ZADACI

1. Dokazati da važi nejednakost

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \ ; \qquad x, y, z \in \mathbb{R} \ .$$

2. Ako je $x + y + z = 1$ ($x, y, z \in \mathbb{R}$), dokazati da važi nejednakost

$$xy + yz + zx \leq \frac{1}{3} \ .$$

3. Dokazati da važi nejednakost

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geq \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} \ ; \qquad x, y, z > 0 \ .$$

4. Dokazati da važi nejednakost

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3 b^3 c^3} \ ; \qquad a, b, c \in \mathbb{R} \ , \ abc > 0 \ .$$

5. Ako je $abcd = 1$ i $a, b, c, d > 0$, dokazati da važi nejednakost

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 10 \ .$$

6. Ako je $a, b > 0$, dokazati da važi nejednakost

$$a^2 + b + \sqrt{a} + \sqrt{ab}\left(a\sqrt{b} - 4\sqrt{a}\right) \geq 0 \ .$$

7. Dokazati nejednakost

$$\frac{2x^2 + 1}{\sqrt{4x^2 + 1}} \geq 1 \ ; \qquad x \in \mathbb{R} \ .$$

8. Dokazati da važi nejednakost

$$(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9 \ ; \qquad x, y, z > 0 \ .$$

9. Neka je $a + b + c = 1$. Dokazati da je

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3} \ .$$

10. Dokazati da u svakom trouglu važi nejednakost

$$at_a + bt_b + ct_c \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \ ,$$

pri čemu jednakost važi ako i samo ako je trugao jednakostraničan.

11. Od svih pravouglih trouglova, čiji je obim jednak a, naći onaj trougao čija je površina najveća.

12. Dokazati da za stranice a, b, c i površinu P trougla važi nejednakost

$$P \leq \sqrt{\frac{abc(a + b + c)}{16}} \ .$$

13. Dokazati nejednakost

$$S_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 \ .$$

14. Ako su a, b, c dužine stranica trougla, dokazati da važi nejednakost

$$\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} < 2 \ .$$

15. Dokazati da za $a, b > 0$ i $a + b \geq 1$ važi nejednakost

$$a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8} \ .$$