Припреме за такмичење из математике 24. децембар 2011.

Предавач: Милица Колунџија

Геометријски задаци

1. *(Опш. 2005, II А)* Нека је AB пречник круга k и нека се тетиве AD и BC тог круга секу у тачки E. Доказати да $AE \cdot AD + BE \cdot BC$ не зависи од избора тачака C и D.

2. *(Опш. 2005, II А)* Нека је O центар крута описаног око конвексног четвороугла $ABCD$ и нека је E пресек дијагонала AC и BD. Ако су средишта дужи AD, BC и OE колинеарне тачке, доказати да је тада испуњено или $AB = CD$ или је $\angle AEB = 90°$.

3. *(Опш. 2005, II Б)* У трапезу $ABCD$ краћа дијагонала AC нормална је на основицама $AB = a$ и $CD = b$. Ако је $\angle DAC + \angle ACB = 90°$, наћи дужине кракова BC и AD.

4. *(Опш. 2006, I А)* Одредити углове једнакокраког троугла у коме је дужина симетрале угла на основици једнака двострукој дужини висине која одговара основици.

5. *(Опш. 2006, II А)* Наћи $\angle ACB$ оштроуглог троугла $\triangle ABC$ ако је познато да дуж HN, која спаја подножја висина AH и BN, полови симетралу $\angle ACB$.

6. *(Опш. 2007, I А)* На симетрали $\angle BAC$ троугла ABC уочене су тачке B_1 и C_1 такве да је $BB_1 \perp AB$, $CC_1 \perp AC$. Нека је M средиште дужи B_1C_1. Доказати да је $MB = MC$.

7. *(Опш. 2007, II А)* У равни су задати права l и тачке A и B са исте стране l. Нека је M тачка на l за коју је $AM + MB$ најмање, а N тачка на l за коју важи да је $AN = BN$. Доказати да A, B, M, N леже на истој кржници.

8. *(Окр. 2008, II А)* Око једнакостраничног $\triangle ABC$ је описана кружница. Нека је M тачка која припада луку BC те кружнице, којем не припада теме A. Доказати да је $MA = MB + MC$.

9. *(Окр. 2008, III А)* У $\triangle ABC$, симетрала $\angle BAC$ сече BC у тачки D; права која садржи D и паралелна је са AC сече AB у тачки E; права која садржи E и паралелна је са BC сече AC у тачки F. Доказати да је $AE = FC$.

10. *(Опш. 2010, II А)* Нека је H ортоцентар оштроуглог $\triangle ABC$, а M средиште странице BC. Права која садржи тачку H и нормална је на праву HM сече праве AB и AC у E и F, редом. Доказати да је $HE = HF$.