Pripremna nastava iz matematike
Predavač: Marija Cvetković

02.02.2013.

Princip matematičke indukcije

1. Dokazati nejednakost $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}<1,\ n\in\mathbb{N}$.
2. Dokazati da je u svakom društvu broj ljudi koji poznaju neparan broj ljudi iz društva paran.
3. Neka su $x,y\in\mathbb{R}^+$. Proveriti kada važi nejednakost $\left(\frac{x+y}{2}\right)^n\leq\frac{x^n+y^n}{2}$, $n\in\mathbb{N}$.
4. Dato je $n+1$ brojeva iz skupa $\{1,2,\ldots 2n\}$. Dokazati da se među njima nalaze dva uzajamno prosta broja i dva broja a i b takva da $a\mid b$.
5. Dokazati da se ravan podeljena sa proizvoljnih n pravih može obojiti sa dve boje tako da su svake dve susedne oblasti obojene različitim bojama.
6. Neka je $f:\mathbb{N}\mapsto\mathbb{N}$ data sa $f(n)=|\{a\ :\ a^2\in[n^2,2n^2],\ a\in\mathbb{N}\}|$, $n\in\mathbb{N}$. Dokazati da je funkcija f rastuća i "na".
7. Dokazati da $15\mid 2^{2^n}-1$ za $n\geq 2$.
8. Dokazati da $2^{n+2}\mid 3^{2^n}-1$, ali 2^{n+3} ne deli $3^{2^n}-1$ za svaki prirodan broj n.
9. (**Nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine**)
   Dokazati:
   $$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n},\ a_i\in\mathbb{R}^+,\ i=\overline{1,n},\ n\in\mathbb{N}.$$
10. Neka su $a_1,a_2,\ldots,a_n$ pozitivni realni brojevi za koje je $a_1a_2\ldots a_n=1$. Dokazati da je tada $(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_n+1)\geq 2^n$.
11. Na srednjoškolskom takmičenju bilo je n, $n\geq 4$ učenika, a dodeljenu su četiri nagrade. Jedan od učenika je primetio da će, bez obzira na to ko osvoji nagrade, postojati jedan dobitnik koji poznaje preostala tri. Dokazati da postoji takmičar koji poznaje sve ostale.
12. Dokazati da je $\underbrace{\sqrt{a^2+\sqrt{a^2+\ldots+\sqrt{a^2}}}}_{n}\leq|a|+1$ za $n\in\mathbb{N}$.
13. Neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz prirodnih brojeva, $a_1=0$, $a_2=1$ i $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$ za svako $n\geq 2$. Odrediti a_n, $n\in\mathbb{N}$.
14. Neka je n prirodan broj i X skup od n^2+1 prirodnih brojeva takvih da svaki podskup od X koji sadrži $n+1$ elemenata sadrži i elemente x i y za koje $x\mid y$. Dokazati da postoji podskup $\{x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}\}\subseteq X$ takav da $x_i\mid x_{i+1}$, $i=1,2,\ldots,n$.