakosti i korišcenjem činjenice da su duži PS i QR srednje linije trouglova $\triangle AEF$ i $\triangle BCD$ dobijamo da je

$$\vec{KL} = \frac{1}{2}\left(\vec{PS} + \vec{QR}\right).$$

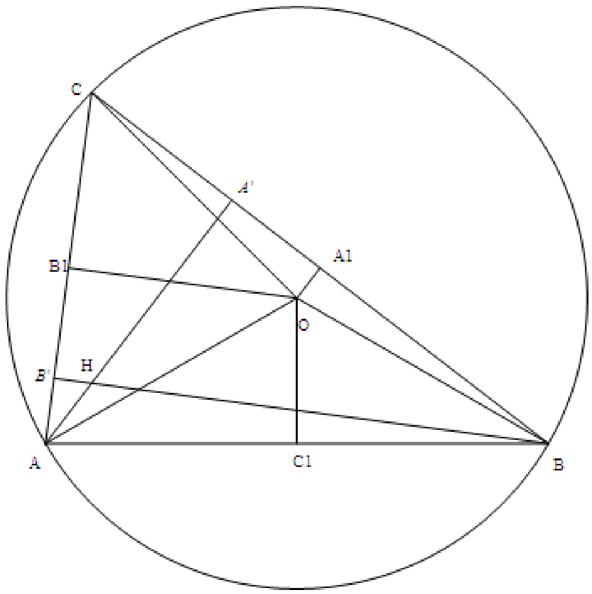
Kako su duži PS i QR srednje linije trouglova $\triangle AEF$ i $\triangle BCD$, sledi da je

$$\vec{KL} = \frac{1}{4}\left(\vec{AE} + \vec{DB}\right) = \left(\vec{0} - \vec{ED} - \vec{BA}\right) = (1+\alpha)\vec{AB}.$$

Sada je jasno da se tačke K i L poklapaju ($\vec{KL} = \vec{0}$) ako i samo ako je $1 + \alpha = 0$, tj. ako i samo ako su duži (ne vektori) AV i DE jednake.

5 Vektori i krug

U ovom delu posmatraćemo vektore primenjene na trougao i krug opisan oko tog trougla. Naredna slika je zajednička za sledeća tri zadatka:



Zadatak 6 *Neka su O i H centar opisanog kruga i ortocentar trougla $\triangle ABC$. Ako su A_1, B_1 i C_1 središta stranica BC, CA i AB trougla $\triangle ABC$, onda je*

$$\begin{cases} 2\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{AH}, \\ 2\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{BH}, \\ 2\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{CH}. \end{cases}$$

REŠENjE: Dokažimo prve dve jednakosti. Vektori $\overrightarrow{OA_1}$ i $\overrightarrow{AH}$ su kolinearni pa je $\overrightarrow{OA_1} = \alpha\overrightarrow{AH}$ i analogno $\overrightarrow{OB_1} = \beta\overrightarrow{BH}$, za neke $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, koje treba odrediti. Kako je $\overrightarrow{BA_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HB}$ i s druge strane $\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{B_1O} + \overrightarrow{OA_1} = \beta\overrightarrow{HB} + \alpha\overrightarrow{AH}$, zaključujemo da je

$$\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\overrightarrow{HB} - \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\overrightarrow{AH} = \vec{0}.$$

Zbog linearne nezavisnosti vektora $\overrightarrow{HB}$ i $\overrightarrow{AH}$ je $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, tj. $2\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{AH}$.

Druge dve jednakosti se dokazuju analogno.

Zadatak 7 *(Hamiltonova teorema)*
Ako su tačke O i H centar opisanog kruga i ortocentar trougla $\triangle ABC$, dokazati da je

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}.$$

REŠENjE: Neka je A_1 središte stranice BC trougla $\triangle ABC$. To, prema prethodnom zadatku, znači da je

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH},$$

što je i trebalo dokazati.

Zadatak 8 *Ako su O i H centar opisanog kruga i ortocentar trougla $\triangle ABC$ onda je*

$$2\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CH}.$$

REŠENjE: U zadatku 5. smo dokazali da je

$$\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CH} = 2\overrightarrow{OA_1} + 2\overrightarrow{OB_1} + 2\overrightarrow{OC_1},$$

gde su A_1, B_1 i C_1 središta stranica BC, CA i AB trougla $\triangle ABC$.

Odatle je

$$\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CH} = 2\left(\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA_1}\right) + \left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB_1}\right) + \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC_1}\right)\right).$$

Konačno je

$$\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CH} = 2\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) + \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right),$$

odnosno

$$\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CH} = 2\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right).$$

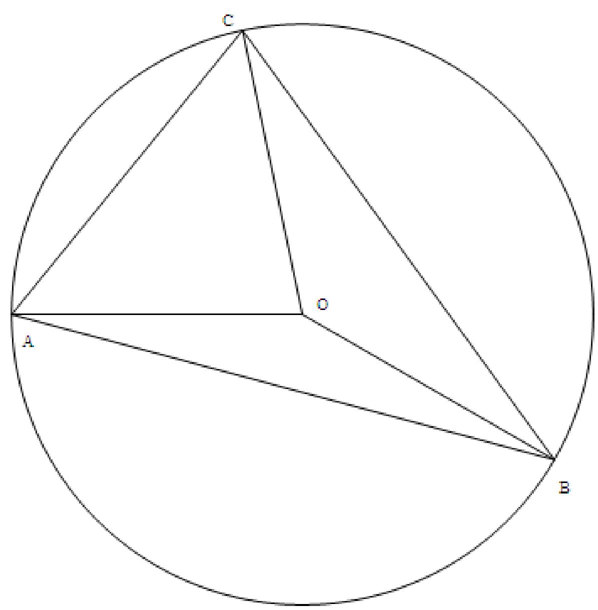
Zadatak 9 *Na krugu $k(O, R)$ date su tačke A, B i C. Ako je*

$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{0},$$

odrediti uglove trougla $\triangle ABC$.

REŠENjE: Neka je H ortocentar trougla $\triangle ABC$. Na osnovu Hamiltonove teoreme je

$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{OH},$$



pa iz uslova zadatka sledi da je $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{0}$, tj. tačke O i H se poklapaju. Odatle sledi da je trougao $\triangle ABC$ jednakostraničan pa su sva tri ugla tog trougla jednaka

$$\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ.$$

Zadatak 10 *Neka je R poluprečnik opisanog kruga oko trougla $\triangle ABC$. Ako je H ortocentar trougla $\triangle ABC$, dokazati da je*

$$R \geq \frac{OH}{3},$$

gde je O centar opisanog kruga trougla $\triangle ABC$.

REŠENjE: Iz Hamiltonove teoreme sledi da je

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}. \qquad (*)$$

Kako je $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{OC}\right| = R$, korišćenjem nejednakosti trougla primenjene na jednakost $(*)$ dobijamo da je

$$OH = \left|\overrightarrow{OH}\right| \leq 3R,$$

odnosno

$$R \geq \frac{OH}{3}.$$

6 Za domaći

Zadatak 11 *Na pravoj p date su različite tačke $A_1, A_2, \ldots A_n$. Na pravoj q date su tačke $B_1, B_2, \ldots, B_n$ za koje je*

$$B_1B_2 : B_2B_3 : \ldots : B_{n-1}B_n = A_1A_2 : A_2A_3 : \ldots : A_{n-1}A_n.$$

Dokazati da središta $S_1, S_2, \ldots S_n$ duži $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$ pripadaju jednoj pravoj.