Pripreme za takmičenje iz matematike

Predavač: Dragan Rakić

Niš, decembar 2011. godine

# Nejednakosti

Napomena: U nastavku se nalazi veliki broj osnovnih nejednakosti koje se koriste u dokazima. Međutim, dovoljno je savladati samo **nejedakost sredina**, a ostale informativno pročitati. Ostale nejednakosti su namenjene ambicioznijim učenicima koji za cilj imaju rezultat na Republičkom takmicenju.

## Osnovne nejednakosti

Neka su $x_1, x_2, ..., x_n$ pozitivni realni brojevi i neka je $r$ realan broj. Tada je sredina reda $r$ brojeva $x_1, x_2, ..., x_n$ definisana sa

$$M_r(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} \left(\frac{x_1^r + x_2^r + \cdots + x_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}}, & \text{za } r \neq 0 \\ \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}, & \text{za } r = 0. \end{cases}$$

Specijalno, $M_{-1}$ je harmonijska, $M_0$ je geometrijska, $M_1$ je aritmetička i $M_2$ je kvadratna sredina brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

**Nejednakost sredina:** Neka su $x_1, x_2, ..., x_n$ pozitivni realni brojevi i $r$ i $s$ realni brojevi takvi da je $r < s$. Tada važi

$$M_r(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq M_s(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

pri čemu jednakost važi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.
Uzimajući za $r$ redom brojeve -1, 0, 1, 2 dobijamo

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}.$$

Najčešće se koristi druga nejednakost i ona se naziva nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine (skraćeno AG nejednakost). Analogno se zovu i ostale nejednakosti.

**Nejednakost trougla:** Za proizvoljne realne brojeve $x_1, x_2, ..., x_n$ važi:

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.$$

**Bernulijeva nejednakost:** Za svaki realan broj $x > -1$ važi

$$(1 + x)^\alpha \geq 1 + \alpha x, \text{ ako je } \alpha \leq 0 \text{ ili } \alpha \geq 1 \text{ i}$$

$$(1 + x)^\alpha \leq 1 + \alpha x, \text{ ako je } 0 \leq \alpha \leq 1.$$

**Ojlerova nejednakost:** Za nizove realnih brojeva $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definisane sa $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ i $y_n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$ važi:

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots < e < \cdots < y_n < \cdots < y_3 < y_2.$$

**Koši-Švarcova nejednakost:** Za realne brojeve $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ važi

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2),$$

pri čemu jednakost važi ako i samo ako postoji realan broj $c$ takav da je $x_i = cy_i$ za $i = 1, 2, \ldots, n$.

**Nejednakost rearanžiranja:** Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i $y_1, y_2, \ldots, y_n$ realni brojevi takvi da je

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \text{ i } y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n,$$

i neka je $\sigma$ permutacija skupa $\{1, 2, ..., n\}$ (to znači da je $\sigma$ bijektivo preslikavanje iz $\{1, 2, ..., n\}$ na $\{1, 2, ..., n\}$, npr. (3,1,4,2) je jedna permutacija skupa $\{1, 2, 3, 4\}$). Tada važi sledeća nejednakost:

$$x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1 \leq x_1 y_{\sigma(1)} + x_2 y_{\sigma(2)} + \cdots + x_n y_{\sigma(n)} \leq x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

**Čebiševljeva nejedankost:** Ako je $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ i $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n$ $(x_i, y_i \in \mathbb{R})$ onda je:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(y_1 + y_2 + \cdots + y_n) \leq n(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n),$$

pri čemu jednakost važi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ ili $y_1 = y_2 = \cdots = y_n$.

**Helderova nejednakost:** Neka su $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ proizvoljne $n$-torke realnih brojeva i $p$ i $q$ pozitivni realni brojevi takvi da je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tada je:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left( \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

pri čemu jednakost važi ako i samo ako postoji $c \in \mathbb{R}$ tako da je $|y_i| = c|x_i|^{p-1}$ za svako $i = 1, 2, ..., n$.

**Nejednakost Minkovskog:** Neka je $p \geq 1$ i $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ za $i = 1, 2, ..., n$. Tada važi:

$$\left( \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{i=1}^{n} |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

pri čemu jednakost važi ako i samo ako postoji $c \in \mathbb{R}$ tako da je $x_i = cy_i$ za $i = 1, 2, ..., n$.

**Jensenova nejednakost:** Ako je funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ konveksna i $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, $\lambda_i > 0$ i $x_i \in (a, b)$ tada važi:

$$f\left( \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Funkcija $f$ je konveksna na intervalu $(a, b)$ ako za svaki par brojeva $x, y \in (a, b)$ važi $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$, što je ekvivalentno sa uslovom $\forall x \in (a, b)(f''(x) > 0)$. Ako je funkcija $f$ strogo konveksna , tada jednakost važi ako i samo ako su svi $x_i$ međusobno jednaki ili su svi $\lambda_i$ sem jednog jednaki 0.

**Karamatina nejednakost:** Niz $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ majorira niz $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ ako uz odgovarajuću prenumeraciju važi $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$, $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$, $\sum_{i=1}^{k} x_i \geq \sum_{i=1}^{k} y_i$, za $k = 1, 2, ..., n-1$ i $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$. Ako su $x = (x_i)_{i=1}^{n}$ i $y = (y_i)_{i=1}^{n}$ dva niza realnih brojeva iz intervala $(a, b)$ pri čemu niz $x$ majorira niz $y$ i ako je $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija tada je:

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \geq f(y_1) + f(y_2) + \cdots + f(y_n).$$

**Šurova nejednakost:** Za nenegativne realne brojeve $x_i$, $i = 1, 2, ..., n$, i $k \in \mathbb{R}$ važi:

$$x_1^k(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots (x_1 - x_n) + x_2^k(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \cdots (x_2 - x_n) + \cdots + x_n^k(x_n - x_1)(x_n - x_2) \cdots (x_n - x_{n-1}) \geq 0,$$

pri čemu jednakost važi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

## Zadaci

1. Neka su $a, b, c$ pozitivni brojevi, takvi da važi $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Dokazati da je:
$$a(b + c) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. Ako su $x, y \in \mathbb{R}$ i $xy = 1$, $x > y$, dokazati da je:
$$x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{2}(x - y).$$

3. Dokazati da za svako $x \geq 0$ važi nejednakost:
$$\sqrt{x}(x + 1) + x(x - 4) + 1 \geq 0.$$

4. Dokazati nejednakost:
$$\log_2 \pi + \log_4 \pi < \frac{5}{2}.$$

5. Dokazati nejednakost:
$$(\log_{2003} 2004)^{-1} + (\log_{2005} 2004)^{-1} < 2.$$

6. Dokazati da za $m, n \in \mathbb{N}$ važi:
$$n\sqrt{m - 1} + m\sqrt{n - 1} \leq mn.$$

7. Dokazati da za pozitivne realne brojeve $a, b$ i $c$ važi nejednakost:
$$(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leq abc.$$

8. Ako su $a, b, c$ pozitivni brojevi, dokazati da ne mogu istovremeno biti ispunjene sve tri nejednakosti:
$$a(1 - b) > \frac{1}{4}, \quad b(1 - c) > \frac{1}{4} \quad \text{i} \quad c(1 - a) > \frac{1}{4}.$$

9. Dokazati da za svako prirodno $n$, $n \geq 2$ važi nejednakost:
$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n + 1} + \cdots + \frac{1}{n^2} > 1.$$

10. Dokazati da za $p \geq 0$ važi nejednakost:
$$(2003^p)^{1-2003^p} + (2003^{2p})^{1-2003^{2p}} + \cdots + (2003^{2003p})^{1-2003^{2003p}} \leq 2003.$$

11. Dokazati da za svaki prirodan broj $n$ važi nejednakost:
$$(2n + 1)^n \geq (2n)^n + (2n - 1)^n.$$

12. Ako su $m$ i $n$ prirodni brojevi, dokazati nejednakost:
$$\frac{1}{\sqrt[m]{n + 1}} + \frac{1}{\sqrt[n]{m + 1}} \geq 1.$$

13. Dokazati da za svaki prirodan broj $n > 2$ važi:
$$\sqrt[n]{n!} > \sqrt{n}.$$

14. Dokazati da za svaki prirodan broj $n > 2$ važi:

$$(n+1)^n < n^{n+1}.$$

15. Neka su $a, b, c$ pozitivni brojevi, takvi da je $a > c$ i $b > c$. Dokazati da je:

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}.$$

16. Dokazati da za svako $a, b, c > 0$ važi nejednakost:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9.$$

17. Neka je $a + b + c = 1$. Dokazati da je:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}.$$

18. Dokazati:

$$\frac{\left(\frac{\sqrt[4]{bc^3}+\sqrt[4]{a^2bc}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} + \sqrt[4]{bc}\right)^2 + bc + 3}{\sqrt{bc}+3} \leq 1 + \frac{b+c}{2}.$$

19. Neka su $x$ i $y$ realni brojevi veći od 1. Dokazati da važi:

$$\frac{x+y}{1+xy} < \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y}.$$

20. Dokazati da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi:

    (a) nejednakost trougla, tj $|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$,

    (b) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n+b^n}{2}$, $\ a, b > 0$,

    (c) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1} > 1$,

    (d) $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n} \leq \sqrt{\frac{1}{3n+1}}$, $\ n \in \mathbb{N}$,

    (e) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} < 1$.

21. Ako su $x, y, z$ pozitivni realni brojevi takvi da je $x + y + z = 1$ dokazati da važi:

$$xy + yz + xz \geq 9xyz.$$

22. Ako su $x, y, z$ pozitivni realni brojevi takvi da je $x + y + z = 1$ dokazati da važi:

$$\frac{x^2}{x+z} + \frac{y^2}{y+x} + \frac{z^2}{z+y} \geq \frac{1}{2}.$$

23. Dokazati nejednakost:

$$(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2)(h_a^2 + h_b^2 + h_c^2) \geq 27P^2,$$

gde su $t_a, t_b, t_c$ dužine težišnih linija, a $h_a, h_b, h_c$ dužine visina trougla. ($t_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$)

24. Dokazati nejednakost:

$$a\sqrt{a^2+c^2} + b\sqrt{b^2+c^2} \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

25. Neka su $a_1, a_2, ..., a_n$ pozitivni realni brojevi čiji je zbir 1. Dokazati da je:

$$\sum_{1\le i,j\le n} \frac{a_i a_j}{a_i + a_j} \le \frac{n}{2}.$$

Na levoj strani je zbir svih izraza oblika $\frac{a_i a_j}{a_i+a_j}$, za $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$.

26. Dokazati da za svaki prirodan broj $n$ važi:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}.$$

27. Dokazati da za sve $a, b, c > 0$ važe sledeće tri nejednakosti:

(a) $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \ge a + b + c$;

(b) $a^3 + b^3 + c^3 \ge a^2 b + b^2 c + c^2 a$;

(c) $a^4 + b^4 + c^4 \ge abc(a + b + c)$.

28. Ako su $a, b, c$ dužine stranica trougla dokazati da je:

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

29. Dokazati da za svako prirodno $n$ važi:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < \frac{7}{4}.$$

30. Dokazati da za pozitivne realne brojeve $a_1, a_2, a_3, a_4$ važi nejednakost:

$$\frac{a_1}{a_2+a_3+a_4} + \frac{a_2}{a_3+a_4+a_1} + \frac{a_3}{a_4+a_1+a_2} + \frac{a_4}{a_1+a_2+a_3} \ge \frac{4}{3}$$

i da jednakost važi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$.

## Rešenja i uputstva

Na internet stranici `http://srb.imomath.com/`, u rubrici zadaci, nalaze se bilteni sa rešenim zadacima sa takmičenja sva tri nivoa od 2005. do 2011. godine. U rubrici pripreme za takmičenja se nalazi dosta zadataka sa priprema Matematičke gimnazije u Beogradu. Na internet stranici `http://nis.dms.rs/` se nalaze zadaci sa priprema održanih u Nišu.

1. (Opštinsko 2003. godine II razred B kategorija) $1 = a^2+b^2+c^2 = \frac{a^2+2b^2}{2} + \frac{a^2+2c^2}{2} = \frac{a^2+2b^2-2\sqrt{2}ab+2\sqrt{2}ab}{2} + \frac{a^2+2c^2-2\sqrt{2}ac+2\sqrt{2}ac}{2} = \frac{(a-\sqrt{2}b)^2+2\sqrt{2}ab}{2} + \frac{(a-\sqrt{2}c)^2+2\sqrt{2}ac}{2} \ge \frac{2\sqrt{2}ab}{2} + \frac{2\sqrt{2}ac}{2} = \sqrt{2}a(b+c)$, odakle sledi tražena nejednakost. Nejednakost smo mogli da dokažemo i primenom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine: $1 = a^2+b^2+c^2 = \frac{a^2+2b^2}{2} + \frac{a^2+2c^2}{2} \ge \sqrt{a^2 \cdot 2b^2} + \sqrt{a^2 \cdot 2c^2} = \sqrt{2}a(b+c)$.

2. (Op. 1998. II) $x^2+y^2 \ge 2\sqrt{2}(x-y) \Leftrightarrow (x-y)^2+2xy \ge 2\sqrt{2}(x-y) \Leftrightarrow (x-y)^2+2 \ge 2\sqrt{2}(x-y) \Leftrightarrow (x-y)^2 - 2\sqrt{2}(x-y) + 2 \ge 0 \Leftrightarrow ((x-y)-\sqrt{2})^2 \ge 0$.

3. (Ok. 2004. II B) Uvedimo smenu $t = \sqrt{x}$. Dobijamo

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x}(x+1) + x(x-4) + 1 = t(t^2+1) + t^2(t^2-4) + 1 = t^4 + t^3 - 4t^2 + t + 1 = \\
&= (t^4 - t^2) + (t^3 - t^2) + (t - t^2) + (1 - t^2) = t^2(t+1)(t-1) + t^2(t-1) - t(t-1) - (t+1)(t-1) = \\
&= (t-1)(t^2(t+1) + t^2 - t - (t+1)) = (t-1)((t^3-1) + (2t^2 - 2t)) = \\
&= (t-1)((t-1)(t^2+t+1) + 2t(t-1)) = (t-1)^2(t^2+t+1+2t) \ge 0.
\end{aligned}$$

4. (Op. 1998. III) $\log_4 \pi = \log_{2^2} \pi = \frac{1}{2}\log_2 \pi$, pa se nejednakost svodi na $\frac{3}{2}\log_2 \pi < \frac{5}{2} \Leftrightarrow 3\log_2 \pi < 5 \Leftrightarrow \log_2 \pi^3 < 5 \Leftrightarrow 2^{\log_2 \pi^3} < 2^5 \Leftrightarrow \pi^3 < 2^5$, što je tačno jer je $\pi^3 < 3,15^3 = 31,255875 < 32$.

5. (Op. 2004. III B) Koristićemo poznata svojstva logaritma: $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$, $\ln(a^r) = r\ln a$, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ i ln je rastuća funkcija.

$$(\log_{2003} 2004)^{-1} + (\log_{2005} 2004)^{-1} = \left(\frac{\ln 2004}{\ln 2003}\right)^{-1} + \left(\frac{\ln 2004}{\ln 2005}\right)^{-1} = \frac{\ln 2003 + \ln 2005}{\ln 2004} =$$
$$= \frac{\ln(2003 \cdot 2005)}{\ln 2004} = \frac{\ln((2004-1)(2004+1))}{\ln 2004} = \frac{\ln(2004^2-1)}{\ln 2004} < \frac{\ln(2004^2)}{\ln 2004} = \frac{2\ln 2004}{\ln 2004} = 2.$$

6. (Op. 2006. II B) Iz AG nejenakosti sledi $\sqrt{m-1} = \sqrt{1\cdot(m-1)} \le \frac{1+(m-1)}{2} = \frac{m}{2}$. Slično je $\sqrt{n-1} \le \frac{n}{2}$, pa sledi $n\sqrt{m-1} + m\sqrt{n-1} \le n\frac{m}{2} + m\frac{n}{2} = mn$.

7. (Op. 2003. IV A) Ako je jedan od činilaca na levoj strani $\le 0$ a ostala dva $\ge 0$ onda je leva strana manja od nule pa nejednakost važi. Ako su bar dva $\le 0$, npr. $a+b-c \le 0$ i $b+c-a \le 0$ onda sabiranjem dobijamo $2b \le 0 \Rightarrow b = 0$, pa se nejednakost svodi na $-(a-c)^2(a+c) \le 0$ što je tačno. Pretpostavimo zato da je $x = a+b-c > 0$, $y = b+c-a > 0$ i $z = c+a-b > 0$. Sledi $a = \frac{x+z}{2}$, $b = \frac{x+y}{2}$ i $c = \frac{y+z}{2}$ pa primenom AG nejednakosti dobijamo

$$abc = \frac{1}{8}(x+z)(x+y)(y+z) \ge \frac{1}{8}\cdot 2\sqrt{xz}\cdot 2\sqrt{xy}\cdot 2\sqrt{yz} = xyz = (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

8. Pretpostavimo suprotno da važe sve tri nejednakosti. Kada ih pomnožimo dobijamo $a(1-a)b(1-b)c(1-c) > \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$. Takođe sledi da je $0 < a,b,c < 1$. Međutim za $x$ koje je u intervalu $(0,1)$ važi (sledi iz AG nejednakosti) $x(1-x) = \sqrt{x(1-x)}^2 \le \left(\frac{x+(1-x)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Zato je $a(1-a)b(1-b)c(1-c) \le \frac{1}{64}$ pa dolazimo do kontradikcije. Zbog toga zaključujemo da ne mogu važiti sve tri nejednakosti.

9. (Ok. 2003. II B) Označimo sa $L(n)$ levu stranu nejednakosti.

$$L(n) = \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) + \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \cdots + \frac{1}{3n}\right) + \cdots +$$
$$+\left(\frac{1}{(n-1)n+1} + \frac{1}{(n-1)n+2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) > \frac{1}{n} + n\frac{1}{2n} + n\frac{1}{3n} + \cdots + n\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Sada lako dobijamo $L(2) = \frac{13}{12} > 1$, $L(3) > \frac{7}{6} > 1$ i $L(n) > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1$, za $n \ge 4$.

10. (Ok. 2003. III B) Neka je $a_k = 2003^{kp}$, $k = 1,2,...,2003$. Tada je $a_k \ge 1$, jer je $p \ge 0$, pa je $a_k^{1-a_k} \le 1$, odakle sledi tražena nejednakost.

11. (Ok. 2003. IV A) Iz binomne formule dobijamo da je $(2n+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(2n)^k$ i $(2n-1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(2n)^k(-1)^{n-k}$, pa je nejednakost ekvivalentna sa $2\binom{n}{n-1}(2n)^{n-1} + 2\binom{n}{n-3}(2n)^{n-3} + \cdots \ge (2n)^n$, što je tačno jer je prvi sabirak na levoj strani jednak $(2n)^n$ a ostali su pozitivni.

12. (Ok. 2000. IV A) Prvi način Iz binomne formule je $\left(1+\frac{n}{m}\right)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k}\left(\frac{n}{m}\right)^k \ge \binom{m}{0}\left(\frac{n}{m}\right)^0 + \binom{m}{1}\left(\frac{n}{m}\right)^1 = 1+n$, pa korenovanjem dobijamo $\frac{m+n}{m} \ge \sqrt[m]{1+n}$, tj. $\frac{1}{\sqrt[m]{1+n}} \ge \frac{m}{m+n}$. Slično je $\frac{1}{\sqrt[n]{1+m}} \ge \frac{n}{m+n}$, odakle se sabiranjem poslednjih dveju nejednakosti dobija tražena nejednakost.
Drugi način. Iz Bernulijeve nejednakosti dobijamo da je $\left(1+\frac{n}{m}\right)^m \ge 1 + \frac{n}{m}m = 1+n$. Ostatak dokaza je isti kao u prvom načinu.
Treći način. Iz AG nejednakosti sledi $\sqrt[m]{n+1} = \sqrt[m]{(n+1)\cdot 1\cdot 1\cdot \ldots \cdot 1} \le \frac{(n+1)+1+1+\cdots+1}{m} = \frac{n+m}{m}$. Slično je $\frac{1}{\sqrt[n]{1+m}} \ge \frac{n}{m+n}$, odakle se sabiranjem poslednjih dveju nejednakosti dobija tražena nejednakost.

13. (Ok. 2000. IV B) Prvi način. Data nejednakost je ekvivalentna sa $(n!)^2 > n^n$. Primetimo da za svako $k$, $1 < k < n$, važi $k(n+1-k) > n$ (naime, kvadratna funkcija po $k$: $-k^2 + k(n+1) - n$ ima nule upravo za $k = 1$ i $k = n$). Stoga je: $1 \cdot n = n$, $2(n-1) > n$, $3 \cdot (n-2) > n$,..., $n \cdot 1 = n$. Množenjem svih ovih nejednakosti(među kojima je bar jedna stroga za $n > 2$) dobija se tražena nejednakost.
Drugi način. Data nejednakost je ekvivalentna sa $(n!)^2 > n^n$ i nju ćemo dokazati metodom matematičke indukcije po $n$, $n \geq 3$. Kako je $(3!)^2 = 36 > 27 = 3^3$ to je nejednakost tačna za $n = 3$. Pretpostavimo da je nejednakost tačna za $n = k$ (tj. $(k!)^2 > k^k$) i dokažimo da je tačna za $n = k+1$. Na osnovu indukcijske pretpostavke sledi $(k+1)!^2 = (k+1)^2 k!^2 > (k+1)^2 k^k = (k+1)^2 k^{k-1} \cdot k > (k+1)^2 k^{k-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{k+1}{k} \cdot (k+1)^{k+1} > (k+1)^{k+1}$. Druga nejednakost sledi na osnovu Ojlerove nejednakosti: $k \geq 3 > e > \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$. Dakle nejednakost je tačna za $n = k+1$ pa je tačna za svako $n$.

14. Dokaz izvodimo matematičkom indukcijom po $n$. Za $n = 3$ imamo $4^3 = 64 < 81 = 3^4$. Pretpostavimo da je nejednakost tačna za $n = k > 3$, tj. da je $(k+1)^k < k^{k+1}$ ... (*). Dokažimo da nejednakost važi za $n = k+1$. Imamo $(k+2)^{k+1} = \frac{(k+1)^k (k+2)^{k+1}}{(k+1)^k} \overset{*}{<} \frac{k^{k+1}(k+2)^{k+1}}{(k+1)^k} = \frac{(k^2+2k)^{k+1}}{(k+1)^k} < \frac{(k^2+2k+1)^{k+1}}{(k+1)^k} = \frac{(k+1)^{2(k+1)}}{(k+1)^k} = (k+1)^{k+2}$. Po principu matematičke indukcije imamo da nejednakost $(n+1)^n < n^{n+1}$ važi za svako $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

15. (R. 2001. II B) Ako i levu i desnu stranu nejednakosti podelimo sa $c$ a nakon toga uvedemo smene $x = \frac{a}{c}$ i $y = \frac{b}{c}$, dobijamo ekvivalentnu nejednakost $\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} \leq \sqrt{xy}$, pri čemu je $x > 1$ i $y > 1$ jer je $a > c$ i $b > c$. Kvadriranjem poslednje nejednakosti dobijamo ekvivalentnu nejednakost $xy - x - y + 2 - 2\sqrt{(x-1)(y-1)} \geq 0$. Primetimo da je izraz na levoj strani jednak $\left(\sqrt{(x-1)(y-1)} - 1\right)^2$ pa je veći ili jednak nuli. Time smo dokazali početnu nejednakost.

16. Stavljajući u Koši-Švarcovu nejednakost da je $x_1 = \sqrt{a}$, $x_2 = \sqrt{b}$, $x_3 = \sqrt{c}$, $y_1 = \frac{1}{\sqrt{a}}$, $y_2 = \frac{1}{\sqrt{b}}$ i $y_3 = \frac{1}{\sqrt{c}}$, dobijamo $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \geq (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2 = (1+1+1)^2 = 9$.

17. Iz uslova zadatka i Koši-Švarcove nejednakosti imamo $1^2 = (a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(1^2 + 1^2 + 1^2) \;\Rightarrow\; (a^2 + b^2 + c^2) \geq \frac{1}{3}$.

U nastavku su data kratka uputstva za svaki zadatak. Naravno zadaci se mogu rešiti i na druge načine.

18. Leva strana nejednakosti je jednaka $1 + \sqrt{bc}$.

19. (Op. 1999. II B) Srediti izraze i primeniti uslov iz zadatka.

20. Matematičkom indukcijom po $n$.

21. Dva puta primeniti AG nejednakost pa iskoristiti uslov iz zadatka.

22. (Ok. 1998. IV) Transformisati izraz, primeniti AG nejednakost (ili nejednakost između kvadratne i aritmetičke sredine) i iskoristiti uslov iz zadatka.

23. Primeniti nejednakost Koši-Švarca.

24. Primeniti nejednakost Koši-Švarca.

25. (R. 2000. I A) Na svaki od sabiraka primeniti nejednakost između aritmetičke i harmonijske sredine (može i AG nejednakost), a zatim srediti dobijenu sumu i primeniti uslov iz zadatka.

26. Pomnožiti obe strane sa $\sqrt{n}$ i nakon toga dva puta kvadrirati.

27. Izraze na levim stranama nejednakosti napisati na drugačiji način i zatim primeniti AG nejednakost. Npr. $\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}=\frac{1}{2}(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b})+\frac{1}{2}(\frac{bc}{a}+\frac{ab}{c})+\frac{1}{2}(\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c})\geq\sqrt{\frac{bc}{a}\frac{ca}{b}}+\sqrt{\frac{bc}{a}\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{ca}{b}\frac{ab}{c}}=c+b+a.$

28. Primetimo da je $2\sqrt{x}\geq\sqrt{x+y-z}+\sqrt{z+x-y}$.

29. Primetimo da je $\frac{1}{i^2}<\frac{1}{i^2-1}=\frac{1}{(i-1)(i+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{i-1}-\frac{1}{i+1}\right)$, za $i=2,3,...,n$.

30. (R. 2000. II A) Dodati broj 4 obema stranama nejednakosti pa primeniti nejednakost između aritmetičke i harmonijske sredine.