

# KOMBINATORIKA

1. Pauk se kreće po horizontalnoj rešetki koja je u obliku kvadratne mreže dimenzija  $n \times n$ . Kretanje pauka je pravolinijsko, korak po korak, od čvora rešetke do čvora rešetke, ali uvek desno ili gore, pri čemu pauk polazi iz donjeg levog ugla rešetke, a cilj mu je da uhvati muvu koja se nalazi u desnom gornjem uglu. Na koliko različitih načina pauk može stići do muve?
2. Dokazati da za prirodan broj  $n$  i realne brojeve  $x$  i  $y$  važi

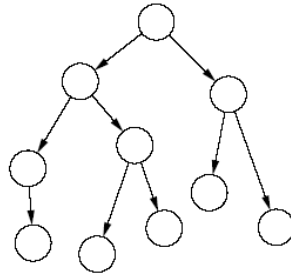
$$(x + y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{n-2}x^2y^{n-2} + \binom{n}{n-1}x^1y^{n-1} + y^n.$$

3. Koliko ima "1-1" funkcija  $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n, n+1\}$ , takvih da je  $f(k) \leq k+1$ , za svako  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$ ?
4. Koliko ima 2012-tocifrenih brojeva čiji je proizvod cifara paran?
5. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od  $10^{2012}$  koji su deljivi sa 3 i u čijem zapisu ne učestvuje cifra 3?
6. Za  $n$ -tocifreni broj  $\overline{c_n c_{n-1} \dots c_2 c_1}$  kažemo da je opadajući akko je

$$c_n > c_{n-1} > \dots > c_2 > c_1.$$

Koliko ima opadajućih  $n$ -tocifrenih brojeva?

7. Na koliko različitih načina možemo upisati brojeve  $1, 2, \dots, 10$  (koristeći svaki broj tačno jednom) u kružice na slici tako da svaka strelica pokazuje od većeg broja prema manjem?



8. Koliko podskupova ima skup koji ima  $n$  elemenata? Dokazati da je

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

9. Neka je  $n \in \mathbb{N}$  i  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ . Koliko elemenata ima skup  $S$ , gde je

$$S = \{(A, B) \mid A \cup B = S\} ?$$

10. Neka je  $n \in \mathbb{N}$  i  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ . Koliko elemenata ima skup  $S$ , gde je

$$S = \{(A, B, C) \mid A \subseteq X, B \subseteq X, C \subseteq X, A \cap B \cap C = \emptyset\} ?$$

11. Koliko ima 2012-tocifrenih brojeva čiji je zbir cifara paran?
12. Koliko ima uredjenih  $k$ -torki  $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k$ , za koje važi  $x_1 + \dots + x_k = n$ ?