

TRANSFORMACIJE ALGEBARSKIH IZRAZA

1. Rastaviti na činioce izraz: $(a + b + c)(ab + bc + ca) - abc$.
2. Ako su x, y, z celi brojevi i $x + y + z = 0$, dokazati da je broj $x^3 + y^3 + z^3$ deljiv sa 3.
3. Ako je $a + b + c = 0$ i $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, izračunati $a^4 + b^4 + c^4$.
4. Ako je $x + y + z = a$, $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3}{2}a$, $x^3 + y^3 + z^3 = a^3$, odrediti $xy + yz + zx, xyz$ i $x^4 + y^4 + z^4$.
5. Ako su a, b, c, d pozitivni brojevi za koje važi $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 4abcd$, dokazati da je $a = b = c = d$.
6. Neka su x, y, z realni brojevi za koje važi

$$(y - z)^2 + (z - x)^2 + (x - y)^2 = (y + z - 2x)^2 + (z + x - 2y)^2 + (x + y - 2z)^2.$$

Dokazati da je $x = y = z$.

7. Ako su x i a realni brojevi i $x + a \neq 0$, dokazati da je

$$\frac{x^4 + x^2 a^2 + a^4}{x^3 + a^3} = \frac{x^2 + xa + a^2}{x + a}.$$

8. Neka je $y = \frac{x^2 + x^{-2}}{x^2 - x^{-2}}$ i $z = \frac{x^4 + x^{-4}}{x^4 - x^{-4}}$. Izračunati z u funkciji y .

9. Ako je $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$, dokazati da je

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2.$$

10. Dokazati da je broj $\underbrace{111 \dots 1}_{2n} - \underbrace{222 \dots 2}_n$ kvadrat prirodnog broja.

11. Izračunati zbir $\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx}$ ako realni brojevi x, y, z zadovoljavaju uslov $xyz = 1$.

12. Ako za realne brojeve a, b, c, d važi $ad - bc = 1$, tada je $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + cd \neq 1$. Dokazati.