Pripremna nastava iz matematike
Predavač: Marija Cvetković

17.11.2012.

Elementi teorije brojeva

1. Dokazati da zbir kvadrata pet uzastopnih celih brojeva ne može biti potpun kvadrat.
2. Dokazati da je $n^k - 1$ deljivo sa $n-1$ za svako $n \geq 2,\ n, k \in \mathbb{N}$, a da je $n^k - 1$ deljivo sa $(n-1)^2$ ako i samo ako je k deljivo sa $n-1$.
3. Dokazati da jednačina $ax^2 + bx + c = 0$ nema racionalnih rešenja ako su a, b i c neparni celi brojevi.
4. Odrediti sve proste brojeve p takve da je $5p + 1$ kvadrat prirodnog broja.
5. Naći sve prirodne brojeve n za koje je $S(n) + P(n) = n$, gde je $S(n)$ zbir, a $P(n)$ proizvod cifara broja n.
6. Zbir cifara prirodnog broja x jednak je y, a zbir cifara broja y jednak je z. Odrediti x ako je $x + y + z = 60$.
7. (Zadatak Sofije Žermen) Dokazati da je $n^4 + 4$ složen broj ako je $n \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$.
8. Dva igrača igraju sledeći igru: prvi igrač zapisuje jednu cifru, zatim drugi dopisuje sa leve ili desne strane jednu cifru, potom prvi igrač dopisuje sa leve ili desne strane jednu cifru, nakon čega drugi igrač ponovo dopisuje sa leve ili desne strane jednu cifru itd. Dokazati da prvi igrač može igrati tako da nikada posle poteza drugog igrača zapisani broj nije poptpun kvadrat.
9. Naći sve prirodne brojeve n za koje su:

   (a) $n + 1$, $n + 2$ i $n + 4$ prosti brojevi;

   (b) n, $n + 10$ i $n + 14$ prosti brojevi.
10. Dokazati da ne postoji prost broj p takav da su i brojevi $p + 5$ i $p + 10$ prosti.
11. Zbir 49 prirodnih brojeva je 999. Odrediti najveću moguću vrednost njihovog najvećeg zajedničkog delioca.
12. Ako je n neparan ceo broj, onda $24|n(n^2 - 1)$. Dokazati.
13. Dokazati da je broj $mn(m^4 - n^4)$ deljiv sa 30 za sve $m, n \in \mathbb{N}$.
14. Dokazati da proizvod šest uzastopnih prirodnih brojeva nije peti stepen prirodnog broja.
15. Dokazati da ne postoji ceo broj n takav da $121|n^2 + 3n + 5$.