ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 21.01.2012.

Први разред, А категорија

1. Нека је E средиште странице CD квадрата $ABCD$. Ако нормала у тачки D на дијагоналу BD сече праву AE у тачки F, доказати да су тачке B, C и F колинеарне.

2. У вестима је дата следећа временска прогноза за сутра:

1) биће облачно или ће падати снег или ће дувати ветар;
2) ако буде облачно са снегом, дуваће ветар;
3) ако не буде ветровито, биће облачно без снега.

Да ли се одатле може закључити да ће, ако буде падао снег, дувати ветар?

3. Одредити све природне бројеве n такве да је број позитивних делилаца броја n^3 за 2011 већи од броја позитивних делилаца броја n.

4. Дат је троугао ABC. Ако је $\sphericalangle ABC > 90^\circ$ и $2 \cdot AB = AC$, доказати да је

$$2 \cdot \sphericalangle ACB > \sphericalangle BAC.$$

5. Доказати да се на стандардну шаховску таблу не може поставити 7, а може поставити 8 ловаца тако да нападају сва поља табле.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 21.01.2012.

Други разред, А категорија

1. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{aligned} x^2 + 3xy &= 54 \\ xy + 4y^2 &= 115. \end{aligned}$$

2. Нека су a, b, c реални бројеви такви да важи

$$\frac{a^2}{1+a^2} + \frac{b^2}{1+b^2} + \frac{c^2}{1+c^2} = 1.$$

Доказати да је $|abc| \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. Када важи знак једнакости?

3. Ако ниједан од углова $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ конвексног четвороугла $ABCD$ није прав, доказати да важи

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma \cdot \operatorname{tg}\delta} = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\delta.$$

4. Тачка S је центар уписаног круга троугла ABC, а D средиште странице AB. Ако је $\sphericalangle ASD = 90^\circ$, доказати да је $AB + BC = 3AC$.

5. На столу се налазе две гомиле жетона, једна од m, друга од n жетона. Два играча играју наизменично, а у сваком потезу дозвољено је једну гомилу поделити на произвољно много мањих (у којима не мора бити једнак број жетона). Губи играч који не може да повуче потез, јер је на свакој гомили остао по један жетон. Који од играча има победничку стратегију?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 21.01.2012.

Трећи разред, А категорија

1. Одредити све $a \in \mathbb{R}$ за које корени x_1, x_2, x_3 полинома $x^3 - 4x^2 - ax + a$ задовољавају једнакост

$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 2)^2 = 0.$$

2. У скупу реалних бројева решити једначину

$$2 \cdot \log_3(\operatorname{ctg} x) = \log_2(\cos x).$$

3. Нека је $\varphi(n)$ вредност Ојлерове функције броја n. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева n за које је $\varphi(n) = \dfrac{n}{3}$.

4. Конвексан шестоугао је уписан у кружницу k. Његове узастопне странице су дужине $2, 2, 7, 7, 11$ и 11. Одредити полупречник кружнице k.

5. За свако $n \in \mathbb{N}$ одредити најмањи природан број m такав да у сваком m-елементном подскупу скупа $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$ постоје два узајамно проста броја.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 21.01.2012.

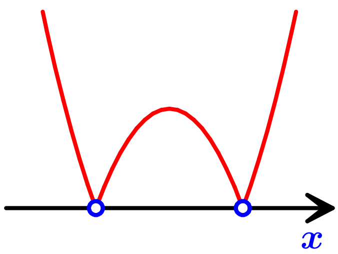
Четврти разред, А категорија

1. Дата је диференцијабилна функција $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$ за коју важи $|f'(x)| < 1$ за свако $x \in \mathbb{R}$. Доказати да једначина $f(x) = x$ има јединствено решење у $\mathbb{R}$.

2. Да ли постоји природан број n и реални бројеви $a_0, a_1, \ldots, a_n$ тако да је на слици приказан график функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, за коју је

$$f(x) = |a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0| - |a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n|,$$

за свако $x \in \mathbb{R}$?



3. Нека је $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ бијекција таква да за све $m, n \in \mathbb{N}$ из $m < n$ следи

$$m + f(m) < n + f(n).$$

Одредити $f(2012)$.

4. Нека је AM пречник кружнице описане око троугла ABC и нека тај пречник сече страницу BC у тачки D. Ако су E и F подножја нормала из тачке D на странице AB и AC, редом, доказати да је $EF \parallel BC$.

5. Природан број зовемо *зао* ако се у његовом бинарном запису налази паран број јединица. На пример, број $18 = (10010)_2$ је зао. Одредити суму првих 2012 злих бројева.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 21.01.2012.

Први разред, Б категорија

1. Нека су CD и CE висина и тежишна дуж троугла ABC, редом, а PQ и PR висина и тежишна дуж троугла MNP, редом. Ако је $CD \cong PQ$, $CE \cong PR$ и $AB \cong MN$, доказати да су троуглови ABC и MNP подударни.

2. На испиту је 21 ученик решавао три задатка. Први и други задатак решило је 6 ученика, други и трећи задатак 7 ученика, а први и трећи задатак 11 ученика. Показати да постоје бар два ученика који су решили сва три задатка и да постоји бар један ученик који је решио само један задатак.

3. Јелена је рекла њеном тати да је данас решила више задатака него јуче (када је такође решила неки задатак). Још је додала да је јуче решила X задатака, а данас Y и да важи $X \cdot Y + (X + Y) = 59$. Колико различитих решења ове Јеленине мозгалице може да нађе њен тата?

4. Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функција таква да за свако $x \in \mathbb{R}$ важи

$$f(3x - 1) = 6x - 8.$$

а) Одредити $f(5)$.

б) Одредити $f(x)$ за свако $x \in \mathbb{R}$.

в) Доказати да је f $1-1$ функција.

г) Скицирати графике функција $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$.

5. У квадратну шему 10×10 постављено је 100 људи различите висине. Одредимо највишег од људи који се налазе у истој колони, а затим најнижег од тих 10 људи – нека је то Пера. Затим, одредимо најнижег од људи који се налазе у истој врсти, а затим највишег од тих 10 људи – нека је то Жика. Да ли се може утврдити ко је виши Пера или Жика?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 21.01.2012.

Други разред, Б категорија

1. Одредити све комплексне бројеве z за које важи $|z| = |z-2i|$ и $|z-1| = 1$.

2. На листу је са три боје нацртано 36 кенгура. Од тога њих 25 има жуте делове, 28 има браон делове, а 20 има делове обојене црном бојом. Ако само 5 кенгура има делове све три боје, колико има једнобојних кенгура?

3. Функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, задата је са $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$, за свако $x \in \mathbb{R}$. Решити неједначину

$$f(f(x)) \leqslant 0.$$

4. Нека је AE тежишна дуж троугла ABC. Права p паралелна са AE сече страницу BC у тачки D, страницу AB у тачки F и продужетак странице AC у тачки G. Доказати да $DF + DG$ не зависи од положаја праве p.

5. Доказати да је број

$$\frac{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\cdot(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}}$$

природан.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 21.01.2012.

Трећи разред, Б категорија

1. Основа праве призме је троугао чије су две странице дужина 3 cm и 5 cm, а угао између њих једнак 120°. Површина бочне стране највеће површине је $35\,\mathrm{cm}^2$. Израчунати површину омотача призме.

2. Нека је $a \in \mathbb{R}$. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{aligned} 3x + ay - z &= a - 1 \\ -x + y + az &= 1 \\ x + 4y + 3z &= 3. \end{aligned}$$

3. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\arcsin 3x = \operatorname{arctg} 5x.$$

4. Зарубљена купа подељена је једном равни паралелној основама на два дела једнаких запремина. Изразити полупречник ρ пресечног круга преко полупречника основа R и r.

5. Да ли се квадрат $\mathcal{K}$ може у потпуности прекрити са

а) 2011

б) 2012

квадрата који немају заједничких унутрашњих тачака и који су садржани у $\mathcal{K}$?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 21.01.2012.

Четврти разред, Б категорија

1. Ако је $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ аритметички низ, доказати да за све $m, n, p \in \mathbb{N}$ важи

$$a_m(n-p) + a_n(p-m) + a_p(m-n) = 0.$$

2. Дат је полином

$$p(z) = z^3 + (3-4i)z^2 - (3+8i)z - 5.$$

Ако је један корен овог полинома облика λi ($\lambda \in \mathbb{R}$), наћи све његове корене.

3. Нека је n природан број и $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функција дефинисана са

$$f_n(x) = \sin^n x - \cos^n x,$$

за свако $x \in \mathbb{R}$. Одредити (ако постоји) најмању и највећу вредност функције f_n.

4. Израчунати површину троугла који образују симетрале првог и другог квадранта и тангента на хиперболу $x^2 - y^2 = 5$ у тачки $M(3, 2)$.

5. Међу свим 10-цифреним бројевима који имају све цифре различите и дељиви су са 11 одредити најмањи и највећи.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.