

# Полиноми у настави математике у основној и средњој школи

др Владимир Балтић, Математичка гимназија, baltic@matf.bg.ac.yu

Полиноми су изузетно битна тема која се јавља и у основношколској и у средњошколској настави математике. У предавању ћемо детаљно изложити део неопходне материје за излагање полинома у редовној и додатној настави, као и на неке теме (попут Хорнерове шеме и Виетових формул) које су мање заступљене у настави.

У основној школи ова тема се јавља у VII разреду са фондом од 40-так часова (скоро 30% укупног градива VII разреда) и покрива следеће стандарде:

- МА.1.2.2. израчуна степен датог броја, зна основне операције са степенима
- МА.1.2.3. сабира, одузима и множи мономе
- МА.2.2.2. оперише са степенима и зна шта је квадратни корен
- МА.2.2.3. сабира и одузима полиноме, уме да помножи два бинома и да квадрира бином
- МА.3.2.2. користи особине степена и квадратног корена
- МА.3.2.3. зна и примењује формуле за разлику квадрата и квадрат бинома, увежбано трансформише алгебарске изразе и своди их на најједноставнији облик

Дакле, ученици се у основној школи упознају са основним појмовима везаним за степене, полиноме, целе и рационалне алгебарске изразе, обављање основних алгебарских операција на њима, као и растављање на чиниоце. Са свим тиме ће се више сусретати у средњој школи.

У средњој школи ова тема се јавља у I разреду са фондом у гимназијама од око 32 часа (преко 20% укупног градива I разреда), док средњим стручним школама има фонд од 14, 16 или 32 (у зависности од модела наставних планова). При томе су у званичним програмима како обрађивати ову тему даје следеће:

**Рационални алгебарски изрази.** – Циљ ове теме је да ученици, користећи упозната својства операција са реалним бројевима, коначно овладају идејама и поступцима вршења идентичних трансформација полинома и алгебарских разломака. При томе тежиште треба да буде на разноврсности идеја, сврси и суштини тих трансформација, а не на раду са компликованим изразима. Одређену пажњу ваља посветити важнијим неједнакостима (доказивање и примена: неједнакост између средина и др.)

У првој глави ћемо се осврнути на основне појмове: појам полинома, степен полинома, коефицијенте полинома, као и на основне операције са полиномима.

У другој глави ћемо се бавити темама везаним за дељивост полинома, од дељења полинома, преко Безуовог става и Еуклидовог алгоритма до Хорнерове шеме. Хорнерова шема је потпуно неоправдано занемарена и непозната великом делу ученика, али нажалост и наставника. Она је алгоритамски најефикаснији поступак за израчунавање вредности полинома, сложености  $O(n)$ , док је директан поступак за израчунавање полинома сложености  $O(n^2)$ . Такође, она поред вредности полинома, одмах даје и количник при дељењу полинома са  $x - a$ , што налази примену у факторизацији полинома.

У трећој глави ћемо се бавити факторизацијом полинома. Почекнемо са целобројним и рационалним нулама полинома, а завршићемо са факторизацијом у скуповима  $R$  и  $C$ . Ту ћемо прећи и Виетова правила за полиноме, а завршићемо са причом о иредуцибилним полиномима.

У четвртој глави ћемо се бавити неким аналитичким особинама полинома (нпр. осврнућемо се на вишеструке нуле полинома). Даћемо примене Тејлоровог полинома, као и Лагранжовог

интерполяционог полинома. Поменућемо и неке генерализације појма полинома, полиноме више променљивих (са значајном причом о симетричним и антисиметричним полиномима) и функције генератрисе.

У петој глави ћемо се осврнути на рационалне функције, које налазе велику примену код интеграла у математичкој анализи.

Ову значајну тему ћемо илустровати обимним материјалом, који садржи мноштво задатака са такмичења и пријемних испита.

Овде ћемо дати посебан осврт на комплексно-конјугована решења квадратне једначине (тему са кореном смо обрађивали прошле године на семинару, а овде ће нам бити потребно у неким задацима, нпр. у Задатку 70), тј. када решавамо квадратну једначину  $ax^2 + bx + c = 0$  у скупу комплексних бројева  $\mathbb{C}$ . Овај случај се јавља када је дискриминанта квадратне једначине  $D < 0$  и како смо корен увели као функцију која је дефинисана само за ненегативне бројеве, онда у овом случају се и формула за решења разликује (од добро познате формуле  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$  за решења у реалном случају) и она гласи:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a},$$

где  $D$  представља дискриминанту квадратне једначине,  $D = b^2 - 4ac$ . Тиме смо избегли некоректности које наступају из приступа да се вади корен из негативног броја.

## Срећивање алгебарских израза

Приликом рада са полиномима јавља се доста рачуна, па ћемо се прво подсетити на нека математичка правила која користимо приликом срећивања алгебарских израза. Овај увод ће бити и мало детаљнији, него што су нам потребе за рад са полиномима.

Често срећете у збиркама задатак који почиње са „Средити израз“. У свим таквим задацима се подразумева да дати израз поједностављујемо докле год можемо!

### **Приоритет операција.**

Операције множења и дељења имају већи приоритет у односу на операције сабирања и одузимања (прво се врши множење, па онда сабирање, нпр.  $2 + 3 \cdot 5 = 2 + 15 = 17$ ), док степеновање има већи приоритет у односу на множење и дељење (прво се врши степеновање, па онда множење, нпр.  $3 \cdot 2^5 = 3 \cdot 32 = 96$ ). Операције множења и дељења имају исти приоритет, тј. редом се обављају. Исто и сабирање и одузимање имају исти приоритет. Код степеновања треба обратити пажњу да је

$$a^{b^c} = a^{(b^c)} \quad (\text{не важи } a^{b^c} = (a^b)^c \text{ !}).$$

Уколико имамо неки израз унутар заграда, онда ћемо прво њега израчунати према претходним правилима.

### **Степеновање и кореновање.**

Само ћемо навести основне особине:

$$\begin{aligned} a^{m+n} &= a^m \cdot a^n, \\ a^{m-n} &= \frac{a^m}{a^n}, \\ a^{m \cdot n} &= (a^m)^n, \\ a^{-n} &= \frac{1}{a^n}, \quad a^{-1} = \frac{1}{a}, \\ a^{m/n} &= \sqrt[n]{a^m}, \quad a^{1/2} = \sqrt{a}, \\ a^0 &= 1, \quad a^1 = a, \\ a^{1/n} &= \sqrt[n]{a}, \\ \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} &= \sqrt[mn]{a}, \\ (ab)^m &= a^m \cdot b^m, \\ \left(\frac{a}{b}\right)^m &= \frac{a^m}{b^m}, \\ \sqrt{A \pm \sqrt{B}} &= \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}, \\ \sqrt[n]{a^n} &= \begin{cases} a, & n = 2k - 1 \\ |a|, & n = 2k \end{cases}, \\ a \sqrt[n]{b} &= \begin{cases} \sqrt[n]{a^n b}, & n = 2k - 1 \\ \operatorname{sgn}(a) \sqrt[n]{a^n b}, & n = 2k \end{cases} \end{aligned}$$

(функцију  $\operatorname{sgn}(x)$  представља знак броја хи она је једнака 1 за  $x > 0$ , једнака је 0 за  $x = 0$  и једнака је  $-1$  за  $x < 0$ ).

### Степеновање бинома и тринома.

Квадрати бинома (тј. збира и разлике) су:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Кубови бинома (тј. збира и разлике) су:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Квадрати и кубови тринома (тј. збира 3 члана) су:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc,$$

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc.$$

### Разлагања на чиниоце.

Разлика квадрата је:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Разлика кубова је:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$

док је збир кубова:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Уопштење ових формула су следеће две. Разлика  $n$ -тих степена је:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

док је збир  $2k + 1$ -их степена (овде имамо само непаран случај):

$$a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a + b)(a^{2k} - a^{2k-1}b + \dots - ab^{2k-1} + b^{2k}).$$

### Размере, пропорције и двојни разломак.

Једнакост  $a : b = c : d$  назива се пропорција и за њу важи да је производ спољашњих једнак производу унутрашњих чланова пропорције, тј.  $a \cdot d = b \cdot c$ . Ако важи  $a : b = c : d$ , онда је и  $a : c = b : d$ , као и  $a : b = (a \pm c) : (b \pm d)$ .

Продужена пропорција је једнакост  $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \dots = a_n : b_n$ , тј.  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ , што се може записати и у облику  $a_1 : a_2 : \dots : a_n = b_1 : b_2 : \dots : b_n$ . Ако ставимо да је  $\frac{a_1}{b_1} = t$  добијамо да важи  $a_i = t \cdot b_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Двојни разломак је разломак који се састоји од два разломка и за њега, као и за пропорцију, важи да се множе спољашњи и да се множе унутрашњи чланови:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

## Полиноми

**Полином** је израз облика  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , где је  $a_n \neq 0$ .

**Коефицијенти** полинома  $P$  су бројеви  $a_0, a_1, \dots, a_n$  (коефицијент  $a_i$  зовемо коефицијент уз  $i$ -ти степен полинома). Коефицијент  $a_0$  је **слободан члан** полинома  $P$ . **Водећи коефицијент** полинома  $P$ , степена  $n$ , је  $a_n$ .  $P$  је **нормиран полином** (или **моничан полином**) ако је  $a_n = 1$ . За полином кажемо да је **полином целобројним коефицијентима** ако важи  $a_i \in \mathbb{Z}$  за све  $0 \leq i \leq n$ . Слично, ако важи  $a_i \in \mathbb{R}$ , кажемо да је то **полином реалним коефицијентима**.

**Степен полинома**  $P$  је највећи број  $n$  за који је  $a_n \neq 0$  и означавамо га са  $\deg P$  и важи  $\deg P = n$ . Полином који је за сваку вредност  $t$  једнак 0,  $P(x) = 0$ , назива се **нула-полином** и то је једини полином за који није дефинисан степен.

**Пример 1.**  $P(t) = t + 2t^2 + 3t^4$  је полином четвртог степена, тј.  $\deg P = 4$ , док  $P(t) = 1 + t + t^2 + \dots$  није полином, јер има бесконачно много чланова (тј. коефицијената различитих од 0). Степен константног полинома  $P(t) = c$ ,  $c \neq 0$  је једнак 0, тј.  $\deg P = 0$ . ■

У задацима се често тражи збир (свих или неких) коефицијената полинома:

- збир коефицијената полинома је

$$P(1) = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0;$$

- збир коефицијената са парним индексима полинома је

$$\frac{P(1) + P(-1)}{2} = \dots + a_4 + a_2 + a_0;$$

- збир коефицијената са непарним индексима полинома је

$$\frac{P(1) - P(-1)}{2} = \dots + a_5 + a_3 + a_1.$$

Полиноми  $P(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$ ,  $a_n \neq 0$  и  $Q(t) = b_m t^m + b_{m-1} t^{m-1} + \dots + b_1 t + b_0$ ,  $b_m \neq 0$  су **једнаки** ако је испуњено да је  $m = n$  и  $a_i = b_i$  за сваки  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Нека је  $\deg P(t) = n \geq \deg Q(t) = m$ . Операције **сабирања** и **умножења** полинома уводимо на следећи начин:

$$\begin{aligned} P(t) + Q(t) &= (a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0) + (b_m t^m + b_{m-1} t^{m-1} + \dots + b_1 t + b_0) \\ &= a_n t^n + \dots + a_{m+1} t^{m+1} + (a_m + b_m) t^m + \dots + (a_1 + b_1) t + (a_0 + b_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(t) \cdot Q(t) &= (a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0) \cdot (b_m t^m + b_{m-1} t^{m-1} + \dots + b_1 t + b_0) \\ &= (c_s t^s + c_{s-1} t^{s-1} + \dots + c_1 t + c_0), \end{aligned}$$

где је  $c_k = \sum_{i=0}^k a_i \cdot b_{k-i} = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0$  ( $k = 0, 1, \dots, m+n$ ). Овде, уколико неког члана нема узимамо да је одговарајући коефицијент једнак 0.

**Пример 2.** Нека су дати полиноми  $P(t) = t^3 - 3t + 1$  и  $Q(t) = 2t^2 + t - 1$ . Одредити њихов збир, разлику и производ.

**Решење.** Збир та два полинома је  $P(t) + Q(t) = 1 \cdot t^3 + (0 + 2)t^2 + (-3 + 1)t + (1 + (-1)) = t^3 + 2t^2 - 2t$ . Разлика та два полинома је  $P(t) - Q(t) = 1 \cdot t^3 + (0 - 2)t^2 + (-3 - 1)t + (1 - (-1)) = t^3 - 2t^2 - 4t + 2$ .

Производ је дат са  $P(t) \cdot Q(t) = (1 \cdot 2)t^5 + [1 \cdot 1 + 0 \cdot 2]t^4 + [1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + (-3) \cdot 2]t^3 + [0 \cdot (-1) + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 2]t^2 + [(-3) \cdot (-1) + 1 \cdot 1]t + [1 \cdot (-1)] = 2t^5 + t^4 - 7t^3 - t^2 + 4t - 1$ . ■

**Вредност полинома**  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $a_n \neq 0$ , у тачки  $x_0 \in \mathbb{R}$  дефинише се помоћу израза

$$P(x_0) = a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0.$$

Ако је  $P(x_0) = 0$ , тада кажемо да је број  $x_0$  **нула** (или **корен**) полинома  $P$ . Тражење нула полинома ћемо сретати касније код факторисања детерминанти, као и код интеграла рационалне функције.

**Теорема 1.** Ако полином  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $a_n \neq 0$  са целобројним кофицијентима има рационалну нулу  $x_0 = \frac{p}{q}$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}$  (где је  $x_0 = \frac{p}{q}$  скраћен разломак) тада  $p | a_0$  и  $q | a_n$  ( $|$  је ознака за дели).

**Пример 3.** Нека је дат полином  $P(x) = 3 + 2x + x^3$ . Испитати да ли  $P(x)$  има рационалне нуле.

**Решење.** На пример,  $P(0) = 3 + 2 \cdot 0 + 0^3 = 3$ ,  $P(-1) = 3 + 2 \cdot (-1) + (-1)^3 = 0$ ,  $P(3) = 3 + 2 \cdot 3 + 3^3 = 36$ . Ако полином  $P(x)$  има рационалну нулу  $x_0 = \frac{p}{q}$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}$ , тада

$$p | 3 \quad \text{и} \quad q | 1.$$

Из  $q \in \mathbb{N}$  и  $q | 1$  следи  $q = 1$ , а из  $p \in \mathbb{Z}$  и  $p | 3$  следи  $p \in \{-3, -1, 1, 3\}$ , тј. једини кандидати за рационалну нулу су бројеви  $-3, -1, 1, 3$ . Провером се утврђује да је само  $x_0 = -1$  рационална нула:  $P(-1) = 3 + 2 \cdot (-1) + (-1)^3 = 0$ . ■

За полином  $P$  кажемо да је **дељив** полиномом  $Q \neq 0$  ако постоји полином  $T$  такав да је  $P = Q \cdot T$  и то пишемо  $Q | P$ .

**Пример 4.** Показати да је полином  $P(x) = 6x^3 - 11x^2 + 13x - 15$  дељив полиномом  $Q(x) = 3x^2 - x + 5$ .

**Решење.** Да бисмо то проверили, морамо показати да постоји полином  $T$ , такав да је  $P = Q \cdot T$ . Као је  $P$  полином трећег степена, а  $Q$  другог,  $T$  мора бити првог степена, тј.  $T = Ax + b$ . Мора бити

$$6x^3 - 11x^2 + 13x - 15 = (3x^2 - x + 5)(Ax + B) = 3Ax^3 + (3B - A)x^2 + (5A - B)x + 5B,$$

а одатле добијамо систем  $3A = 6$ ,  $3B - A = -11$ ,  $5A - B = 13$ ,  $5B = -15$ .

Јединствено решење тог система је  $A = 2$ ,  $B = -3$ , па је  $T(x) = 2x - 3$ . Тиме смо показали да  $Q | P$ . ■

**Пример 5.** Испитати да ли је полином  $P(x) = 2x^2 + x + 1$  дељив полиномом  $Q(x) = x + 1$ .

**Решење.** Треба да видимо да ли постоји полином  $T(x) = Ax + B$ ,  $A \neq 0$  такав да важи:

$$2x^2 + x + 1 = (x + 1)(Ax + B), \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

Та једнакост није испуњена за свако  $x \in \mathbb{R}$ , јер она није тачна за  $x = -1$ : тада је  $2 \cdot (-1)^2 + (-1) + 1 = 2$ , а  $((-1) + 1)(A(-1) + B) = 0 \cdot (-A + B) = 0$ , па смо добили да  $P$  није дељив са  $Q$ . ■

На овај начин нећемо делити полиноме, него ћемо користити следеће тврђење. Касније ћемо видети да је полином  $P(x)$  дељив полиномом  $Q(x)$  ако и само ако је свака нула полинома  $Q(x)$ , такође и нула полинома  $P(x)$  исте или веће вишеструйности.

**Теорема 2.** За свака два полинома  $P$  и  $Q \neq 0$  постоје јединствени полиноми  $T$  и  $R$ , такви да важи:  $P = Q \cdot T + R$ . При томе, ако је  $\deg Q > 0$ , онда је  $\deg R < \deg Q$ , а ако је  $\deg Q = 0$  онда је  $R = 0$ .

Полином  $T$  се назива **количник** дељења, а полином  $R$  **остатак**. Уколико је  $R = 0$ , кажемо да је полином  $P$  дељив полиномом  $Q$  (тј. дељив без остатка). Практично, дељење полинома  $P$  полиномом  $Q$  спроводимо тако што гледамо колико се садржи водећи члан  $b_m x^m$  полинома  $Q$  у водећем члану полинома  $P$  (или оног што је од њега остало). Резултат ушишемо у количник, онда то помножимо са  $Q$  и тај резултат одузмемо од полинома  $P$  (или оног што је од њега остало). То одузимање је најбоље да извршимо тако што ћемо прво само помножити, а онда сваком кофицијенту променити

знак и сабрати та 2 полинома. Поступак понављамо све док нам испод  $P$  не остане полином степена мањег од степена полинома  $Q$ . Илуструјмо дељење полинома на два примера.

**Пример 6.** Поделити полином  $P(x) = 6x^3 - 11x^2 + 13x - 15$  полиномом  $Q(x) = 3x^2 - x + 5$ .

*Решење.*

$$\begin{array}{r} ( - 6x^3 - 11x^2 + 13x - 15 ) \div ( 3x^2 - x + 5 ) = 2x - 3 \\ \hline - 6x^3 + 2x^2 - 10x \\ \hline - 9x^2 + 3x - 15 \\ \hline 9x^2 - 3x + 15 \\ \hline 0 \end{array}$$

Овде смо добили да је полином  $P(x) = 6x^3 - 11x^2 + 13x - 15$  дељив полиномом  $Q(x) = 3x^2 - x + 5$  (тј. добили смо да је остатак  $R(x) = 0$ ). На основу овог дељења имамо факторизацију:  $P(x) = 6x^3 - 11x^2 + 13x - 15 = (3x^2 - x + 5) \cdot (2x - 3)$ . ■

**Пример 7.** Поделити полином  $P(x) = 2x^2 + x + 1$  полиномом  $Q(x) = x + 1$ .

*Решење.*

$$\begin{array}{r} ( - 2x^2 + x + 1 ) \div ( x + 1 ) = 2x - 1 + \frac{2}{x + 1} \\ \hline - 2x^2 - 2x \\ \hline - x + 1 \\ \hline x + 1 \\ \hline 2 \end{array}$$

Овде смо добили да полином  $P(x) = 2x^2 + x + 1$  није дељив полиномом  $Q(x) = x + 1$  (тј. добили смо остатак  $R(x) = 2$  и количник  $T(x) = 2x - 1$ ). Полином  $P(x)$  можемо представити као  $P(x) = (x + 1) \cdot (2x - 1) + 2$ .

Ако претходно представљање поделимо са  $Q(x)$  добијамо да се количник  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  може се изразити у облику збира количника  $T(x)$  и разломка у коме остатак  $R(x)$  делимо са полиномом  $Q(x)$ :  $\frac{P(x)}{Q(x)} = 2x - 1 + \frac{2}{x + 1}$ . ■

**Напомена.** Оваква „изражавања“ требаће вам у предмету Анализа, код интеграла рационалне функције, а више ћемо се бавити тиме и у делу Рационалне функције.

### Хорнерова шема.

Погодан метод за рачунање вредности полинома у тачки  $\alpha$ , као и за дељење полинома  $P(x)$  полиномом  $x - \alpha$  је **Хорнерова шема** (добијамо и  $Q(x)$  и  $r$ , где је  $P(x) = (x - \alpha)Q(x) + r$ ). У шему горе упишемо коефицијенте полинома  $P(x)$ , почев од водећег ( $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ ), лево упишемо број  $\alpha$  и онда по следећем алгоритму одређујемо коефицијенте количника  $Q(x)$  ( $b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_1, b_0$ ) и остатак  $r$ :

- водећи коефицијент,  $a_n$ , само препишемо, тј.  $b_{n-1} = a_n$ ,
- сваки следећи коефицијент ( $b_k$ ) добијамо тако што број који је лево од њега ( $b_{k+1}$ ) помножимо са  $\alpha$  и томе додамо број изнад њега ( $a_{k+1}$ ), тј.  $b_k = b_{k+1} \cdot \alpha + a_{k+1}$  (укључујући и  $R = b_0 \cdot \alpha + a_0$ ).

Последњи број који добијамо је остатак  $r$  и он је, по Безуовом ставу, баш једнак вредности полинома  $P(\alpha)$ , тј.  $r = P(\alpha)$ . Овај целокупан поступак можемо приказати шемом (**љубичасти изрази** су изрази које рачунамо – њих не уписујемо у шему!):

$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	...	$a_2$	$a_1$	$a_0$
$a_n$	$\alpha \cdot b_{n-1} + a_{n-1}$	$\alpha \cdot b_{n-2} + a_{n-2}$	...	$\alpha \cdot b_2 + a_2$	$\alpha \cdot b_1 + a_1$	$\alpha \cdot b_0 + a_0$
$\alpha$	$b_{n-1}$	$b_{n-2}$	$b_{n-3}$	...	$b_1$	$b_0$

Поновимо Пример 7, али сада коришћењем Хорнерове шеме.

**Пример 8.** Поделимо полином  $P(x) = 2x^2 + x + 1$  полиномом  $T(x) = x + 1$ .  
Кофицијенти полинома  $P(x) = 2x^2 + x + 1$  су, редом, 2, 1, 1, док је  $\alpha = -1$ , јер је  $x + 1 = x - (-1)$ .

$$\begin{array}{c|cc|c} & 2 & 1 & 1 \\ \hline -1 & 2 & -1 & \boxed{2} \end{array}$$

Објаснимо како смо добили црне и плави број у Хорнеровој шеми. Први број 2 смо само спустили (од 2), док следеће рачунамо као:  $-1 = 2 \cdot (-1) + 1$  и  $2 = -1 \cdot (-1) + 1$ .

Дакле, кофицијенти од  $Q(x)$  су 2 и -1, тј.  $Q(x) = 2x - 1$ , а остатак је  $r = 2$ .

Такође, добили смо и вредност полинома  $P(x)$  у тачки  $x = -1$ , тј.  $P(-1) = 2$ .

### Полиноми са целобројним кофицијентима.

За полином  $P(x)$  са целобројним кофицијентима и целе бројеве  $\alpha$  и  $\beta$  важи  $\alpha - \beta \mid P(\alpha) - P(\beta)$ .

Подсетимо се да смо имали Теорему која каже да полином  $P(x)$  са целобројним кофицијентима може да има рационалну нулу  $x = \frac{p}{q}$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}$ ,  $(p, q) = 1$ , само уколико важи  $p \mid a_0$  и  $q \mid a_n$ .

**Безуов став.** Остатак при дељењу полинома  $P(x)$  полиномом  $Q(x) = x - a$  једнак је  $P(a)$ . Посебно, полином  $P(x)$  је дељив са  $x - a$  ако и само ако је  $P(a) = 0$ .

### Факторизација полинома.

Сваки полином може се расставити на линеарне чиниоце у скупу  $\mathbb{C}$ . Другим речима, за сваки полином  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  постоје комплексни бројеви  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  (полином степена  $n$  има тачно  $n$  нула у  $\mathbb{C}$ ), који не морају бити различити, такви да важи

$$(1) \quad P(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n).$$

Ако се неки од ових бројева  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  јавља само једанпут онда кажемо да је то *проста нула* полинома  $P$ . У супротном кажемо да је *вишеструка нула*. Број понављања  $k$  те нуле је *вишеструкост нуле*. Тако на пример, број 2 је двострука нула полинома  $P(x)$  ако се фактор  $x - 2$  јавља тачно 2 пута у расстављању (1). Ако се јавља тачно три пута онда је трострука, итд. Вишеструкост  $k$  нуле  $x = \alpha$  може се увести тако да је то највећи цео број  $k$  такав да важи  $(x - \alpha)^k \mid P(x)$ , али  $(x - \alpha)^{k+1} \nmid P(x)$ . Ако је вишеструкост нуле  $x = \alpha$  једнака  $k$ , онда важи  $P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$  и  $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$ .

### Полиноми са реалним кофицијентима.

Ако полином  $P(x)$  са реалним кофицијентима има комплексну нулу  $z = \alpha + i\beta$  вишеструкости  $k$ , онда је за полином  $P(x)$  и конјуговано-комплексни број  $\bar{z} = \alpha - i\beta$  нула вишеструкости  $k$ .

**Виетове формуле.** Нуле  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  полинома  $p$  и кофицијенти  $a_0, a_1, \dots, a_n$  везани су Виетовим правилима. Ми ћемо их овде дати за случајеве  $n = 3$  и  $n = 4$ , који се најчешће јављају у пракси.

$$\begin{aligned} P_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 & \quad P_4(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= -\frac{a_2}{a_3}, & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 &= -\frac{a_3}{a_4}, \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 &= \frac{a_1}{a_3}, & \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4 &= \frac{a_2}{a_4}, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 &= -\frac{a_0}{a_3}. & \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 &= -\frac{a_1}{a_4}, \\ && \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 &= \frac{a_0}{a_4}. \end{aligned}$$

## Rационалне функције

Нека су  $P(x)$  и  $Q(x)$  полиноми степена  $m$  и  $n$  (тј. важи  $\deg P = m$  и  $\deg Q = n$ ) који немају заједничких делиоца (ако би имали они би се могли скратити). Функцију облика  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  називамо рационалном функцијом. Ако је  $m < n$  кажемо да је то права рационална функција, а уколико је  $m \geq n$  онда је неправа рационална функција и она се може представити у облику  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ , где је  $T(x)$  количник, а  $R(x)$  остатак при дељењу полинома  $P(x)$  полиномом  $Q(x)$  (овде је  $T(x)$  полином, док је  $\frac{R(x)}{Q(x)}$  права рационална функција!). Рационалне функције облика

$$\frac{A}{(x-a)^k}, \quad A, a \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N} \quad \text{и} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^j}, \quad B, C, p, q \in \mathbb{R}, \quad D = p^2 - 4q < 0, \quad j \in \mathbb{N}$$

називају се парцијални разломци и свака рационална функција се може представити у облику збира парцијалних разломака. Када је дискриминанта  $D = p^2 - 4q < 0$  квадратна функција  $x^2 + px + q$  нема реалних нула и онда се не раставља (уколико је  $D \geq 0$  онда квадратни трином можемо да раставимо као  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$  – обратите пажњу овде често заборавите  $a$ !).

Ако је  $Q(x) = (x-a)^k(x-b)^l \dots (x^2+px+q)^r(x^2+ux+v)^s \dots$  тада се рационална функција  $\frac{P}{Q}$  може представити у облику

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \dots + \frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{B_rx+C_r}{(x^2+px+q)^r} + \dots$$

Непознате коефицијенте  $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots, C_1, C_2, \dots$  одређујемо тако што претходну једнакост помножимо са  $Q(x)$  и онда изједначавањем полинома на левој и десној страни добијамо систем једначина, који кад решимо добијамо тражене коефицијенте (брже можемо решити овај систем уколико заменимимо погодне вредности за  $x$ ).

Да поновимо: сваком фактору  $Q(x)$  облика  $(x-a)$  одговара парцијални разломак  $\frac{A}{x-a}$ , тј.

$$\begin{aligned} x-a &\mapsto \frac{A_1}{x-a} \\ (x-a)^2 &\mapsto \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} \\ &\vdots \\ (x-a)^k &\mapsto \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k} \\ (x^2+px+q) &\mapsto \frac{Bx+C}{x^2+px+q} \\ (x^2+px+q)^2 &\mapsto \frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} \\ &\vdots \\ (x^2+px+q)^r &\mapsto \frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{B_rx+C_r}{(x^2+px+q)^r}. \end{aligned}$$

Разбијање рационалне функције на парцијалне разломке се користи код рачунања интеграла, што ћете радити у анализи.

## Задаци

I Појам полинома, основне операције са полиномима, коефицијенти полинома.

1. Дата је функција:  $f(x) = x - x^3$ . Израчунати  $f(-2) =$

2. Дати су полиноми  $P(x) = x^3 + x + 1$ ,  $Q(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ ,  $R(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ .

Проверити да ли за свако  $a \in \mathbb{R}$  важи:

- а)  $P(a) + P(-a) = 2$ ;    б)  $P(1+a) + P(1-a) = 6 + 6a^2$ ;    в)  $Q(a) - Q(-a) = 0$ ;  
г)  $Q(1+a) - Q(1-a) = 8a^3$ ;    д)  $R(a) - R(-a) = 2a^3$ ;    е)  $R(1+a) + R(1-a) = -2$ .

3. За полином  $P(x) = x^3 - x$  одредити полином  $Q(x) = P(x-1) + P(x) + P(x+1)$ .

4. Одредити збир  $P(x) + Q(x)$ , разлику  $P(x) - Q(x)$ , производ  $P(x) \cdot Q(x)$  и линеарну комбинацију  $aP(x) + bQ(x)$  полинома  $P(x)$  и  $Q(x)$  ако је дато:

- а)  $P(x) = 3x^2 - x + 1$ ,  $Q(x) = x - 2$ ,  $a = 3$ ,  $b = 2$   
б)  $P(x) = x^2 - 3x + 1$ ,  $Q(x) = x^2 + x - 1$ ,  $a = 2$ ,  $b = -3$   
в)  $P(x) = 2x^6 - 3x^2$ ,  $Q(x) = 3x^5 + 4x - 3$ ,  $a = 1$ ,  $b = -2$   
г)  $P(x) = -x^3 + x^2 - 2x$ ,  $Q(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ ,  $a = -3$ ,  $b = -2$ .

5. Раставити полином:  $-5x^3 + 11x^2 - 2x$ , на чиниоце.

6. Одредити полином другог степена  $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$  такав да је:    а)  $P(1) = 6$ ,  $P(2) = 11$ ,  
 $P(-1) = 8$ ;

б)  $P(1) = 4$ ,  $P(0) = 3$ ,  $P(2) = 9$ ;    в)  $P(1) = 2$ ,  $P(-2) = 8$ ,  $P(0) = -2$ ;    г)  $P(0) = 1$ ,  $P(1) = 2$ ,  $P(-1) = 6$ .

7. Наћи квадратни полином,  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , ако се зна да је:  $f(1) = -1$ ,  $f(-1) = 9$ ,  $f(2) = -3$ .

8. Наћи полином 3. степена,  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , ако се зна да је:

$f(-1) = 9$ ,  $f(1) = 5$ ,  $f(2) = 3$ ,  $f(3) = -7$ .

9. Наћи полином трећег степена,  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , који пролази кроз тачке:  $(0, 1)$ ,  $(1, -1)$ ,  
 $(2, 5)$ ,  $(3, 37)$ .

10. Наћи полином четвртог степена,  $x = ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + e$ , који пролази кроз тачке:  
 $(5, 0)$ ,  $(-1, 2)$ ,  $(44, 3)$ ,  $(-2, 1)$ ,  $(8, -1)$ .

11. Одредити полином  $P(x)$  ако је

а)  $P(x+3) = x^2 + 2x + 2$ ;    б)  $P(-2x+1) = 2x^2 - x + 3$ ;    в)  $P(x-2) = x^3 - 6x^2 + 11x - 5$ .

12. Одредити збир коефицијената полинома  $P(x)$ :    а)  $P(x) = (2x^2 + x - 4)^{2016}$ ;

б)  $P(x) = (x^2 - x + 1)^{1998} \cdot (x^2 - x + 2)^{10}$ ;    в)  $P(x) = (x^2 - 2x + 3)^{1999} + (x^2 - 6x + 3)^{1999}$ ;

г)  $P(x) = (2x^2 - 5x + 2)^{450} \cdot (2x^2 - 5x + 4)^{540}$ ;    д)  $P(x) = (x^2 + 3x + 2)^{100} \cdot (x^2 - 3x + 2)^{100}$ .

13. Одредити збир коефицијената полинома  $P(x) = (x^5 + x - 1)^{1999}$  уз чланове са непарним степенима.

14. Доказати да не постоји полином  $P$  са целобројним коефицијентима за који је испуњено  $P(2) = 1$  и  $P(5) = 6$ .

15. Да ли постоји полином  $P(x)$  са целобројним коефицијентима такав да је  $P(2) = 7$  и  $P(7) = 2016$ ?

16. Доказати да не постоји полином  $P$  са целобројним коефицијентима такав да је  $P(11) - P(7)$  прост број.

17. Доказати да не постоји полином  $P$  са целобројним коефицијентима такав да је  $P(a) = b$ ,  $P(b) = c$ ,  $P(c) = a$ , где су  $a, b, c$  три различита цела броја.

18. Нека је  $P$  полином са целобројним коефицијентима. Доказати да је за свако  $a \in \mathbb{Z}$  и свако  $b \in \mathbb{N}$  израз  $P(a + \sqrt{b}) + P(a - \sqrt{b})$  цео број.

**19.** Нека су дати полиноми  $P(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^{99} + x^{100}$  и  $Q(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{99} + x^{100}$  и нека је  $P(x) \cdot Q(x) = (c_0, c_1, \dots, c_{200})$ . Доказати да у производу  $P(x) \cdot Q(x)$  нема чланова са непарним експонентом, тј. да су сви  $c_{2k-1} = 0$ , ( $k = 1, 2, \dots, 100$ ).

**20.\*** У којем од полинома  $P(x) = (1 + x^2 - x^3)^{1000}$  и  $Q(x) = (1 - x^2 + x^3)^{1000}$  је коефицијент уз  $x^{20}$  већи?

**21.** Скратити разломак:  $\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{-x^2 + 5x - 6}$ .

**22.** Израчунати:  $(x^4 + 1) : (x - 2) =$

**23.** Средити израз:  $\frac{1}{x^2 - 5x + 6} + \frac{2}{3 - x}$ .

**24.** Скратити разломак:  $\frac{6x^3 - 15x^2 + 6x}{x^3 - 8}$ .

**25.** Средити израз:  $\frac{1}{x^3 - 2x^2 + x - 2} - \frac{1}{x - 2}$ .

**26.** После скраћивања вредност разломка  $\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1}$  је:

A)  $\frac{x+1}{x-1}$ ;      Б)  $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ ;      II) 1;      Д)  $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ ;      Е)  $\frac{x-1}{x+1}$ .

**27.** Средити израз:  $\frac{2(x^4 + 3x^2 + 1) + x^4 + 4x^2 + 1}{x^2 + 3} =$

**28.** Доказати идентитетете: а)  $a^2 \frac{(x-b)(x-v)}{(a-b)(a-v)} + b^2 \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + c^2 \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x^2$ ;

б)  $\frac{(x-a)(x-b)(x-v)}{(d-a)(d-b)(d-v)} + \frac{(x-b)(x-c)(x-g)}{(a-b)(a-c)(a-g)} + \frac{(x-a)(x-c)(x-g)}{(b-a)(b-c)(b-g)} + \frac{(x-a)(x-b)(x-g)}{(c-a)(c-b)(c-g)} = 1$ .

**29.** Доказати: ако полином  $P$ ,  $n$ -тог степена узима вредност нула за  $n+1$  различитих вредности  $x \in \mathbb{C}$ , тада је  $P$  нула-полином.

**30.** Доказати: ако су  $P$  и  $Q$  полиноми  $n$ -тог степена и постоје комплексни, међусобно различити бројеви  $x_0, x_1, \dots, x_n$  такви да важи  $P(x_i) = Q(x_i)$  (за  $i = 0, 1, \dots, n$ ), тада је  $P = Q$ .

**31.** Полином  $P(x) = x^4 + 2x^3 + ax^2 + 2x + b$  је кварат неког полинома  $Q(x)$ , тј. важи  $P(x) = Q(x)^2$ . Одредити  $a, b$  и полином  $Q(x)$ .

**32.**  $P$  је полином четвртог степена такав да је  $P(1) = P(-1)$  и  $P(2) = P(-2)$ . Доказати да је тада  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  парна функција, тј да важи  $P(x) = P(-x)$  ( $\forall x \in \mathbb{R}$ ).

**33.** Одредити полином  $P$  четвртог степена за који је  $P(x) = P(-x)$ .

**34.** Дат је полином  $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ . Доказати да не постоји полином  $Q$  такав да важи  $P(x) = (Q \circ Q)(x)$ , где је  $\circ$  означена композиција функција.

**35.** За линеарни полином (тј. полином облика  $P(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{K}$ )  $P(x) = 2x + 3$  одредити све линеарне полиноме  $Q$  за које важи  $(P \circ Q)(x) = (Q \circ P)(x)$ . За такве полиноме кажемо да комутирају.

**36.** Доказати да не постоји полином  $P$  првог степена који комутира са полиномом  $Q(x) = x^2 - 2$ .

**37. а)** Одредити полиноме  $P$  и  $Q$  за које важи:  $P(x) \cdot Q(x) = (P \circ Q)(x)$  ( $\forall x$ );

**б)** Одредити полином  $P$  за који важи:  $P(x) \cdot P(x) = (P \circ P)(x)$  ( $\forall x$ ).

*II Деливост полинома, Хорнерова шема, Еуклидов алгоритам, Безуов став.*

**38.** Одредити количник и остатак при дељењу полинома  $P(x) = x^3 + x^2 + 2x + 3$  полиномом  $x - 2$ .

**39.** Одредити  $a, b \in \mathbb{R}$  тако да је остатак при дељењу полинома  $P(x) = x^4 - 3x^2 - ax + b$  полиномом  $x + 1$  једнак 3, а полиномом  $x - 2$  једнак -3.

**40.** Остатак при дељењу полинома  $P(x)$  полиномом  $x - 2$  је 2, а полиномом  $x - 3$  је  $P(x)$  делив. Колики је остатак при дељењу  $P(x)$  са  $T(x) = x^2 - 5x + 6$ ?

**41.** Ако полином при дељењу полиномом  $x - a$  даје остатак  $r_a$ , а при дељењу полиномом  $x - b$  даје остатак  $r_b$ , колики је остатак при дељењу полинома  $P(x)$  полиномом  $T(x) = (x - a)(x - b)$ ?

**42.** Да ли је полином  $P(x) = (x^2 + x - 1)^n + (x^2 - x + 1)^n - 2$  делив полиномом  $Q(x) = x^2 - x$ ?

**43.** За које  $n$  је полином  $P(x) = (x - 2)^{2n} + (x - 1)^n - 1$  делив полиномом  $Q(x) = x^2 - 3x + 2$ ?

**44.** Одредити  $a, b \in \mathbb{R}$  тако да полином  $P(x) = 2x^3 + ax^2 - 5x + b$  буде делив полиномом  $Q(x) = x^2 - x - 2$ .

**45.** Одредити остатак при дељењу полинома  $P(x) = x^3 - 4x^2 + ax + b$  полиномом  $Q(x) = x^2$ , ако је полином  $P(x)$  делив са  $x - 2$  и са  $x - 5$ .

**46.** Наћи остатак при дељењу полинома  $P(x) = x^{100} + 3x^{99} + x^2 - 3x + 9$  полиномом  $Q(x) = x^2 + 2x - 3$ .

**47.** Остатак при дељењу полинома  $P(x)$  полиномом  $Q(x) = x^2 + x - 2$  је  $R(x) = x + 1$ . Одредити остатак при дељењу  $P(x)$  са  $x + 2$ .

**48.** Полином  $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  делив је са  $Q(x) = x^2 - 3x + 2$ , а при дељењу са  $T(x)$  даје остатак -24. Одредити коефицијенте  $a, b$  и  $c$ .

**49.** Колики је остатак при дељењу полинома  $P(x) = 2^{100}x^{100} + 2^{99}x^{99} + \dots + 2x + 1$  полиномом **a)**  $Q(x) = x + 1$ ; **б)**  $Q(x) = 2x - 1$ ; **в)**  $Q(x) = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ?

**50.** Одредити остатак при дељењу полинома  $P_n(x)$ ,  $n \geq 2$ , триномом  $Q(x) = (x - 1)(x - 2)$ , ако је остатак при дељењу са  $x - 1$  једнак 2, а са  $x - 2$  једнак 1.

**51.** Ако је полином  $P(x) = x^5 - 3x^4 + ax^3 + x^2 + b$  делив полиномом  $Q(x) = (x - 2)^2$ , одредити вредност израза  $a^2 + b^2$ .

**A)** 16; **Б)** 10; **И)** 13; **Д)** 17; **Е)** 20; **Н)** не знам.

**52.** Познато је да полином  $P(x)$  при дељењу полиномом  $x + 1$  даје остатак 4, а при дељењу полиномом  $x^2 + 1$  остатак  $R(x) = 2x + 3$ . Колики је остатак при дељењу  $P(x)$  полиномом  $Q(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ ?

**53.** Одредити остатак при дељењу полинома  $P(x)$  полиномом  $Q(x) = x^4 + x^2 + 1$  ако  $P(x)$  при дељењу полиномом  $T_1(x) = x^2 + x + 1$  даје остатак  $R_1(x) = -x + 1$ , а при дељењу полиномом  $T_2(x) = x^2 - x + 1$  даје остатак  $R_2(x) = 3x + 5$ .

**54.** Да ли је полином  $P(x) = x^{4n-2} - x^{4n-4} + x^{4n-6} - \dots + x^2 - 1$  делив полиномом  $Q(x) = x^4 - 1$ ?

**55.** Ако је полином  $P(x) = x^{2n} + a_1x^{2n-2} + \dots + a_{n-1}x^2 + a_n$  делив са  $x - 1$ , онда је делив и са  $x^2 - 1$ . Доказати.

**56.** Збир свих коефицијената полинома  $P(x)$  једнак је 2, а збир коефицијената на парним местима једнак је 1. Одредити остатак при дељењу полинома  $P(x)$  полиномом  $Q(x) = x^2 - 1$ .

**57.** Ако полиноми  $P_1$  и  $P_2$  нису деливи полиномом  $Q$ , могу ли њихов збир  $P_1 + P_2$ , производ  $P_1P_2$  и композиција  $P_1 \circ P_2$  бити деливи са  $Q$ ? Ако је могуће дати и пример, а ако није доказати да не може.

**58.** Доказати: ако полином  $P(x)$  са целобројним коефицијентима за  $x = 1, 2, 3, 4$  узима исту вредност  $p$ , где је  $p$  прост број, онда ни за који цео број  $a$  не може бити  $P(a) = 2p$ .

**59.** Одредити  $a, b \in \mathbb{R}$  тако да полином  $P(x) = 6x^4 - 7x^3 + ax^2 + 3x + 2$  буде делив полиномом  $Q(x) = x^2 - x + b$ .

**60.** Доказати да полином  $P(x) = x^6 + x^3 + a$  није делив  $Q(x) = x^3 + x + a$  ни за једно  $a \in \mathbb{R}$ .

**61. а)** Полином  $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 1$  развијте по потенцијама (степенима) од  $(x - 1)$ .

- 6)** Полином  $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$  развијте по степенима од  $(x + 2)$ .  
**в)** Полином  $P(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 1$  развијте по потенцијама од  $(x - 2)$ .  
**г)** Полином  $P(x) = x^4 - 3x^2 - x + 1$  развијте по степенима од  $(x - 3)$ .  
**д)** Полином  $P(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2$  развијте по степенима од  $(x - 2)$ .  
**ћ)** Полином  $P(x) = x^5 + 2x^4 - x^2 + x + 1$  развијте по потенцијама од  $(x + 1)$ .

**62.** Применом Хорнерове шеме развити полином  $P(x)$  по потенцијама (степенима) од  $x - a$  ако је дато:

**а)**  $P(x) = x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 6x - 5$ ,  $a = -2$ ;      **б)**  $P(x) = 2x^5 - 3x^3 + 6x^2 - 8x - 4$ ,  $a = 3$ .

**63.** Коришћењем Хорнерове шеме превести у декадни систем следеће бројеве:

**а)**  $(11010001)_2$ ;    **б)**  $(21102)_3$ ;    **в)**  $(32131)_5$ .

**64.** Ако су полиноми  $P(x)$  и  $Q(x)$  такви да је  $\deg P = n > 1$ ,  $\deg Q = m > 1$ , онда постоје полиноми  $S(x)$  (степена највише  $n - 1$ ) и  $T(x)$  (степена највише  $m - 1$ ), такви да важи:  $P(x)S(x) + Q(x)T(x) = 0$  ако и само ако  $P$  и  $Q$  нису узајамно прости (тј.  $\text{НЗД}(P, Q) \neq 1$ ).

**65.** Одредити полиноме  $S$  и  $T$ , тако да важи  $PS + QT = \text{NZD}(P, Q)$ :      **а)**  $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2$ ,  $Q(x) = x^2 - x + 1$ ;

**б)**  $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 6x - 3$ ,  $Q(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$ ;      **в)**  $P(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 - 4$ ,  $Q(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 4$ .

**66.** За  $P(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$ ,  $Q(x) = x^n - nx + n - 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$  одредити НЗД( $P, Q$ ).

**67.** Доказати да су полиноми  $P(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \dots + 2x + 1$  и  $Q(x) = x^{n-2} + 2x^{n-3} + \dots + (n-2)x + (n-1)$  узајамно прости за свако  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ .

**68.** Испитати да ли је полином  $P(x) = nx^{n+1} - (1+np)x^n + (p-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x) = p$  дељив полиномом  $Q(x) = x^2 - (p+1)x + p$ , где је  $n$  природан, а  $p$  реалан број. Посебно урадити случај када је  $p = 1$ .

**69.** Доказати да је полином  $P_{2n+1}(x) = (x+a+b)^{2n+1} - x^{2n+1} - a^{2n+1} - b^{2n+1}$  дељив полиномом  $P_3(x)$ . Затим решити једначину  $P_5(x) = 0$ .

### III      Нуле полинома (целобројне, рационалне и комплексне), Виетова правила; предуџибилни полиноми.

**70.** Решити у скупу  $\mathbb{C}$  једначине:      **а)**  $x^3 = 1$ ;      **б)**  $x^3 = -8$ .

**71.** Одредити вишеструкост нуле  $x$  полинома  $P(x)$ : **а)**  $x = 3$      $P(x) = 3x^4 - 9x^3 - x^2 + 4x - 3$ ;  
**б)**  $x = -2$      $P(x) = x^5 + 5x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 8x$ ;      **в)**  $x = -\frac{1}{2}$      $P(x) = 4x^3 + 8x^2 + 5x + 1$ .

**72.** Одредити полином четвртог степена коме су корени  $-1$  и  $2$ , а  $-2$  је двоструки корен.

**73.** Одредити моничан полином четвртог степена  $P(x)$  ако је познато да је  $x = -2$  трострука нула полинома  $P(x)$ , а при дељењу полинома  $P(x)$  полиномом  $Q(x) = x + 3$  добија се остатак  $-1$ .

**74.** Одредити заједничке нуле полинома:      **а)**  $P(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ ,     $Q(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ ;  
**б)**  $P(x) = x^4 + 6x^3 + 17x^2 + 24x + 12$ ,     $Q(x) = x^3 - 2x^2 - 13x - 10$ .

**75.** Број  $x = a$  је нула реда  $k$  полинома  $P$  и уједно нула реда  $l > k$  полинома  $Q$ . Одредити вишеструкости нуле  $x = a$  полинома  $P \cdot Q$  и  $P + Q$ .

**76.** Дат је полином  $P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2$ . Нека је  $\alpha$  корен једначине  $x^2 - x - 3 = 0$ . Израчунати  $P(\alpha)$ .

**77.** Бројеви  $x = 1$  и  $x = 2$  су нуле полинома  $P$ , коме је слободан члан једнак 4. Наћи остатак при дељењу полинома  $P(x)$  полиномом  $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ .

**78.** Које услове је потребно да испуњавају природан број  $n$  и реалан број  $a$ , да би полином  $P(x) = x^n - ax^{n-1} + ax - 1$  био дељив полиномом  $Q(x) = (x - 1)^2$ ?

**79.** Одредити  $a$  и  $b$  тако да један корен полинома  $P(x) = x^3 + 6x^2 + ax + b$  буде 3, а остала два корена да буду узастопни цели бројеви.

**80.** Одредити  $a$  и  $b$  тако да је један корен полинома  $P(x) = x^3 + ax^2 + 4x + b$  једнак 2, а и разлика преостала два корена је једнака 2.

**81.** Одредити  $a$  и  $b$  тако да су корени полинома  $P(x) = x^3 + ax^2 + 26x + b$  три узастопна цела броја.

**82.** Збир решења једначине  $x^3 - 8x^2 + 5x + 14 = 0$  једнак је:

- A) -8;      B) 9;      C) 10;      D) 6;      E) 8.

**83.** Једно решење једначине  $x^3 + x^2 = 32x + 60$  је -2. Збир осталих решења те једначине је:

- A) 1;      B) -3;      C) -1;      D) 0;      E) 2.

**84.** Једначина  $x^3 + ax + b = 0$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) има решења  $x_1 = 1$  и  $x_2 = 2$ . Производ свих решења те једначине је:

- A) 1;      B) -6;      C) 2;      D) 6;      E) 10.

**85.** Одредити производ свих решења једначине  $x^4 - 5x^2 + 10x - 6 = 0$ , ако је познато да је  $1 + i$  једно њено решење.

**86.** Ако су  $x_1, x_2, x_3$  решења једначине  $x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$ , онда једначина чија су решења  $x_1^2, x_2^2, x_3^2$  гласи:

- A)  $x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$ ;      B)  $x^3 - 2x^2 + 5x - 1 = 0$ ;      C)  $x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$ ;  
D)  $x^3 + 2x^2 + 5x + 1 = 0$ ;      E)  $x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = 0$ .

**87.** Доказати да за непаран цео број  $q$  једначина  $x^3 + 3x + q = 0$  нема целобројних решења.

**88.** Да би међу коренима полинома  $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  била два супротна броја, потребан и довољан услов је  $ab = c$ . Доказати.

**89.** Доказати да алгебарска једначина  $f(x) = 0$   $n$ -тог степена са целобројним коефицијентима нема целобројних решења ако су бројеви  $f(0)$  и  $f(1)$  непарни.

**90.** Доказати да алгебарска једначина  $f(x) = 0$   $n$ -тог степена са целобројним коефицијентима нема целобројних решења ако ниједан од бројева  $f(1), f(2), f(3)$  није дељив са 3.

**91.** Полином  $P$   $n$ -тог степена са целобројним коефицијентима за  $x = 0, 1, \dots, n-1$  узима вредности различите од нуле и по апсолутној вредности мање од  $n$ . Доказати да  $P$  нема целобројних нула.

**92.** Нека је  $P \in \mathbb{Z}[x]$  и нека су  $a$  и  $b$  узјамно прости цели бројеви. Ако је  $P(a)$  дељив са  $b$  и  $P(b)$  дељив са  $a$ , доказати да је тада  $P(a+b)$  дељив са  $ab$ .

**93.** Ако је број  $\alpha$  нула полинома са целобројним коефицијентима, онда је за све природне  $m$  и број  $\sqrt[m]{\alpha}$  такође нула неког полинома са целобројним коефицијентима.

**94.** Ако је  $x_1 \neq 0$  корен једначине облика  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ , онда је и  $\frac{1}{x_1}$  корен исте једначине. Доказати.

**95.** Одредити  $a, b$  и  $c$  тако да један корен полинома  $P(x) = 6x^3 + ax^2 + bx + c$  буде  $\frac{1}{3}$ , а остала два корена да буду супротни рационални бројеви.

**96.** Доказати да полином са целобројним коефицијентима  $P(x) = px^5 - (p-1)x^2 + 1$ , где је  $p$  прост број, нема рационалних корена.

**97.** Одредити све просте бројеве  $p$  за које једначина  $px^3 + x + 2 = 0$  има бар један рационалан корен.

**98.** Одредити рационалне нуле полинома  $P(x) = 6x^3 - 13x^2 + 9x - 2$ .

- 99.** Раставити на чиниоце полином  $P(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$ .
- 100.** Ако моничан полином  $P$  са целобројним коефицијентима нема целобројних нула, тада су све реалне нуле тог полинома ирационални бројеви.
- 101.** Доказати да за сваки природан број  $n \geq 2$  и прост број  $p$  важи да је  $\sqrt[n]{p}$  ирационалан број.
- 102.** Доказати да ако је  $p$  прост број онда полином  $P(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x + p$  нема рационалних корена.
- 103.** Нека је  $P$  полином са целобројним коефицијентима и нека за три различита цела броја  $a, b$  и  $c$  важи  $P(a) = P(b) = P(c) = 1$ . Доказати да  $P$  нема целобројних корена.
- 104.** Дат је реални полином  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ . Нека су његове нуле  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Одредити нуле полинома:  
 а)  $Q_1(x) = \frac{P^{(n)}(a)}{n!} x^n + \frac{P^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} x^{n-1} + \dots + \frac{P'(a)}{2!} x^2 + P'(a)x + P(a)$ ;  
 б)  $Q_2(x) = a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} - \dots + (-1)^n a_0$ ;  
 в)  $Q_3(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ ;  
 г)  $Q_4(x) = a_n x^n + a_{n-1} b x^{n-1} + a_{n-2} b^2 x^{n-2} + \dots + a_1 b^{n-1} x + a_0 b^n$ , где су  $a$  и  $b$  дати реални бројеви.
- 105.** Ако полином  $P$  са целобројним коефицијентима узима вредност 2 за три различите целобројне вредности, онда  $P$  ни за један цео број не узима вредност 3. Доказати.
- 106.** Доказати да се полином  $P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) - 1$ , где су  $a_1, \dots, a_n$  различити цели бројеви, не може приказати у облику производа два полинома степена  $> 1$  са целобројним коефицијентима.
- 107.** Доказати да се полином  $P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) + 1$ , где су  $a_1, \dots, a_n$  различити цели бројеви, не може приказати у облику производа два полинома степена  $> 1$  са целобројним коефицијентима.
- 108.** Доказати да се полином  $P(x) = (x - a_1)^2(x - a_2)^2 \dots (x - a_n)^2 + 1$ , где су  $a_1, \dots, a_n$  различити цели бројеви, не може приказати у облику производа два полинома степена  $> 1$  са целобројним коефицијентима.
- 109.** Одредити све полиноме  $P$  за које важи:  $x \cdot P(x-1) = (x-3) \cdot P(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .
- 110.** Одредити све полиноме  $P$  за које важи:  $(x-1) \cdot P(x) = (x-3) \cdot P(x-1)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .
- 111.** Одредити све полиноме  $P$  за које важи:  $P(x) \cdot P(x+1) = P(x^2+x+1)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .
- 112.** Нека је  $P(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + 1$  реалан полином са ненегативним коефицијентима, који има  $n$  реалних корена. Доказати да је  $P(2) \geq 3^n$ .
- 113.** Низ полинома  $P_0(x), P_1(x), \dots$  задат је са  $P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_{k+2}(x) = 2x \cdot P_{k+1}(x) - P_k(x)$  ( $k = 0, 1, \dots$ ). Доказати да се све реалне нуле полинома  $P_k(x)$  налазе у интервалу  $(-1, 1)$ .
- 114.** Одредити све полиноме  $n$ -тог степена са целобројним коефицијентима са особином да у  $n$  целобројних тачака имају вредност  $n$ , а у 0 вредност 0.
- 115.** Полином  $P$  је седмог степена и у седам различитих целобројних тачака узима вредност 1 или  $-1$ . Доказати да се полином  $P$  не може приказати као производ два полинома степена  $> 1$  са целобројним коефицијентима.
- 116.** Наћи реалне нуле полинома  $P(x) = x^4 + 1$ .
- 117.** Одредити реалне факторе полинома  $P(x) = x^{2n} + 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
- 118.** Факторисати полином  $P(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + 11x + 7$ .
- 119.** Једначина  $x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 4$  има комплексан корен чији је аргумент  $\frac{\pi}{4}$ . Одредити тај корен.
- 120.** Наћи све реалне бројеве  $p$  и  $q$  такве да полиноми  $P(x) = x^3 + px^2 + 18$  и  $Q(x) = x^3 + qx + 12$  имају два заједничка корена. Одредити те корене.

**121.** Све су нуле полинома  $P(x) = x^3 + px + q, q \neq 0$  реалне. Доказати да је коефицијент  $p$  негативан.

**122.** Наћи полином трећег степена са водећим коефицијентом 2 такав да његове нуле задовољавају једнакости  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 2$ ,  $\frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_1 x_3} + \frac{1}{x_2 x_3} = 4$ ,  $\frac{1}{x_1 x_2 x_3} = 8$ .

**123.** Нека су  $x_1, x_2, x_3$  и  $x_4$  корени једначине  $x^4 + 5x^3 + ax^2 + 3x + 5 = 0$ . Одредити  $a \in \mathbb{R}$  тако да буде  $x_1 \cdot x_2 = 1$ .

**124.** Одредити  $a$  и  $b$  тако да  $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 8x + 4$  има две двоструке нуле.

**125.** Одредити  $a$  тако да  $P(x) = x^4 - x^3 + ax^2 + 6x - 4$  има два корена чији је производ једнак 2.

**126.** Решити једначину  $x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 4 = 0$  ако се зна да она има један комплексан корен чији је реалан део једнак имагинарном делу.

**127.** Корени полинома  $Q(x) = x^3 + x^2 - 2$  су комплексни бројеви  $a$  и  $b$  и реалан број  $c$ . Одредити полином другог степена  $P$  за који је  $P(c) = c$ ,  $P(a) = b$ ,  $P(b) = a$  и доказати да је полином  $P(P(x)) - x$  делив полиномом  $Q(x)$ .

**128.** Доказати да је полином  $P(x) = (x+1)^{6m+1} - (x+1)^{6n+2} + (x+1)^{6p+3}$  ( $m, n, p \in \mathbb{N}_0$ ) делив полиномом  $Q(x) = x^2 + x + 1$ .

**129.** Нека су  $P, q$  и  $r$  природни бројеви. Под којим условом је полином  $P(x) = x^{3p} + ax^{3q+1} + x^{3r+2}$  делив полиномом  $Q(x) = x^2 + ax + 1$  ако је **a)**  $a = 1$ ; **б)**  $a = -1$ ?

**130.** Одредити довољан услов под којим је полином  $P(x) = x^n + \dots + x + 1$  делив полиномом  $Q(x) = x^m + \dots + x + 1$ .

**131.** Дат је полином  $P(x) = 4x^5 - 24x^4 + 53x^3 - 61x^2 + ax + b$ , где је  $a, b \in \mathbb{R}$ . Наћи све нуле полинома  $P$  ако се зна да је  $1+i$  једна нула и да постоји бар једна рационална нула.

**132.** Ако једначина  $x^3 + ax + b = 0$  има рационалне корене  $p, q$  и  $r$ , доказати да једначина  $py^2 + qy + r = 0$  такође има рационалне корене.

**133.** Одредити вишеструке нуле полинома  $P(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ .

**134.** Одредити вредност реалног параметра  $m$  тако да збир два корена полинома  $P(x) = x^4 - 6x^3 + mx^2 - 12x + 16$  буде једнак збију друга два корена.

**135.** Колико постоји полинома са комплексним коефицијентима  $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  чије су нуле  $a, b$  и  $c$ ?

**136.** Познато је да су нуле комплексног полинома  $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$  комплексни бројеви  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . Израчунати производ  $\prod (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1)$ .

**137.** Доказати да ни за једно  $n \in \mathbb{N}$  полином  $P_n(x) = x^{(2n)^2} - x^{(2n-1)^2} - x^{(2n-2)^2} - \dots + x^4 - x + 1$  нема реалних нула.

**138.** Нека су  $a$  и  $b$  корени полинома  $P(x) = x^4 + x^3 - 1$ . Доказати да је  $ab$  корен полинома  $Q(x) = x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1$ .

**139.** Реални полином  $P(x) = ax^n - ax^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \dots + c_2x^2 - n^2bx + b$  има  $n$  позитивних корена. Доказати да су сви ти корени једнаки.

**140.** Доказати да је полином  $P(x) = x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 9x - 6$  иредуцибилан над пољем  $\mathbb{Z}$ .

**141.** Раставити на факторе над пољем  $\mathbb{Q}$  полином  $P$ :

**а)**  $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 3x - 9$ ;      **б)**  $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 6$ ;

**в)**  $P(x) = x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 23x - 12$ ;      **г)**  $P(x) = x^5 + 4x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ .

**142.** Доказати да су полиноми  $P(x) = x^n - 2$  иредуцибилни над  $\mathbb{Q}$  за све природне  $n \geq 1$ .

**143.** Доказати да је пол.  $P(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{p-1}$  иредуцибилан над  $\mathbb{Q}$  за сваки прост број  $p$ .

**144.** Надаји најмања три природна броја  $n$  за које је полином  $P(x) = 1+x+x^2+\dots+x^{n-1}$  редуцибилиан над  $\mathbb{Q}$ .

**145.** Доказати да је полином  $P(x) = x^4 + px^2 + q$ ,  $p, q \in \mathbb{Q}$  редуцибилиан над  $\mathbb{Q}$  ако је испуњен један од ова два услова:  $1^o$   $p^2 - 4q$  је квадрат рационалног броја,  $2^o$   $q$  је квадрат рационалног броја  $r$ ,  $2r - p$  је квадрат рационалног броја.

**146.** Показати да су полиноми иредуцибилини над  $\mathbb{Q}$ : **a)**  $P(x) = x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$ ; **б)**  $P(x) = x^5 - 12x^3 + 36x - 12$ ; **в)**  $P(x) = x^4 - x^3 + 2x + 1$ ; **г)**  $P(x) = x^p - px + 2p - 1$ , где је  $p$  прост број.

#### IV     *Аналитичке особине полинома.*

**147.** Доказати да полином  $P(x) = x^5 + x - 10$  има бар једну ирационалну нулу.

**148.** Решити неједначину  $\frac{16x-7}{x^2+x+1} < 3x$ .

**149.** Одредити полином  $P$  четвртог степена ако је познато да је његов други извод  $P''(x) = 12x^2 + 6x + 4$  и да  $P''(x)|P(x)$ .

**150.** Доказати да полином

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

нема вишеструких нула.

**151.** Ако је  $a$  вишеструка нула полинома  $P(x)$ , онда је  $a$  и вишеструка нула полинома  $Q(x) = P(x) + (P'(x))^2$ . Доказати.

**152.** Доказати да полином  $P(x) = x^3 - 4x^2 + 7x$  нема нула у интервалу  $(0, 2)$ .

**153.** Нека је  $P$  полином степена  $n > 2$ . Одредити ред нуле  $x = a$  полинома

$$Q(x) = \frac{1}{2}(x - a)[P'(x) + P'(a)] - P(x) + P(a).$$

**154.** Одредити реалан број  $a$  тако да  $x = 1$  буде нула полинома  $P(x) = x^{2n} - ax^{n+1} + 2(n^2 - 1)x^n - ax^{n-1} + 1$ , а затим одредити ред  $k$  нуле  $x = 1$ .

**155.** Доказати да је реалан полином  $P$  дељив својим изводним полиномом,  $P'$ , ако и само ако је  $P(x) = a_n(x - x_0)^n$ , где су  $a_n, x_0 \in \mathbb{R}$ .

**156.** Одредити полином седмог степена  $P$  који задовољава услове  $(x - 1)^4|P(x) + 1$  и  $(x + 1)^4|P(x) - 1$ .

**157.** Одредити полином четвртог степена  $P$  који задовољава услове  $(x - 1)^3|P(x) - 8$  и  $(x + 1)^2|P(x) + 8$ .

**158.** Реални полином  $P$  четвртог степена има двоструку нулу  $x = 1$ , а полином  $Q(x) = P(x) + 4$  има двоструку нулу  $x = -1$ . Одредити полином  $P$  ако је  $Q(0) = -2$ .

**159.** Одредити број реалних корена једначине  $P(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + a$  у зависности од реалног параметра  $a$ .

**160.** Нека је  $\frac{a_n}{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} + \dots + \frac{a_1}{2} + a_0 = 0$ . Доказати да полином  $P(x) = a_nx^n + \dots + a_1x + a_0$  има бар једну нулу на интервалу  $[0, 1]$ .

**161.** Ако за реалне бројеве  $A$  и  $B$  важи једнакост

$$\frac{1}{x^2 - 6x + 5} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 5}, \quad \text{тада је производ } AB \text{ једнак:}$$

**A)**  $-\frac{1}{25}$ ; **Б)**  $-1$ ; **II)**  $-\frac{1}{64}$ ; **Д)**  $-\frac{1}{16}$ ; **Е)**  $-\frac{1}{36}$ .

**162.** Разложити следећи рационалне функције на збир полинома и праве рационалне функције:

**a)**  $R(x) = \frac{x^4}{x+4}$ ; **б)**  $R(x) = \frac{x^3 - 7x + 6}{x^2 + x - 2}$ ; **в)**  $R(x) = \frac{x^5 + 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 5x + 1}{x^2 - 2x + 3}$ .

**163.** Представити праве рационалне функције у облику збира парцијалних разломака:

**а)**  $R(x) = \frac{x^2 + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ ; **б)**  $R(x) = \frac{x}{x^2 - 4x + 3}$ ; **в)**  $R(x) = \frac{1}{x^3 - x^2 - 32x + 60}$ ; **г)**

$$R(x) = \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)^3};$$

**д)**  $R(x) = \frac{5x^4 - 1}{x^5(x+5)}$ ; **б)**  $R(x) = \frac{2x^4 + 3x^3 + 31x^2 + 5x + 10}{(x+3)^3(x-4)^2}$ ; **е)**  $R(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 + x^2 - x - 1}$ ; **ж)**  $R(x) = \frac{x^3 + x^2 + 2x + 7}{(x+1)^2(x^2 + 4)}$ ;

**з)**  $R(x) = \frac{1}{x^3 + 1}$ ; **и)**  $R(x) = \frac{11x^4 + 20x^3 - 45x^2 + 22x + 158}{(x-3)(x+2)^2(x^2 - 2x + 2)}$ ; **ј)**  $R(x) = \frac{27x^4 - 26x^3 + 212x^2 - 194x - 119}{(x-1)^3(x^2 + 9)^2}$ .

**164.** Представити дате рационалне функције у облику збира (полинома и) парцијалних разломака:

**а)**  $R(x) = \frac{1}{(x+1)(x+4)}$ ; **б)**  $R(x) = \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ ; **в)**  $R(x) = \frac{x^5}{x^2 + x - 2}$ ; **г)**  $R(x) = \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x}$ ;

**д)**  $R(x) = \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x}$ ; **б)**  $R(x) = \frac{1}{x(x+1)(x^2 + x + 1)}$ ; **е)**  $R(x) = \frac{x^7 - x^6}{x^3 + 1}$ ; **ж)**  $R(x) = \frac{9}{(x^3 + 1)^2}$ ;

**з)**  $R(x) = \frac{1}{x^4 - 1}$ ; **и)**  $R(x) = \frac{x^2 + 3x - 2}{(x-1)(x^2 + x + 1)^2}$ ; **ј)**  $R(x) = \frac{6x^2 - 13x + 4}{x^3 - 3x^2 + 2x}$ ; **к)**  $R(x) = \frac{1}{(x-1)^2(x^2 + 1)}$ ;

**п)**  $R(x) = \frac{x^3 - 2}{(x^2 + 1)x}$ ; **б)**  $R(x) = \frac{1}{x^2 + 6x + 13}$ ; **м)**  $R(x) = \frac{1}{x^4 - 5x^3 + 6x^2}$ ; **н)**  $R(x) = \frac{1}{x^4 + 5x^2 + 4}$ .

**165.** Рационалну функцију  $R(x) = \frac{x^3 + 1}{(x^2 + 4x + 5)(x^2 + 1)^3}$  представити као збир: **а)** парцијалних разломака;

**б)** разломака чији су имениоци полиноми првог степена.

**166.** Доказати да за дате реалне бројеве  $A, a_1, a_2, \dots, a_n$  (бројеви  $a_i$  су међусобно различити) постоје реални бројеви  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , такви да важи једнакост:

$$\frac{A}{(x^2 + a_1)(x^2 + a_2) \dots (x^2 + a_n)} = \frac{A_1}{x^2 + a_1} + \frac{A_2}{x^2 + a_2} + \dots + \frac{A_n}{x^2 + a_n}.$$

**167.** Раставити на збир парцијалних разломака следеће функције:

**а)**  $\frac{3}{(x^2 + 4)(x^2 + 1)}$ ; **б)**  $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)(x^2 + c^2)}$ , где су  $a, b, c \in \mathbb{R}$  и  $a^2, b^2, c^2$  међусобно различити бројеви.

**168.** Доказати да за сваки природан број  $n$  важи  $\frac{1}{(x+1)(x+2) \dots (x+n)} = \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} \frac{(-1)^{i-1}}{x+i}$ , где је  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .

## Решења задатака, упутства и резултати

### I Појам полинома, основне операције са полиномима, коефицијенти полинома.

1.  $f(-2) = (-2) - (-2)^3 = 6.$

2. Сви идентитети важе.

3.  $Q(x) = 3x^3 + 3x.$

4. а)  $P + Q = 3x^2 - 1, P - Q = 3x^2 - 2x + 3, P \cdot Q = 3x^3 - 7x^2 + 3x - 2, 3P + 2Q = 9x^2 - x - 1;$

б)  $P + Q = 2x^2 - 2x, P - Q = -4x + 2, P \cdot Q = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1, 2P - 3Q = -x^2 - 9x + 5;$

в)  $P + Q = 2x^6 + 3x^5 - 3x^2 + 4x - 3, P - Q = 2x^6 - 3x^5 - 3x^2 - 4x + 3, P \cdot Q = 6x^{11} - x^7 - 6x^6 - 12x^3 + 9x^2, P - 2Q = 2x^6 - 6x^5 - 3x^2 - 8x + 6;$

г)  $P + Q = x^4 + 2x^2 - x + 1, P - Q = -x^4 - 2x^3 - 3x - 1, P \cdot Q = -x^7 - 2x^5 - 2x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x, -3P - 2Q = -2x^4 + x^3 - 5x^2 + 4x - 2.$

5.  $-5x^3 + 11x^2 - 2x = -x \cdot (5x^2 - 11x + 2) = -x(5x - 1)(x - 2).$

6. а)  $P(x) = 2x^2 - x + 5; \quad$  б)  $P(x) = 2x^2 - x + 5; \quad$  в)  $P(x) = 2x^2 - x + 5.$

7.  $f(x) = x^2 - 5x + 3.$

8.  $f(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 5.$

9. Како полином  $f(x)$  пролази кроз тачке  $(x, y): (0, 1), (1, -1), (2, 5), (3, 37)$  имамо да је  $f(0) = 1, f(1) = -1, f(2) = 5, f(3) = 37$ . Са друге стране имамо  $f(0) = d, f(1) = a + b + c + d, f(2) = 8a + 4b + 2c + d$  и  $f(3) = 27a + 9b + 3c + d$ , тј.

$$\begin{array}{rclclclclcl} f(0) & = & & & & & d & = & 1 \\ f(1) & = & a & + & b & + & c & + & d & = & -1 \\ f(2) & = & 8a & + & 4b & + & 2c & + & d & = & 5 \\ f(3) & = & 27a & + & 9b & + & 3c & + & d & = & 37 \end{array},$$

који када решимо добијамо решење  $(a, b, c, d) = (3, -5, 0, 1)$ , тј. тражени полином је  $y = f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 1$ .

10. Овде је  $x$  полином по  $y: x = y^4 - 3y^2 - 5y + 5.$

11. а)  $P(x) = x^2 - 4x + 5; \quad$  б)  $P(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3; \quad$  в)  $P(x) = x^3 - x + 1;$

12. Збир коефицијената полинома  $P(x) = a_nx^n + \dots + a_1x + a_0$  једнак је  $P(1) = a_n \dots + a_1 + a_0$ . Стога имамо:

а)  $P(1) = (2 \cdot 1^2 + 1 - 4)^{2016} = (-1)^{2016} = 1; \quad$  б)  $P(1) = 1^{1998} \cdot 2^{10} = 1024; \quad$  в)  $P(1) = 2^{1999} + (-2)^{1999} = 0;$

г)  $P(1) = (-1)^{450} \cdot (-1)^{540} = 1; \quad$  д)  $P(1) = 1^{100} \cdot 0^{100} = 0.$

13.  $\frac{P(1) - P(-1)}{2} = \frac{3^{1999} + 1}{2}.$

14. Ако је  $P(x) = a_nx^n + \dots + a_1x + a_0, a_i \in \mathbb{Z}$ , онда је разлика  $P(5) - P(3)$  делима са  $5 - 2 = 3$ , јер је  $P(5) - P(3) = a_n(5^n - 2^n) + a_{n-1}(5^{n-1} - 2^{n-1}) + \dots + a_1(5 - 2)$ . Како је  $P(5) - P(2) = 5$ , што није деливо са 3, то добијамо да такав полином не постоји.

15. Ако би постојао, онда би разлика  $P(7) - P(2) = 2016 - 7 = 2009$  била делима са  $7 - 2 = 5$ , што није тачно, па такав полином не постоји.

16. На основу претходних задатка добијамо да ако постоји полином са целобројним коефицијентима тада је  $P(11) - P(7)$  увек деливо са 4, па не може бити прост број.

**17.** Слично као и у задатку 1.5 добијамо  $a-b \mid P(a)-P(b) = b-c \mid P(b)-P(c) = c-a \mid P(c)-P(a) = a-b$ . Из овог низа једнакости следи да је  $a-b = \pm(b-c)$  и  $a-b = \pm(c-a)$ . Ако је  $a-b = c-b$  онда је  $a=c$  што даје контрадикцију са чиницом да су бројеви  $a, b, c$  различити. Ако је  $a-b = a-c$  онда је  $b=c$  што је опет контрадикција. Ако је  $a-b = b-c$  и  $a-b = c-a$  онда из прве једначине добијамо  $a-c = 2(a-b)$ , а из друге  $a-c = b-a$  одакле је  $a-b=0$ , тј.  $a=b$ . Како смо у свим случајевима добили контрадикцију, полазна претпоставка не може да важи, па не постоји такав полином.

**18.** Показати математичком индукцијом или уз помоћ биномног обрасца да је  $(a+\sqrt{b})^k + (a-\sqrt{b})^k$  цео број за свако природно  $k$ .

**19.**  $P(x) \cdot (x) = [1+x^2+\dots+x^{100}-x(1+x^2+\dots+x^{98})] \cdot [1+x^2+\dots+x^{100}+x(1+x^2+\dots+x^{98})] = (1+x^2+\dots+x^{100})^2 - x^2(1+x^2+\dots+x^{98})^2$  и сад је очигледно да има само парне степене.

**20.** Како полином  $P(-x)$  има исти коефицијент као и полином  $P(x)$  уз  $x^{20}$  и  $Q(-x)$  као и  $Q(x)$ , проблем се своди на посматрање полинома  $P(-x) = (1+x^2+x^3)^{1000}$  и  $Q(-x) = (1-x^2-x^3)^{1000}$ . Сви чланови у  $P(-x)$  су позитивни и сабирају се, док су неки чланови у  $Q(-x)$  са негативним предзнаком, тако да ће се неки чланови међусобно пократити. Стога је коефицијент уз  $x^{20}$  већи у  $P(-x)$  него у  $Q(-x)$ , тј. већи је у  $P(x)$  него у  $Q(x)$ .

**21.**  $1-x$ .

**22.**  $x^3 + 2x^2 + 4x + 8 + \frac{17}{x-2}$  (или количник је  $x^3 + 2x^2 + 4x + 8$ , а остатак 17).

**23.**  $\frac{5-2x}{x^2-5x+6} = \frac{5-2x}{(x-2) \cdot (x-3)}.$   
 $\frac{-x^2}{x^3-2x^2+x-2} = \frac{-x^2}{(x-2) \cdot (x^2+1)}.$

**24.**  $\frac{6x^2-3x}{x^2+2x+4} = \frac{3x(2x-1)}{x^2+2x+4}.$

**26.**  $\text{Д)} \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}.$

**27.**  $3x^2+1$ .

**28. a)** Ако  $x^2$  пребацим на другу страну, добијамо полином другог степена, који је нула–полином јер узима вредност 0 за три различите вредности:  $x = a, x = b, x = c$ . **б)** Пребацим 1 на другу страну и добијамо полином  $P$  трећег степена за који је  $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 0$ , те је нула–полином.

**29.** Ако тражимо коефицијенте полинома  $P$  добићемо хомоген систем од  $n+1$  једначина са  $n+1$  непознатих, чија је детерминанта система различита од нуле јер је то Вандермондова детерминанта за  $n+1$  различитих вредности. Стога систем има јединствено решење. То је тривијално решење, па је полином  $P$  нула–полином.

**30.** Посматра се нови полином  $P-Q$  и примени се резултат претходног задатка.

**31.**  $a = 3, \quad b = 1, \quad P(x) = x^2 + x + 1$ .

**32.** Нека је  $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ . Из услова  $P(1) = P(-1)$  и  $P(2) = P(-2)$  добијамо систем  $b+d=0, 8b+2d=0$ , чије је решење  $b=d=0$ . Значи  $P(x) = ax^4 + cx^2 + e$ . Одатле директно следи  $P(x) = P(-x) (\forall x \in \mathbb{R})$ .

**33.** Из  $P(x) = P(-x)$  након изједначавања коефицијената и решавања хомогеног система, добија се  $P(x) = ax^4 - 2ax^3 + bx^2 + (a-b)x + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ .

**34.** Када би постојао  $Q(x)$  би био полином другог степена  $Q(x) = ax^2 + bx + c$ . Одредимо композицију  $(Q \circ Q)(x) = a(ax^2+bx+c)^2 + b(ax^2+bx+c) + c = a^3x^4 + 2a^2bx^3 + (2a^2c + ab^2 + ab)x^2 + (2abc + b^2)x + (ac^2 + bc + c)$ . Изједначавањем коефицијената добијамо  $a=1, b=\frac{1}{2}, c=\frac{1}{8}$  из коефицијената најстарија три члана, али то се не слаже са наредним једначинама  $2abc + b^2 = 1, ac^2 + bc + c = 1$ , па не постоји такав полином  $Q$ .

**35.**  $Q(x) = ax + 3a - 3, \quad a \in \mathbb{R}$ .

**36.** Добије се систем који нема решења (као у задатку 1.19).

**37. a)** Ако је  $\deg P = n, \deg Q = m$  тада мора да важи  $n+m = nm, n, m \in \mathbb{N}_0$ . Тривијално решење

$n = m = 0$  даје  $P = 1, Q = c, c \in \mathbb{R}$ .

Имамо и нетривијално решење ове једначине  $n = m = 2$ . Тада су  $P(x) = ax^2 + bx + c$  и  $Q(x) = dx^2 + ex + f$ . Из услова  $P \cdot Q = P \circ Q$ , када изједначимо коефицијенте, добијамо систем:  $ad^2 = ad$ ,  $2ade = ae + bd$ ,  $ae^2 + 2df + bd = af + be + cd$ ,  $2aef + be = bf + ce$ ,  $af^2 + bf + c = cf$ . Његово решење је  $d = 1, b = ae, f = -e, c = 0$ , тј. тражени полиноми су  $P = x^2 + aex, Q = x^2 + ex - e, a, e \in \mathbb{R}, a \neq 0$ .

Поред ових решења имамо и решење  $P = 0, Q$  је произвољан полином.

6) Из а) добијамо да су решења  $P = Q = x^2, P = Q = 1$  и  $P = Q = 0$ .

## II Деливост полинома, Хорнерова шема, Еуклидов алгоритам, Безуов став.

38. Количник је  $Q(x) = x^2 + 3x + 8$ , а остатак је  $R(x) = 19$ . Овај резултат можемо добити обичним дељењем полинома или применом Хорнерове шеме.

39. Из једнакости  $P(x) = (x+1)Q_1(x) + 3$  и  $P(x) = (x-2)Q_2(x) - 3$  уврштањем  $x = -1$  тј.  $x = 2$  добијамо систем  $-2 + a + b = 3, 4 - 2a + b = -3$ , чија су решења  $a = 4, b = 1$ .

40. Остатак је  $R(x) = -2x + 6$ .

41. Остатак је  $R(x) = \frac{x-b}{a-b}r_a + \frac{x-a}{b-a}r_b$ .

42. По Безуовом ставу имамо да из  $P(1) = 1^n + 1^n - 2 = 0$  следи да  $x - 1$  дели  $P(x)$ . Како је  $P(0) = (-1)^n + 1^n - 2 = \begin{cases} 0 & \text{за } n \text{ парно} \\ -2 & \text{за } n \text{ непарно} \end{cases}$  то је за  $n$  парно  $P(x)$  делив са  $x$ , а за  $n$  непарно није. Стога је и  $P(x)$  делив полиномом  $Q(x)$  ако и само ако је  $n$  паран број.

43. За свако  $n$ .

44.  $a = -1, b = 2$ .

45.  $P(x) = x^2 \cdot (\textcolor{red}{x} - 4) + \textcolor{teal}{ax} + b$

Количник је  $\textcolor{red}{x} - 4$ , а остатак је  $\textcolor{teal}{ax} + b$ .

Безуов став:

$$x - \textcolor{red}{2} \mid P(x) \Rightarrow P(\textcolor{red}{2}) = 0 = -8 + 2a + b$$

$$x - \textcolor{blue}{5} \mid P(x) \Rightarrow P(\textcolor{blue}{5}) = 0 = 25 + 5a + b$$

Решавањем система  $2a + b = 8 \quad 5a + b = -25$  добијамо  $a = -11$  и  $b = 30$ .

Тражени остатак је  $\textcolor{teal}{-11x} + 30$ .

46. Остатак је  $R(x) = -4x + 15$ .

47. Остатак је  $r = -1$ .

48.  $a = -6, b = 11, c = -6$ .

49. а) На основу Безуовог става имамо да је остатак једнак  $P(-1) = 2^{100} - 2^{99} + \dots - 2 + 1 = \frac{2^{101} + 1}{3}$ .

б) Остатак при дељењу полиномом  $Q = 2x - 1$  је исти као и остатак при дељењу полиномом  $Q' = x - \frac{1}{2}$  (само је количник у овом случају два пута већи). Стога је тражени остатак једнак  $P(\frac{1}{2}) = 1 + 1 + \dots + 1 = 101$ . в) Слично као под а) и б) остаци при дељењу полинома  $P$  са  $x - 1$  и  $x + \frac{1}{2}$  једнаки су  $P(1) = 2^{100} + 2^{99} + \dots + 2 + 1 = 2^{101} - 1$  и  $P(-\frac{1}{2}) = 1 - 1 + \dots - 1 + 1 = 1$ , респективно. Сада искористимо резултат задатка 2.5 и остатак је  $R(x) = \frac{2^{102} - 4}{3}x + \frac{2^{101} + 1}{3}$ .

50.  $P_n(x) = (x-1)(x-2) \cdot T(x) + R(x)$ .

Како је полином којим делимо,  $Q(x)$ , степена 2, па је остатак  $R(x)$  степена  $< 2$ , тј.  $R(x) = Ax + B$

На основу Безуовог става имамо:

2 је остатак при дељењу са  $x - 1 \Rightarrow P(\textcolor{red}{1}) = \textcolor{violet}{2} = A \cdot \textcolor{red}{1} + B$ ;

1 је остатак при дељењу са  $x - 2 \Rightarrow P(2) = 1 = A \cdot 2 + B$ .

Решавањем система  $A + B = 2$      $2A + B = 1$  добијамо  $A = -1$  и  $B = 3$ .

Тражени остатак је  $R(x) = -x + 3$ .

51. Д) 17.

I начин: Ако се полином  $P(x)$  подели са  $Q(x) = x^2 - 4x + 4$  добија се да је

$$P(x) = Q(x) \cdot (x^3 + x^2 + ax + (4a - 3)) + (12a - 12)x + (b + 12 - 16a).$$

Остатак мора бити 0, тј.  $12a - 12 = 0$  и  $b + 12 - 16a = 0 \Rightarrow a = 1$ ,  $b = 4 \Rightarrow a^2 + b^2 = 17$ .

II начин: Два пута применимо Хорнерову шему са  $a = 2$ .

III начин:  $P(2) = -12 + 8a + b = 0$ ,  $P'(x) = 5x^4 - 12x^3 + 3ax^2 + 2x \Rightarrow P'(2) = 12a - 12 = 0$ .

52.  $P(x) = (x+1)(x^2+1)Q(x) + ax^2 + bx + c$ . Одмах имамо да је остатак при дељењу полинома  $P(x)$  са  $x+1$  једнак  $P(-1) = 4 = a - b + c$ . Груписањем добијамо  $P(x) = (x^2+1)[(x+1)Q(x)+a] + bx+c-a$ , па је  $2x+3 = bx+c-a$  остатак при дељењу полинома  $P(x)$  са  $x^2+1$ . Из ове две једначине се добија решење  $a = \frac{3}{2}$ ,  $b = 2$ ,  $c = \frac{9}{2}$ , тј. тражени остатак је  $R(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{9}{2}$ .

53.  $R(x) = -2x^3 + 2x^2 + x + 5$ .

54. Ставимо смену  $x^2 = y$ . Имамо да је  $P'(x) = y^{2n-1} - y^{2n-2} + \dots + y - 1$  и  $Q'(y) = y^2 - 1 = (y-1)(y+1)$ . Из  $P'(-1) = -2n \neq 0$  следи да  $Q'(y)$  не дели  $P'(y)$ , тј.  $P(y)$  није дељив са  $Q(y)$ .

55. Из дељивости полинома  $P(x)$  са  $x-1$  добијамо да је  $P(1) = 0$ . Како је  $P(-x) = P(x)$  добијамо  $P(-1) = 0$ , па је  $P(x)$  дељив и са  $x+1$ , тј. дељив је са  $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ .

56. Из поставке задатка имамо да је збир коефицијената на парним местима једнак збиру коефицијената на непарним местима, а одатле се добија  $P(-1) = 0$  и  $P(1) = 2$ . Сада се из израза  $P(x) = (x^2 - 1)Q(x) + R(x)$ , где је  $R(x) = ax + b$  или директном применом резултата задатка 2.5 добија  $R(x) = x + 1$ .

57. Могуће је у сва три случаја:

$$P_1(x) = x + 5, P_2(x) = x - 3, Q(x) = x + 1 \text{ тада } Q|P_1 + P_2.$$

$$P_1(x) = x - 1, P_2(x) = x + 2, Q(x) = x^2 + x - 2 \text{ тада } Q|P_1 + P_2.$$

$$P_1(x) = x + 1, P_2(x) = x - 2, Q(x) = x - 1 \text{ тада } Q|P_1(P_2).$$

58. Уведимо помоћни полином  $Q(x) = P(x) - p$ . Како је  $Q(1) = Q(2) = Q(3) = Q(4) = 0$ , то је могуће  $Q$  представити у облику  $Q(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)T(x)$ . Ако би било  $P(a) = 2p \Rightarrow Q(a) = p$ , тј. имали бисмо да број  $p$  деле сва четири броја  $a-1, a-2, a-3$  и  $a-4$  што је немогуће јер су  $\{-p, -1, 1, p\}$  једини делиоци простог броја  $p$ .

59. Задатак има два решења:  $a = -7, b = -1$  и  $a = -12, b = -2$ .

60. Ставивши  $(x^3+x+a)(x^3+kx^2+lx+m) = x^6+x^3+a$ , добијамо контрадикторан систем једначина.

61. а) Овај задатак ћемо решити на 3 начина: решавањем система, вишеструком применом Хорнерове шеме и коришћењем Тејлорове формуле.

I начин:  $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 1 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ , односно кад степенујемо и групишемо добијамо

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 1 = ax^3 + (b-3a)x^2 + (c-2b+3a)x + (d-c+b-a).$$

Изједначавањем одговарајућих коефицијената добијамо систем

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b - 3a &= -3 \\ c - 2b + 3a &= 4 \\ d - c + b - a &= 1, \end{aligned}$$

чија су решења  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $c = 1$  и  $d = 3$ . Тражени развој по потенцијама од  $x-1$  је  $P(x) = (x-1)^3 + (x-1) + 3$ .

II начин: Вишеструко ћемо делити полином  $P(x)$  са  $x - 1$  Хорнеровом шемом:

	1	-3	4	1	
1	1	-2	2	3	
1	1	-1	1		
1	1	0			
1	1				

Тиме смо добили да је  $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 1 = (x - 1) \cdot (x^2 - 2x + 2) + 3 = (x - 1) \cdot ((x - 1) \cdot (x - 1) + 1) + 3 = (x - 1)^3 + (x - 1) + 3$ .

Видимо да коефицијенте развоја 1,0,1,3 добијамо када прочитамо обрнутим редоследом остатке у вишеструкој Хорнеровој шеми.

III начин: Полином  $P(x)$  степена  $n$  је једнак свом Тейлоровом полиному  $T_n$  степена  $n$ . Развимо функцију  $P(x)$  у Тейлоров полином у околини тачке 1.

$P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 1$ ,  $P'(x) = 3x^2 - 6x + 4$ ,  $P''(x) = 6x - 6$ ,  $P'''(x) = 6$ .  $P(1) = 3$ ,  $P'(1) = 1$ ,  $P''(1) = 0$ ,  $P'''(1) = 6$ .  $P(x) = T_3(x) = 3 + \frac{1}{1!}(x - 1) + \frac{0}{2!}(x - 1)^2 + \frac{6}{3!}(x - 1)^3 = 3 + (x - 1) + (x - 1)^3$ .

**б)** Развимо функцију  $P(x)$  у Тейлоров полином у околини тачке  $-2$ .  $-2$  узимамо јер је  $x + 2 = x - (-2)$ .

$P(x) = T_3(x) = -21 + 23(x + 2) - 8(x + 2)^2 + (x + 2)^3$ .

**в) I начин:** Вишеструко ћемо делити полином  $P(x)$  са  $x - 2$  Хорнеровом шемом. Обратите пажњу да коефицијенти полинома  $P(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 1$  у првом реду Хорнерове шеме нису  $1 \quad -1 \quad 1 \quad -1$  јер би то одговарало полиному трећег степена  $x^3 - x^2 + x - 1$ , него су  $1 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \quad -1$ , јер полином  $P(x)$  можемо записати као  $P(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 0 \cdot x - 1$ . Стога имамо:

	1	-1	1	0	-1	
2	1	1	3	6	11	
2	1	3	9	24		
2	1	5	19			
2	1	7				
2	1					

Тиме смо добили да је  $P(x) = (x - 2)^4 + 7(x - 2)^3 + 19(x - 2)^2 + 24(x - 2) + 11$ .

Коефицијенте развоја 1,7,19,24,11 добијамо када читамо уназад остатке у вишеструкој Хорнеровој шеми.

II начин: Развимо  $P(x)$  у Тейлоров полином у околини тачке 2.  $P(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 1$ ,  $P'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x$ ,  $P''(x) = 12x^2 - 6x + 2$ ,  $P'''(x) = 24x - 6$ ,  $P^{iv}(x) = 24$ .  $P(2) = 11$ ,  $P'(2) = 24$ ,  $P''(2) = 38$ ,  $P'''(2) = 42$ ,  $P^{iv}(2) = 24$ .  $P(x) = T_4(x) = 11 + 24(x - 2) + 19(x - 2)^2 + 7(x - 2)^3 + (x - 2)^4$ .

**р)**  $P(x) = T_4(x) = 52 + 89(x - 3) + 51(x - 3)^2 + 12(x - 3)^3 + (x - 3)^4$ .

**д)**  $P(x) = T_4(x) = -7(x - 2) - (x - 2)^2 + 3(x - 2)^3 + (x - 2)^4$ .

**б)**  $P(x) = T_5(x) = (x + 1)^2 + 2(x + 1)^3 - 3(x + 1)^4 + (x + 1)^5$ .

**62. а)**  $P(x) = (x - 1)^3 + (x - 1) + 3$ ; **б)**  $P(x) = (x + 2)^4 - 5(x + 2)^3 + 2(x + 2)^2 + 26(x + 2) - 41$ ; **в)**  $P(x) = 2(x - 3)^5 + 30(x - 3)^4 + 177(x - 3)^3 + 519(x - 3)^2 + 757(x - 3) + 431$ .

**63. а)** 209; **б)** 200; **в)** 2166.

**64.**

**65. а)**  $\text{NZD}(P, Q) = 1$ ,  $S(x) = x$ ,  $T(x) = -3x^2 - x + 1$ ;

**б)**  $\text{NZD}(P, Q) = x + 2$ ,  $S(x) = \frac{1}{8}(x - 3)$ ,  $T(x) = \frac{1}{8}(-x^2 + 3x + 1)$ ;

**в)**  $\text{NZD}(P, Q) = x^2 - x + 2$ ,  $S(x) = -\frac{1}{2}x$ ,  $T(x) = -\frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1)$ .

**66.**  $x^2 - 2x + 1$ .

**67.**

**68.** Јесте за свако  $p$ .

**69.** Ако је  $a = -b$ , онда је  $P_{2n+1} = 0$ . Нека је зато  $a + b \neq 0$ . За  $n = 1$  добија се да је  $P_3(x) = [x^2 + (a+b)x + ab] \cdot 3(a+b) = 3(a+b)(x+a)(x+b)$ . Дакле нуле полинома  $P_3$  су  $x_1 = -a$  и  $x_2 = -b$ . Како је  $P_{2n+1}(-a) = b^{2n+1} + a^{2n+1} - a^{2n+1} - b^{2n+1} = 0$  и  $P_{2n+1}(-b) = a^{2n+1} + b^{2n+1} - a^{2n+1} - b^{2n+1} = 0$ , видимо да су  $x_1 = -a$  и  $x_2 = -b$  нуле и полинома  $P_{2n+1}$ , па  $P_3(x)|P_{2n+1} = 0$ , што је и требало доказати.

За  $n = 2$  добија се полином  $P_5(x) = 5(a+b)[x^4 + 2(a+b)x^3 + 2(a+b)^2x^2 + (a+b)^3x + ab(a^2 + ab + b^2)]$ .  $P_5 : P_3 = \frac{5}{3}[(x^2 + (a+b)x + (a^2 + ab + b^2))]$ . Нуле овог количника су  $x_3$  и  $x_4$  што са претходно нађеним нулама даје скуп решења једначине  $P_5 = 0$ :

$$x_1 = -a, x_2 = -b, x_{3,4} = -\frac{a+b}{2} \pm i \cdot \sqrt{\frac{3}{4}(a^2 + b^2) + \frac{ab}{2}}.$$

### III      Нуле полинома (целобројне, рационалне и комплексне), Виетова правила; иредуцибилни полиноми.

**70. а)** Једначину можемо записати као  $x^3 - 1 = (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1)$ , те она има решења:  $x_1 = 1$ ,  $x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ .

**б)** Једначину можемо записати као  $x^3 + 8 = (x + 2) \cdot (x^2 + 2x + 4)$ , те она има решења:  $x_1 = -2$ ,  $x_{2,3} = 1 \pm i\sqrt{3}$ .

**71. а)**  $k = 2$ ;    **б)**  $k = 3$ ;    **в)**  $k = 2$ ;

**72.**  $P(x) = a(x+1)(x-2)(x+2)^2 = ax^4 + 3ax^3 - 2ax^2 - 12ax - 8a$ ,     $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ .

**73.**  $P(x) = x^4 + 10x^3 + 36x^2 + 56x + 32$ .

**74.** Заједничке нуле полинома  $P$  и  $Q$  су решења једначине  $\text{НЗД}(P, Q) = 0$ .

**а)**  $x_{1,2} = \pm i$ ;    **б)**  $x_1 = -1, x_2 = -2$ .

**75.** Број  $x = a$  је нула реда  $kl$  полинома  $P \cdot Q$  и нула реда  $k$  полинома  $P + Q$ .

**76.**  $P(x) = x^2(x^2 - x) - x(x^2 - x) + 2(x^2 - x) + 2$ . Како је  $\alpha^2 - \alpha = 3$ , имамо  $P(\alpha) = \alpha^2 \cdot 3 - \alpha \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 2 = 3(\alpha^2 - \alpha) + 8 = 3 \cdot 3 + 8 = 17$ .

**77.**  $R(x) = 2x^2 - 6x + 4$ .

**78.** Напишимо полином  $P$  у облику  $P(x) = x^n - 1 - ax(x^{n-2} - 1) = (x-1)[x^{n-1} + \dots + x + 1 - ax(x^{n-3} + \dots + x + 1)]$ . Да би полином у угластој загради био дељив са  $x - 1$ , потребно је и довољно (по Безуовом ставу) да буде  $n - a(n-2) = 0$ . Дакле  $P(x)$  је дељив са  $(x-1)^2$  за произвољно  $n > 2$  и  $a = \frac{n-2}{n}$ .

**79.**  $a = -7, b = -60$ . Корени полинома  $P$  су  $x_1 = 3, x_2 = -4, x_3 = -5$ .

**80.** Из једнакости  $(x-2)(x-\alpha)(x-\alpha+2) = x^3 + ax^2 + 4x + b$  се добија систем  $a = -2\alpha, 4 = \alpha^2 + 2\alpha - 4, b = -2\alpha^2 + 4\alpha$ . Овај систем има два решења у скупу  $\mathbb{Z}$ :  $\alpha_1 = 2, a_1 = -4, b_1 = 0$  и  $\alpha_2 = -4, a_2 = 8, b_2 = -48$ , а одговарајући корени једначине су  $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 2$  и  $x_1 = -6, x_2 = -4, x_3 = 2$ .

**81.** Има два решења:  $a_1 = -9, b_1 = -24$  и  $a_2 = 9, b_2 = 24$ , а одговарајуће нуле полинома су  $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4$  и  $x_1 = -4, x_2 = -3, x_3 = -2$ .

**82. Д)** 8.

**83. А)** 1.

**84. Б)** -6.

**85.** Из Виетових формулa одмах можемо добити  $x_1x_2x_3x_4 = -6$ .

Да су се у задатку тражиле и нуле полинома, онда би на основу тврђења за комплексне нуле полинома са реалним коефицијентима добили да  $x_1 = 1 + i \Rightarrow x_2 = 1 - i$  нула овог полинома. По Безуовом ставу имамо да  $(x - x_1) | P(x)$  и  $(x - x_2) | P(x)$ , па и  $(x - x_1) \cdot (x - x_2) | P(x)$ . Како је

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = (x - (1 + i)) \cdot (x - (1 - i)) = (x - 1)^2 - i^2 = x^2 - 2x + 2,$$

остаје да са овим полиномом поделимо  $P(x)$ . Као количник се добија  $x^2 + 2x - 3$  и одатле добијамо преостале 2 нуле:  $x_3 = 1$  и  $x_4 = -3$ .

**86.** Одредити производ свих решења једначине  $x^4 - 5x^2 + 10x - 6 = 0$ , ако је познато да је  $1 + i$  једно њено решење.

**87. II)**  $x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$ .

**88.** Ако је  $q$  непаран, непарни су му и сви делиоци, па би и решење, означимо га са  $x_0$  морало бити непарно. А како је то корен једначине морало би да важи  $x_0^3 + 3x_0 + q = 0$ , што је немогуће јер сума три непарна броја не може бити једнака нули.

**89.** Ако међу коренима полинома  $P$  имамо два супротна броја  $\lambda$  и  $-\lambda$  и преостали корен нек је  $\mu$ , тада се  $p$  може представити у облику  $P(x) = (x - \lambda)(x + \lambda)(x - \mu)$ . Кад изједначимо коефицијенте добија се  $a = -\mu, b = -\lambda^2, c = \lambda^2\mu$ , а одатле се директно добија да је  $ab = c$ .

Ако је  $ab = c$ , тада имамо да је  $P(x) = (x^2 + b)(x + a)$ , а како су ррешења једначине  $x^2 + b = 0$  супротни бројеви, то добијамо да међу коренима  $P$  постоје два супротна броја.

**90.** Нека је  $x_1 \in \mathbb{Z}$  решење. Из Безуовог става имамо  $f(x) = (x - x_1)q(x)$ . Тада из услова да је  $f(0) = -x_1q(0)$  непаран добијамо да је  $x_1$  непаран. Из услова да је  $f(1) = (1 - x_1)q(1)$  непаран добијамо да је  $1 - x_1$  непаран, што је немогуће, па  $f$  нема целобројних корена.

**91.** Слично као претходни пример. Нека је  $x_1 \in \mathbb{Z}$  решење. Тада је  $f(x) = (x - x_1)q(x)$ . Кад ту заменимо редом  $x = 1, 2, 3$  и измножимо те једнакости добија се  $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) = (1 - x_1)(2 - x_1)(3 - x_1)q(1)q(2)q(3)$ , а та једнакост није могућа јер је тачно један од бројева  $1 - x_1, 2 - x_1, 3 - x_1$  који јављају на левој страни једнакости дељив са 3, производ  $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3)$  са десне стране није дељив са 3 из услова задатка. Контрадикција.

**92.** Нека је  $x_1 \in \mathbb{Z}$  нула полинома  $P(x) = a_nx^n + \dots + a_1x + a_0$ . Прикажимо је у облику  $x_1 = nk + r, k \in \mathbb{Z}, 0 \leq r \leq n - 1$ . Тада је  $P(r) = P(r) - 0 = P(r) - P(x_1) = (a_nr^n + \dots + a_1r + a_0) - [a_n(nk + r)^n + \dots + a_1(nk + r) + a_0]$ . Одузимањем  $a_0$  се укида, поништавају се чланови облика  $a_i r^i$ , а од преосталих сваки садржи  $n$  као фактор, па можемо писати  $P(r) = nc$ , где је  $c$  неки цео број различит од нуле (јер је из поставке задатка  $P(x) \neq 0$ , за  $x = 0, 1, \dots, n - 1$ ). Али тада одбијамо контрадикцију са другом полазном предпоставком:  $|P(x)| < n$ , за  $x = 0, 1, \dots, n - 1$ .

**93.** Користити биномни образац и услове задатка.

**94.** Нека је  $\alpha$  нула полинома  $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$  са целобројним коефицијентима. Тада је  $\sqrt[n]{\alpha}$  нула полинома  $Q(x) = a_nx^{mn} + a_{n-1}x^{m(n-1)} + \dots + a_1x^m + a_0$ .

**95.** Из  $P(x_1) = x^4 \cdot P(\frac{1}{x_1})$  директно следи да је  $x_1 \neq 0$  корен једначине да је тада и  $\frac{1}{x_1}$  корен те једначине.

**96.**  $a = -2, b = -24$ .

**97.** Треба проверити јесу ли  $x = \pm 1$  или  $x = \pm \frac{1}{p}$  корени полинома  $P$ . За  $x = 1$  имамо  $P(1) = 2 \neq 0$ . За  $x = -1$  имамо  $P(-1) = -2p + 2 < 0$ . Да би  $x = \frac{1}{p}$  био корен треба  $P(\frac{1}{p}) = 0$ , тј.  $\frac{1}{p^4} - \frac{p-1}{p^2} + 1 = 0$ , односно,  $p^4 - p^3 + p^2 + 1 = 0$ , а ова једначина нема целобројних корена (једини кандидати  $\pm 1$  се лако одбаце). Аналогно се показује и да  $x = -\frac{1}{p}$  није корен.

Од кандидата за корен одмах ћемо одбацити пола:  $x = 1, 2, \frac{1}{p}, \frac{2}{p}$  јер је за њих  $f(x) = px^3 + x + 2 > 0$ . Даљи поступак је потпуно исти као у претходном задатку и на крају се добије да ни за један прост број  $p$  дата једначина нема рационални корен (1 није прост број!).

**98.**  $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = 1$ .

**99.**  $P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 4)$ .

**100.** Како је полином моничан, то је његов најстарији коефицијент  $a_n = 1$ . Стога ако би имао рационалних нула оне би биле целобројне, а како је у поставци дато да  $P$  нема целобројних нула, то добијамо да су све реалне нуле тог полинома ирационални бројеви.

**101.** Нека је  $x_1 = \sqrt[n]{p}$ . То је решење једначине  $x^n - p = 0$ . Рационални кандидати за корен ове једначине су:  $\pm 1$  и  $\pm p$ . Али како је  $P(1) = 1 - p < 0$ ,  $P(-1) = \pm 1 - p < 0$ ,  $P(p) = p^n - p > 0$  и  $P(-p) = (-p)^n - p = \begin{cases} p^n - p > 0 & \text{за } n \text{ парно} \\ -p^n - p < 0 & \text{за } n \text{ непарно} \end{cases}$  то добијамо да је  $x_1 = \sqrt[n]{p}$  ирационалан број.

**102.** Исти доказ као у претходним задацима.

**103.** Уведимо помоћни полином  $Q(x) = P(x) - 1$ . Како су му нуле  $x = a, x = b$  и  $x = c$  он се може представити у облику  $Q(x) = (x - a)(x - b)(x - c)R(x)$ . Тада је  $P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)R(x) + 1$ . Ако би  $P$  имао целобројну нулу  $x = d$  тада би важило  $0 = P(d) = (d - a)(d - b)(d - c)R(d) + 1$ . Али у том случају добијамо да постоје 3 различита броја  $d - a, d - b$  и  $d - c$  који деле  $-1$  што је контрадикција.

**104. а)** Нуле полинома  $Q_1(x)$  су  $x_1 - a, x_2 - a, \dots, x_n - a$ . **б)** Нуле полинома  $Q_2(x)$  су  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .  
**в)** Нуле полинома  $Q_3(x)$  су  $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}$ . **г)** Нуле полинома  $Q_4(x)$  су  $bx_1, bx_2, \dots, bx_n$ .

**105.** Нека је  $P(a) = P(b) = P(c) = 2$  за различите бројеве  $a, b, c$ . Претпоставимо да је  $P(d) = 3$ , тада је  $-1 = P(a) - P(d) = (a - d) \cdot m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  (види задатак 1.5). Одатле следи да је  $a - d = \pm 1$ . Аналогно се добијају  $b - d = \pm 1$  и  $c - d = \pm 1$ . Одатле се добија да су бар два од бројева  $a, b, c$  једнака што је у контрадикцији са претпоставком задатка.

**106.** Претпоставимо да постоје  $R, S$  такви да је  $P(x) = R(x) \cdot S(x)$ . Из  $P(a_i) = -1 = R(a_i) \cdot S(a_i)$  добијамо  $R(a_i) = -S(a_i)$ , тј.  $R(a_i) + S(a_i) = 0$ , па полином  $R(x) + S(x)$  има  $n$  нула ( $a_i$ ), а степен му је мањи од  $n$  па по задатку 1.12 добијамо да је  $R(x) + S(x) = 0$ . Тј. добили смо да је  $P(x) = -R(x)^2$ , али то је немогуће јер смо добили да је  $P(x) \leq 0 \quad \forall x$ , а треба  $P(x) \rightarrow \infty$  кад  $x \rightarrow \infty$ .

**107.**

**108.**

**109.** Ако у дату једначину уврстимо  $x = 0$  добијамо  $P(0) = 0$ . Ако уврстимо  $x = 3$  добијамо  $P(2) = 0$ . Ако уврстимо  $x = 1$  добијамо  $P(1) = -\frac{1}{2}P(0) = 0$ .  $P(3)$  није једнозначно одређен, а од његовог избора зависе  $P(4), P(5), \dots$  На основу Безуовог става имамо да је  $P(x) = x(x-1)(x-2)Q(x)$ . Када ово уврстимо у услов задатка добијамо  $x(x-1)(x-2)(x-3)Q(x-1) = (x-3)x(x-1)(x-2)Q(x)$ , тј.  $Q(x-1) = Q(x)$ . На основу задатка 1.13 добијамо да је  $Q(x) = c$ . Стога су сва решења полазне једначине полиноми  $P(x) = cx(x-1)(x-2)$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

**110.** Ако у дату једначину уврстимо  $x = 1$  добијамо  $P(0) = 0$ . Ако уврстимо  $x = 2$  добијамо  $P(1) = -\frac{1}{2}P(1) = 0$ . Ако у дату једначину уврстимо  $x = 3$  добијамо  $P(3) = 0$ . Ако уврстимо  $x = 4$  добијамо  $P(4) = \frac{1}{3}P(3) = 0 \dots$  Како је  $P(n) = \frac{n-3}{n-1}P(n-1)$  за  $n \geq 4$  то нам  $P(3) = 0 \Rightarrow P(4) = 0 \Rightarrow P(5) = 0 \Rightarrow \dots$  Математичком индукцијом можемо показати да је  $P(n) = 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . На основу задатка 1.13 добијамо да је  $P(x) = 0$  и то је једино решење.

**111.** Полином нема реалних нула (ако би имао имао би бесконачно много реалних нула јер  $P(x) = 0$  повлачи  $P(x^2 + x + 1) = 0$ ). Овај полином је или константа или има комплексних нула. Ако је константа  $P(x) = c$ , онда је  $c^2 = c$ , тј. имамо решења  $P(x) = 0, \quad P(x) = 1$ . Ако има комплексан корен  $a + bi$  онда су му корени и  $a - bi$  (због особина комплексних корена) и  $-a - bi$  и  $-a + bi$  (ове два због парности функције: функција је парна јер је  $P(x) \cdot P(x+1) = P(x^2 + x + 1) = P(-x) \cdot P(-x-1)$  за бесконачно много вредности). Нека је  $a \geq 0, b > 0$  (ако није заменимо корен са неким од преостала три корена). Кад заменимо корен  $a + bi$  у  $x^2 + x + 1$  и израчунамо квадрат модула тог комплексног броја он је једнак  $(b^4 - 2b^2 + 1) + (a^2 + b^2) + (a^4 + 2a^3 + 2a^2 + 2a + 2a^2b^2 + 2ab^2) \geq (a^2 + b^2)$ . Како у горњој неједнакости треба да важи једнакост (да не бисмо имали бесконачно комплексних корена) то мора да буде испуњено  $b^2 = 1 \quad a = 0$ . Добили смо да су једине нуле  $\pm i$  па је у овом случају решење  $P(x) = (x^2 + 1)^n$ .

**112.** Сви корени су негативни јер  $x \geq 0 \Rightarrow P(x) > 0$ . Означимо те корене са  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Нека је  $y_k = -x_k > 0$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Тада је  $P(x) = (x+y_1)(x+y_2)\dots(x+y_n)$ . Ако применимо неједнакост аритметичке и геометријске средине добијамо  $2 + y_k = 1 + 1 + y_k \geq 3\sqrt[3]{y_k}$ , па је  $P(2) \geq 3^n\sqrt[3]{y_1y_2\dots y_n}$ . Из Виетових формулa имамо да је  $\prod x_i = (-1)^n \Rightarrow \prod y_i = 1$ , јер су  $y_k > 0$ . Кад то уврстимо у претходну неједнакост добијамо  $P(2) \geq 3^n$ .

**113.** Фиксирамо  $x = a$ . Тада решавамо диференцну једначину  $P_{k+2}(a) = 2a \cdot P_{k+1}(a) - P_k(a)$ ,  $P_0(a) = 1$ ,  $P_1(a) = a$ . Њено решење је  $P_k(a) = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - 1})^k + \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - 1})^k$ . За  $a \geq 1$   $P_k(a) > 0$ . За  $a \leq -1$  и  $k$  парно  $P_k(a) > 0$ . За  $a \leq -1$   $P_k(a) < 0$ . Стога добијамо да су све реалне нуле  $|a| < 1$ .

**114.** Посматрати помоћни полином  $Q(x) = P(x) - n$ . Нуле су му различити бројеви  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$ . Тада је  $Q(x) = A(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$ . Слободан члан полинома  $Q$  је  $Q(0) = -n$ , па из Виетових формулa добијамо  $x_1x_2\dots x_n = (-1)^n \frac{(-n)}{A}$ , тј.  $n = (-1)^{n+1}x_1x_2\dots x_n = |(-1)^{n+1}x_1x_2\dots x_n| \geq 2^{n-2}$  (јер су највише два корена  $x_k$  мања од 2 по апсолутној вредности).  $n \geq 2^{n-2} \Rightarrow n \leq 4$ . За  $n = 1$  имамо да је  $Q(x) = x - 1$  или  $Q(x) = -x + 1$ , тј. решења која одговарају су  $x_1 = 1$  и  $A = 1$ , односно  $x_1 = -1$  и  $A = -1$ . За  $n = 2$  имамо да је  $Q(x) = x^2 + x - 2$  или  $Q(x) = x^2 - x - 2$  или  $Q(x) = -x^2 + 3x - 2$  или  $Q(x) = -x^2 - 3x - 2$  — решења која одговарају  $x_1 = 1, x_2 = -2$  и  $A = 1$ , тј.  $x_1 = -1, x_2 = 2$  и  $A = 1$ , тј.  $x_1 = 1, x_2 = 2$  и  $A = -1$ , тј.  $x_1 = -1, x_2 = -2$  и  $A = -1$ . За  $n = 3$  имамо да је  $Q(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$  или  $Q(x) = -x^3 + 3x^2 + x - 3$  — решења која одговарају  $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = -3$  и  $A = 1$ , тј.  $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 3$  и  $A = -1$ . За  $n = 4$  имамо да је  $Q(x) = -x^4 + 5x - 4$  — решење које одговара  $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2, x_4 = -2$  и  $A = 1$ .

Решења су: 
$$P(x) \in \{\pm x, x^2 \pm x, -x^2 \pm 3x, \pm x^3 + 3x^2 \mp x, -x^4 + 5x^2\} .$$

**115.**  $P_7(x) = Q(x) \cdot R(x)$  и нека је  $1 < \deg R < 4 \leq \deg Q$ .  $R(x_i) = \pm 1$  па  $R$  има бар у четири тачке вредност 1 (или  $-1$  и тад разматрање иде потпуно аналогно) па по задатку 1.13 добијамо да је  $R = 1$ . Тад је  $1 = \deg R$ , па смо добили да је полином  $P$  немогуће раставити на производ два полинома степена  $> 1$  са целобројним коефицијентима.

## V Рационалне функције.

**161. E)**  $-\frac{1}{36}$ .

**162. a)**  $R(x) = \frac{x^4}{x+4} = x^3 - 4x^2 + 16x - 64 + \frac{256}{x+4}$ ; **б)**  $R(x) = \frac{x^3 - 7x + 6}{x^2 + x - 2} = \frac{x^2 + x - 6}{x + 2} = x - 1 + \frac{-4}{x + 2}$ ;

$$\begin{array}{r} \left( \begin{array}{r} x^5 + 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 5x + 1 \\ -x^5 + 2x^4 - 3x^3 \\ \hline 7x^4 + 2x^3 + 5x^2 \\ - 7x^4 + 14x^3 - 21x^2 \\ \hline 16x^3 - 16x^2 + 5x \\ - 16x^3 + 32x^2 - 48x \\ \hline 16x^2 - 43x + 1 \\ - 16x^2 + 32x - 48 \\ \hline - 11x - 47 \end{array} \right) \div (x^2 - 2x + 3) = x^3 + 7x^2 + 16x + 16 + \frac{-11x - 47}{x^2 - 2x + 3} \end{array}$$

овде је права рационална функција  $\frac{-11x - 47}{x^2 - 2x + 3}$  већ парцијални разломак (јер именилац  $x^2 - 2x + 3$  има дискриминанту  $D < 0$ , па се он не раставља).

**163. a)**  $R(x) = \frac{x^2 + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-1} - \frac{5}{x-2} + \frac{5}{x-3}$ ; **б)**  $R(x) = \frac{x}{x^2 - 4x + 3} = \frac{-1/2}{x-1} + \frac{3/2}{x-3}$ ;

**в)**  $R(x) = \frac{1}{x^3 - x^2 - 32x + 60} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-5} - \frac{2}{x+6}$ ; **г)**  $R(x) = \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)^3} = \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{3}{(x-1)^3}$ ;

**д)**  $R(x) = \frac{5x^4 - 1}{x^5(x+5)} = \frac{1 - \frac{1}{5^5}}{x} + \frac{\frac{1}{5^4}}{x^2} - \frac{\frac{1}{5^3}}{x^3} + \frac{\frac{1}{5^2}}{x^4} - \frac{\frac{1}{5}}{x^5} + \frac{\frac{1}{5^1} - 1}{x+5}$ ;

$$\text{б)} R(x) = \frac{2x^4 + 3x^3 + 31x^2 + 5x + 10}{(x+3)^3(x-4)^2} = \frac{1}{x+3} - \frac{2}{(x+3)^2} + \frac{1}{(x+3)^3} + \frac{1}{x-4} + \frac{2}{(x-4)^2};$$

$$\text{в)} R(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 + x^2 - x - 1} = \frac{x^2 + 1}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{1/2}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1/2}{x-1};$$

$$\text{г)} R(x) = \frac{x^3 + x^2 + 2x + 7}{(x+1)^2(x^2 + 4)} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x^2 + 4};$$

$$\text{д)} R(x) = \frac{1}{x^3 + 1} = \frac{1}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = \frac{1}{3(x-1)} + \frac{-x+2}{3(x^2 - x + 1)};$$

$$\text{е)} R(x) = \frac{11x^4 + 20x^3 - 45x^2 + 22x + 158}{(x-3)(x+2)^2(x^2 - 2x + 2)} = \frac{10}{x-3} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{2x-6}{x^2 - 2x + 2};$$

$$\text{ж)} R(x) = \frac{27x^4 - 26x^3 + 212x^2 - 194x - 119}{(x-1)^3(x^2 + 9)^2} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{2x+5}{x^2 + 9} + \frac{2x+2}{(x^2 + 9)^2}.$$

$$\text{164. а)} R(x) = \frac{1}{(x+1)(x+4)} = \frac{1/3}{x+1} - \frac{1/3}{x+4}; \quad \text{б)} R(x) = \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{-1/2}{x+1} + \frac{2}{x+2} + \frac{-3/2}{x+3};$$

$$\text{в)} R(x) = x^3 - x^2 + 3x - 5 + \frac{1/3}{x-1} + \frac{32/3}{x+2};$$

$$\text{г)} R(x) = \frac{x}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{0}{x-1} + \frac{1/4}{(x-1)^2} + \frac{0}{x+1} - \frac{1/4}{(x+1)^2} = \frac{1/4}{(x-1)^2} - \frac{1/4}{(x+1)^2}.$$

$$\text{д)} R(x) = \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} = 1 + \frac{1/6}{x} - \frac{9/2}{x-2} + \frac{28/3}{x-3};$$

$$\text{е)} R(x) = \frac{1}{x(x+1)(x^2 + x + 1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2 + x + 1};$$

$$\text{ж)} R(x) = \frac{x^7 - x^6}{x^3 + 1} = x^4 - x^3 - x + 1 - \frac{2/3}{x+1} + \frac{2/3x - 1/3}{x^2 - x + 1};$$

$$\text{з)} R(x) = \frac{9}{(x^3 + 1)^2} = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{3 - 2x}{x^2 - x + 1} + \frac{3 - 3x}{(x^2 - x + 1)^2};$$

$$\text{и)} R(x) = \frac{1}{x^4 - 1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2 + 1)} = \frac{1/4}{x-1} - \frac{1/4}{x+1} - \frac{1/2}{x^2 + 1};$$

$$\text{и)} R(x) = \frac{x^2 + 3x - 2}{(x-1)(x^2 + x + 1)^2} = \frac{2/9}{x-1} + \frac{-2/9x - 4/9}{x^2 + x + 1} + \frac{1/3x + 8/3}{(x^2 + x + 1)^2};$$

$$\text{ж)} R(x) = \frac{6x^2 - 13x + 4}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{2}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{x-2}; \quad \text{к)} R(x) = \frac{1}{(x-1)^2(x^2 + 1)} = \frac{-1/2}{x-1} + \frac{1/2}{(x-1)^2} + \frac{1/2x}{x^2 + 1};$$

$$\text{и)} R(x) = \frac{x^3 - 2}{(x^2 + 1)x} = 1 + \frac{-x - 2}{(x^2 + 1)x} = 1 - \frac{2}{x} + \frac{2x - 1}{x^2 + 1};$$

**њ)**  $x^2 + 6x + 13$  нема реалних нула, јер је  $D = b^2 - 4ac = -16 < 0$ , па је  $R(x) = \frac{1}{x^2 + 6x + 13}$  парцијални разломак;

$$\text{м)} R(x) = \frac{1}{x^4 - 5x^3 + 6x^2} = \frac{1}{x^2(x-2)(x-3)} = \frac{5/36}{x} + \frac{1/6}{x^2} - \frac{1/4}{x-2} + \frac{1/9}{x-3};$$

**н)** Ако прво уведемо смену  $t = x^2$ , много лакше ћемо наћи парцијалне разломке:

$$R(x) = \frac{1}{x^4 + 5x^2 + 4} = \frac{1}{t^2 + 5t + 4} = \frac{1}{(t+1)(t+4)} = \dots = \frac{1/3}{t+1} - \frac{1/3}{t+4} = \frac{1/3}{x^2 + 1} - \frac{1/3}{x^2 + 4}.$$

$$\text{165. а)} R(x) = \frac{x^3 + 1}{(x^2 + 4x + 5)(x^2 + 1)^3} = \frac{\frac{5}{4}x + 1}{x^2 + 4x + 5} - \frac{\frac{1}{4}x}{x^2 + 1}.$$