Gimnazija "Bora Stanković", Niš
Dodatna nastava iz matematike za treći i četvrti razred
Sreda, 1.2.2012.

MATE, MATE, MATIKA

predavač: *Miloš Petković*

1. Neka je $f_0(x) = \frac{1}{1-x}$ i $f_n(x) = f_0(f_{n-1}(x))$, za $n = 1, 2, 3, \ldots$. Odrediti $f_{2012}(2012)$.

2. Neka je $f(x) = \frac{2}{4^x+2}$ za svaki realan broj x. Izračunati

$$f\left(\frac{1}{2012}\right) + f\left(\frac{2}{2012}\right) + \ldots + f\left(\frac{2011}{2012}\right).$$

3. Koliko ima jednakokrakih trapeza sa celobrojnim stranicama čiji je obim 2012 ?.

4. Dat je niz brojeva a_n takav da je

$$a_0 = 9 \qquad i \qquad a_{k+1} = 3a_k^4 + 4a_k^3,$$

za sve $k \geq 0$. Dokazati da se dekadni zapis broja a_{11} zavrava sa bar 2012 devetki.

5. Neka je $\triangle ABC$ trougao sa uglovima α, β, γ kod temena A, B, C redom. Dokazati da iz jednakosti $\alpha = 3\beta$ sledi $(a^2 - b^2) = bc^2$. Da li i, obrnuto, iz $(a^2 - b^2)(a - b) = bc^2$ sledi $\alpha = 3\beta$?

6. [*Okružno 2011, IV razred*] U trouglu $\triangle ABC$ je $\angle ACB = 30^0$. Označimo sa D središte stranice BC, a sa E podnožje visine iz temena A ovog trougla. Ako je $\angle CAD = 15^0$ odrediti veličinu $\angle BAE$.

7. U skupu realnih brojeva rešiti jednačinu

$$x = \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + x}}}.$$

8. Neka je n prirodan broj takav da brojevi 5^n i 2^n počinju istom cifrom. Koja je to cifra ?

9. [*Erdos - Suranyi*] Dokazati da za svaki prirodan broj n postoji beskonačno mnogo načina da se n prikaže u obliku

$$n = *1^2 * 2^2 * \ldots * k^2,$$

gde je k ceo broj i $* \in \{+, -\}$.

10. (1) Naći sve prirodne brojeve x i y tako da važi $7^x - 3^y = 4$.

(2) Naći sve prirodne brojeve n i x tako da važi $5^n + 12^n = x^2$.

11. [*Okružno 2007, III razred*] Naći sve polinome oblika $x^n \pm x^{n-1} \pm \ldots \pm x \pm 1$ koji imaju sve korene realne.

12. U svakom polju tablice 2012×2012 napisan je ceo broj. Dozvoljeno je izabrati bilo koji kvadrat 3×3 (sastavljen od 9 polja) ili kvadrat 4×4 (sastavljen od 16 polja) i povećati za 1 svaki broj na poljima izabranog kvadrata. Da li se svaka polazna tablica primenom takvih operacija može transformisati u tablicu u kojoj su svi brojevi parni ?

13. [*Državno 2008, IV razred*] Ako je O presečna tačka dijagonala AC i BD pravilnog petougla $ABCDE$, dokazati da je

$$AO^2 = AC \cdot BC.$$

14. [*Državno 2010, IV razred*] Dve parabole čije su direktrise medjusobno normalne, imaju četiri različite zajedničke tačke A_1, A_2, A_3, A_4. Dokazati da tačke A_1, A_2, A_3, A_4 pripadaju jednoj kružnici.

15. [*Državno 2007, III razred*] Dokazati da jednačina $x + \cos x = 1$ ima tačno jedno rešenje u skupu realnih brojeva.

16. Na stolu se nalaze 2013 novčića okrenutih glavom ili pismom na gore. Grupa od 2013 osoba radi sledeće: prva osoba okreće jedan novčić, druga osoba okreće proizvoljna dva novčića, ..., poslednja osoba okreće ukupno 2013 novčića. Dokazati da kako god bili postavljenji nočići na početku, ljudi iz grupe mogu okretati novčiće tako da na kraju budu svi okrenuti na istu stranu.

17. Dat je trougao $\triangle ABC$. Dokazati da za proizvoljnu tačku O unutar tog trougla, koja nije težište trougla, važi

$$P_A\vec{OA} + P_B\vec{OB} + P_C\vec{OC} = \vec{0},$$

gde su P_A, P_B i P_C redom površine trouglova $\triangle COB, \triangle AOC, \triangle BOA$. Da li tvrdjenje važi za proizvoljnu tačku ravni ABC, koja ne pripada ni jednoj od pravih AB, BC i CA ?

18. Neka je T težište trougla $\triangle ABC$ i $C'(11, 13)$ podnožje visine konstruisane iz temena $C(-10, 13)$. Odrediti jednačinu kružnice koja je opisana oko trougla $\triangle ABC$, ako je dužina stranice AB jednaka 24, a tačka T pripada pravoj $y = 7$.

19. Na tabli su ispisani polinomi x, x^3, $\ldots$, x^{2n+1}, $\ldots$ Novi polinomi mogu se ispisivati na tabli po sledećem pravilu: ako su u jednom trenutku na tabli napisani polinomi $f(x)$ i $g(x)$ (ne obavezno različiti), dozvoljeno je napisati i bilo koji od polinoma $af(x)+b$, $f(x)+g(x)$, $f(g(x))$, za proizvoljan realan broj b i proizvoljan realan broj $a \geq 0$. Da li možemo, koristeći to pravilo, dobiti polinom $x^{2k+1} - 19x + 2012$, za neki pozitivan ceo broj k ?

20. Neka su α, β, γ redom uglovi datog oštrouglog trougla $\triangle ABC$. Dokazati nejednakost:

$$ctg^3\alpha + ctg^3\beta + ctg^3\gamma + 6 \cdot ctg\alpha \cdot ctg\beta \cdot ctg\gamma \geq ctg\alpha + ctg\beta + ctg\gamma$$

.

Za sve primedbe, komentare, sugestije, itd. u vezi zadataka (a i uopšte) možete me kontaktirati putem e-maila ili facebook-a

© Miloš Petković
milospetkovic@gmail.com
www.facebook.com/milospetkoviccc