Gimnazija "Bora Stanković", Niš
Dodatna nastava iz matematike za treći i četvrti razred
Ponedeljak, 9.1.2012.

RAZNI ZADACI

predavač: *Miloš Petković*

1. [*Opštinsko 2011, III razred*] U skupu realnih brojeva rešiti jednačinu $\log_x(x^3+1)\cdot\log_{x+1}x > 2$.

2. [*Opštinsko 2011, IV razred*] Na koliko načina je moguće rasporediti 11 ptica u 3 identična kaveza tako da svaki kavez sadrzi bar tri ptice?

3. Zna se da je $\cos\alpha+\cos\beta = a$, $\sin\alpha+\sin\beta = b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$. Naći $\cos(\alpha+\beta)$ i $\sin(\alpha+\beta)$ u funkciji od a i b.

4. [*Okružno 2009, III razred*] Neka je $n > 2$ prirodan broj. Dokazati da važi $\sin\frac{\pi}{n} > \frac{3}{\sqrt{n^2+9}}$.

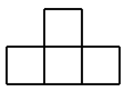
5. Neka je S tačka u kojoj se seku dijagonale četvorougla $ABCD$. Ako je $\angle SAB = \angle SBC = 30°$, $\angle SCD = \angle SDA = 45°$, koliki je ugao izmedju dijagonala ?

6. Neka je $ABCD$ tangentni četvorougao, takav da je $\angle A = \angle B = 120°$, $\angle D = 90°$ i $BC = 1$. Odrediti dužinu stranice AD.

7. U pravougaoniku 3×4 uočeno je 6 tačaka. Dokazati da se medju njima mogu naći dve tačke sa medjusobnim rastojanjem ne većim od $\sqrt{5}$.

8. Iz šahovske table 8×8 izrezano je jedno ugaono polje. Da li se preostali deo table može popločati sa pločicama oblika pravougaonika dimenzija 1×3.

9. Data je šahovska tabla dimenzija $n\times n$. Da li se ona može iseći na delove čiji je oblik prikazan na slici ispod



ako je (a) $n = 2011$? (b) $n = 2012$?

10. Dato je n žetona, koji su podeljeni na nekoliko gomila (može biti i samo jedna).
Posmatra se proizvod svih brojeva žetona na pojedinim gomilama. Koju najveću vrednost može imati taj proizvod?

11. Ako su x_1, x_2, x_3 nule polinoma $P(x) = x^3+px+q,\ p,q\in\mathbb{C}$ dokazati da je $x_1^3+x_2^3+x_3^3 = 3x_1x_2x_3$.

12. U elipsu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ upisati pravougaonik maksimalne površine, tako da njegove stranice budu paralelne osama elipse.

13. [*Okružno 2011, IV razred*] Neka je $k > 0$ a A i B redom tačke preseka parabole $y = x^2$ sa pravama

$$y = kx \ \wedge\ y = -\left(k+\frac{1}{k}\right)\cdot x$$

različite od koordinatnog početka O. Odredi (ako postoje) sve vrednosti k za koje je trougao OAB oštrougli.

14. Rešiti sistem jednačina (a i b su realni parametri):

$$\begin{aligned} x+y+z &= a, \\ x+|1+a|y+z &= 2a, \\ x+y+|1+a|z &= b. \end{aligned}$$

15. [*Okružno 2007, IV razred*] U skupu realnih brojeva rešiti sistem jednačina:

$$\begin{aligned} x+y &= 1, \\ (x^4+y^2)(x^2+y^4) &= 85. \end{aligned}$$

16. Dati su vektori $\vec{m}, \vec{n}$ takvi da je $|\vec{m}| = |\vec{n}| = \sqrt{2}$ i $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$. Odrediti zapreminu paralelopipeda konstruisanog nad vektorima $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, ako je $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + 2\vec{n}$ i $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

17. Neka je O centar opisane kružnice a H ortocentar trougla ABC. Prava AM, gde je M središte stranice BC seče opisanu kružnicu u tački D (važi raspored tačaka $A - M - D$). Ako je E tačka koja je simetrična sa D u odnosu na tačku M dokazati da je $HE \perp AM$.

18. [*Opštinsko 2008, III razred*] U kupu je upisana lopta. Dokazati da je odnos površina kupe i lopte jednak odnosu njihovih zapremina.

19. Na pravouglom bilijarskom stolu nalaze se dve bilijarske loptice A i B. Potrebno je udariti lopticu A tako da se ona odbije od sve četiri strane stola i na kraju udari lopticu B (uz malo srece loptica B moze završiti i u rupici :)). Kako treba udariti lopticu A ?

20. (a) Naći ostatak broja $2^{2012} + 5^{2013}$ pri deljenju sa 13.

(b) Odrediti sve proste brojeve p takve da $p^2 \mid 5^{p^2} + 1$.

21. Dokazati da postoji broj deljiv sa 2012 čijih su prvih 10 cifara (u dekadnom zapisu) 1234567890.

22. Neka su a i b nenegativni realni brojevi. Dokazati nejednakost:

$$\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^8 \geq ab\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

23. Ako je $a > 1$, $b \geq 1$, $x > 0$, dokazati nejednakost

$$(1+\log_a b)(\log_{ab}^2 x + 1) \geq 2\log_a x.$$

24. [*Okružno 2010, III razred*] Odrediti sve $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ koji su rešenja sistema

$$\begin{aligned} \cos x &= 2\cos^3 y \\ \sin x &= 2\sin^3 y. \end{aligned}$$

25. Dokazati jednakost

$$arcctg\ 3 + arcctg\ 5 + \ldots + arcctg\ (2n+1) = arctg\ 2 + arctg\ \frac{3}{2} + \ldots + arctg\ \frac{n+1}{n} - n \cdot arctg\ 1.$$

Za sve primedbe, komentare, sugestije, itd. u vezi zadataka (a i uopšte) možete me kontaktirati putem e-maila ili facebook-a.

© Miloš Petković
milospetkovic@gmail.com
www.facebook.com/milospetkoviccc