

Stepenovanje i korenovanje

1. Šta je veće:

(1) $\sqrt{102} + \sqrt{103}$ ili $\sqrt{101} + \sqrt{104}$;

(2) $2 + \sqrt{2}$ ili $6 - \sqrt{6}$;

(3) $0,064^{665}$ ili $0,16^{997}$;

(4) $\frac{5+2\sqrt{5}}{2}$ ili $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$;

(5) $\sqrt{6 + \sqrt{6}}$ ili $3,00001$;

(6) $5\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$ ili $3\sqrt{5} + 7$;

(7) 54^4 ili 21^{12} .

2. Izračunati:

(1) $\sqrt{\underbrace{11\dots 1}_{200} - \underbrace{22\dots 2}_{100}}$;

(2) $\sqrt{\underbrace{44\dots 4}_{2n} + \underbrace{11\dots 1}_{n+1} - \underbrace{66\dots 6}_n}$;

(3) $\sqrt{17 - 4\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} - \sqrt{5}}$;

(4) $\sqrt{(3x - 2)(x - 2) - 2x(x - 2)} - \sqrt{2}$ za $x = 3 - \sqrt{2}$;

(5) $x + 1 + \sqrt{x^2}$ za $x = \sqrt{2} - 1997$;

(6) $\left(\frac{x-x^{-2}}{x^{-2}+x^{-1}+1} - \frac{x-x^{-1}}{1+x^{-2}+2x^{-1}}\right) \div \frac{1-x^{-1}}{1+x^{-1}}$;

(7) $\frac{1}{2\sqrt{1+1\sqrt{2}}} + \frac{1}{3\sqrt{2+2\sqrt{3}}} + \dots + \frac{1}{100\sqrt{99+99\sqrt{100}}}$.

3. Da li je broj $\sqrt{7} - \sqrt{3}$ racionalan? Dokaži!

4. Da li je broj

$$A = (4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}}$$

racionalan?

5. (Opštinsko takmičenje, 2012.) Dokazati da je broj $\frac{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}}{\sqrt{4+2\sqrt{3}-\sqrt{3}}}$ prirodan.

6. (Opštinsko takmičenje, 2004.) Dokazati da je broj

$$A = (\sqrt[6]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}})\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$$

ceo i naći njegovu vrednost.

7. Dokazati da je broj $2\sqrt{8-2\sqrt{7}} + \sqrt{(2\sqrt{7}-6)^2}$ racionalan.
 8. Da li je vrednost izraza

$$1,494949\dots + \sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$$

racionalan ili iracionalan broj?

9. Dokazati da su sledeći brojevi potpuni kvadrati

$$(1) \underbrace{11\dots1}_{1997} \underbrace{22\dots2}_{1998} 5;$$

$$(2) \underbrace{11\dots1}_{2000} - \underbrace{22\dots2}_{1000}.$$

10. (Okružno, 2011.) Odrediti sve prirodne brojeve n takve da je broj

$$\left| n - \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}} \right| + \left| 3 - \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}} \right|$$

racionalan.

11. Za koje vrednosti a i b je $a^2 - a\sqrt{2} + b - 2\sqrt{b} + 3/2 = 0$?
 12. Odrediti najmanji prirodan broj n za koji je vrednost izraza

$$\frac{\sqrt{1998} + \sqrt{n}}{\sqrt{1998} - \sqrt{n}}$$

prirodan broj.

13. Dokazati jednakosti

$$(1) \sqrt{(a+b)^3} - \sqrt{(a-b)^3} = \sqrt{2}(2a + \sqrt{a^2 - b^2})\sqrt{a - \sqrt{a^2 - b^2}}, \quad a \geq b \geq 0;$$

$$(2) \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2} \text{ ako je } \sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2 y^4}} = a.$$

Niš, 24.11.2012.

Predavač: Aleksandra Trajković
 twoaleks@yahoo.com