ЈЕДНАКОСТ ДВА ЗБИРА КВАДРАТА УЗАСТОПНИХ ПРИРОДНИХ БРОЈЕВА

Теорема.

За сваки природан број $n \geq 2$ постоји n узастопних природних бројева чији је збир квадрата једнак збиру квадрата наредних $n-1$ узастопних природних бројева.

Доказ.

Уствари, теорема тврди да за сваки природан број $n \geq 2$ постоји природан број k такав да важи једнакост:

$$k^2+(k+1)^2+(k+2)^2+\cdots+(k+n-1)^2=(k+n)^2+(k+n+1)^2+\cdots+(k+2n-2)^2.$$

На левој страни ове једнакости има n сабирака, а на десној $n-1$ сабирак, што значи да једнакост увек има укупно непаран број $2n-1$ сабирака.

Потребно је и довољно да покажемо да је k заиста природан број у зависности од природног броја n и да одредимо ту зависност. У том циљу извршићемо назначене операције у датој једнакости.

Када извршимо потребно квадрирање на обема странама, добијамо једнакост:

$$k^2+(k^2+2k+1)+(k^2+4k+4)+\cdots+(k^2+2(n-1)k+(n-1)^2)=(k^2+2nk+n^2)+$$
$$+(k^2+2(n+1)k+(n+1)^2)+\cdots+(k^2+2(2n-2)k+(2n-2)^2).$$

Даље,примењујући асоцијативност и дистрибутивност, добијамо:

$$nk^2+2k(1+2+3+\cdots+n-1)+1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2=(n-1)k^2+2k(n+n+1+$$
$$+n+2+\cdots+n+n-2)+n^2+(n+1)^2+\cdots+(2n-2)^2$$. Овде треба применити формуле за збир првих n природних бројева и за збир квадрата првих n природних бројева, то јест формуле: $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ и $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Тако добијамо:

$$nk^2+2k\frac{(n-1)n}{2}+\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}=(n-1)k^2+2k\left(n(n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\right)+\frac{(2n-2)(2n-1)(4n-3)}{6}-$$
$$-\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$, односно квадратну једначину по k:

$$nk^2-(n-1)k^2+2k\left(\frac{(n-1)n}{2}-n(n-1)-\frac{(n-1)(n-2)}{2}\right)+2\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}-\frac{(2n-2)(2n-1)(4n-3)}{6}=0 \quad ,$$

која може даље да се упрости:

$$k^2+2k\left(-\frac{(n-1)n}{2}-\frac{(n-1)(n-2)}{2}\right)+\frac{(n-1)n(2n-1)}{3}-\frac{(n-1)(2n-1)(4n-3)}{3}=0,$$
$$k^2+2k\cdot\frac{-n^2+n-n^2+3n-2}{2}+\frac{(n-1)(2n-1)}{3}(n-4n+3)=0,$$
$$k^2+2k\cdot\frac{-2n^2+4n-2}{2}+\frac{(n-1)(2n-1)}{3}(-3n+3)=0\,,$$
$$k^2-2k(n^2-2n+1)-(n-1)(2n-1)(n-1)=0$$ и, на крају:
$$k^2-2(n-1)^2k-(n-1)^2(2n-1)=0\,.$$

Сада треба решити квадратну једначину по k, примењујући познату формулу:

$$k_{1,2}=\frac{-\left(-2(n-1)^2\right)\pm\sqrt{\left(-2(n-1)^2\right)^2-4\left(-(n-1)^2(2n-1)\right)}}{2}=\frac{2(n-1)^2\pm\sqrt{4(n-1)^4+4(n-1)^2(2n-1)}}{2}\,,$$

$$k_{1,2}=\frac{2(n-1)^2\pm\sqrt{4(n-1)^2((n-1)^2+2n-1)}}{2}=\frac{2(n-1)^2\pm2(n-1)\sqrt{n^2-2n+1+2n-1}}{2}=\frac{2(n-1)^2\pm2(n-1)n}{2}\,,$$ одакле се јасно види да k није ирационалан број, односно да је цео број: $k_{1,2}=(n-1)^2\pm(n-1)n$.Овај цео број је природан само за знак $+$ и за $n \geq 2$, што значи да, за дати природан број n, постоји јединствен природан број $k=(n-1)^2+(n-1)n=(n-1)(n-1+n)=(n-1)(2n-1)\geq 3$. Овим је доказ завршен.

Дакле, $\boldsymbol{k=(n-1)(2n-1)}$, па, заменом у полазној једнакости

$$k^2+(k+1)^2+(k+2)^2+\cdots+(k+n-1)^2=(k+n)^2+(k+n+1)^2+\cdots+(k+2n-2)^2$$

закључујемо да за сваки природан број $n \geq 2$ важи једнакост:

$$\left((n-1)(2n-1)\right)^2+\left((n-1)(2n-1)+1\right)^2+\cdots+\left((n-1)(2n-1)+n-1\right)^2=$$
$$=\left((n-1)(2n-1)+n\right)^2+\left((n-1)(2n-1)+n+1\right)^2+\cdots+\left((n-1)(2n-1)+2n-2\right)^2$$

После сређивања неких чланова ова једнакост има облик:

$$\boldsymbol{\left((n-1)(2n-1)\right)^2+\left((n-1)(2n-1)+1\right)^2+\left((n-1)(2n-1)+2\right)^2+\cdots+\left((n-1)\cdot 2n\right)^2=}$$
$$\boldsymbol{=\left((n-1)\cdot 2n+1\right)^2+\left((n-1)\cdot 2n+2\right)^2+\left((n-1)\cdot 2n+3\right)^2+\cdots+\left((n-1)(2n+1)\right)^2.}$$

Ево примера за бројеве прве десетице:

За $n=2$, добијамо познату Питагорину тројку: $3^2+4^2=5^2$.

За $=3$: $10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$.

За $n=4$: $21^2+22^2+23^2+24^2=25^2+26^2+27^2$.

За $n=5$: $36^2+37^2+38^2+39^2+40^2=41^2+42^2+43^2+44^2$.

За $n=6$: $55^2+56^2+57^2+58^2+59^2+60^2=61^2+62^2+63^2+64^2+65^2$.

За $n=7$: $78^2+79^2+80^2+81^2+82^2+83^2+84^2=85^2+86^2+87^2+88^2+89^2+90^2$.

За $n=8$: $105^2+106^2+107^2+108^2+109^2+110^2+111^2+112^2=113^2+114^2+115^2+$
$+116^2+117^2++118^2+119^2$.

За $n=9$: $136^2+137^2+138^2+139^2+140^2+141^2+142^2+143^2+144^2=145^2+146^2+$
$+147^2+148^2++149^2+150^2+151^2+152^2$.

За $n=10$: $171^2+172^2+173^2+174^2+175^2+176^2+177^2+178^2+179^2+180^2=181^2+$
$+182^2+183^2+184^2+185^2+186^2+187^2+188^2+189^2$.

Што је већи природан број n, то у одговарајућој једнакости имамо већи број сабирака. На пример, за $=100$, $k=99\cdot 199=19701$, па добијамо једнакост која садржи 199 сабирака:
$19701^2+19702^2+19703^2+\cdots+19800^2=19801^2+19802^2+19803^2+\cdots+19899^2$.

Одушевљава помисао да има гигантских узастопних природних бројева са овом особином. На пример, једнакост која само на левој страни има милијарду сабирака почиње са квадратом деветнаестоцифреног броја 1 999 999 997 000 000 001, а њена вредност је 45-тоцифрени број.

Вредност било које од датих једнакости може се израчунати квадрирањем чланова, затим сабирањем, али за велике бројеве то је прилично велики посао, па би било пожељно да изведемо формулу за израчунавање те вредности у зависности од n.

Нека је $S_n=k^2+(k+1)^2+(k+2)^2+\cdots+(k+n-1)^2$.

У претходном поступку, после примене формула за збир првих n природних бројева и за збир њихових квадрата, на левој страни, добили смо једнакост:

$k^2+(k+1)^2+(k+2)^2+\cdots+(k+n-1)^2=nk^2+2k\frac{(n-1)n}{2}+\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$.

Заменом k, једнакост постаје:

$S_n=n(n-1)^2(2n-1)^2+n(n-1)^2(2n-1)+\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$;

$S_n=n(n-1)(2n-1)\left((n-1)(2n-1)+n-1+\frac{1}{6}\right)$;

$S_n=n(n-1)(2n-1)\left((n-1)(2n)+\frac{1}{6}\right)$;

Коначно: $\boldsymbol{S_n=\frac{n(n-1)(2n-1)[12n(n-1)+1]}{6}}$.

Овај израз је увек природан број јер је производ $n(n-1)(2n-1)$ дељив са 6.

Читаоцу препуштам да до ове формуле дође полазећи од једнакости $S_n=S_{k+n-1}-S_{k-1}$ користећи познату формулу за збир квадрата првих n природних бројева или сређивањем десне стране полазне једнакости.

За наведене примере једнакости добијамо:

$S_2=\frac{2\cdot 1\cdot 3\cdot 25}{6}=25=3^2+4^2=5^2$

$S_3 = \frac{3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 73}{6} = 5 \cdot 73 = 365 = 10^2 + 11^2 \ + 12^2 = 13^2 + 14^2$;
$S_4 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 145}{6} = 14 \cdot 145 = 2030 = 21^2 + 22^2 \ + 23^2 \ + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$;
$S_5 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 241}{6} = 30 \cdot 241 = 7230 = 36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + + 43^2 + 44^2$
и тако даље.

Помоћу формуле за S_n брже израчунавамо вредности једнакости, као на пример, $S_{100} = 19701^2 + 19702^2 + \cdots + 19800^2 = \frac{100 \cdot 99 \cdot 199 \cdot 118801}{6} = 328350 \cdot 118801 = 39\ 008\ 308\ 350$, јер бисмо много више времена изгубили поступним квадрирањем и сабирањем. За много веће бројеве, готово је немогуће замислити израчунавање вредности без формуле.

Напомена 1. Свака једнакост у овој теми може се увећати множењем леве и десне стране квадратом неког природног броја. Тако добијамо нове једнакости код којих су сабирци квадрати узастопних чланова неког аритметичког низа.

Тако на пример, Питагорина тројка $(3, 4, 5)$ постаје $(9, 12, 15)$ множењем са 3, односно, једнакост $3^2 + 4^2 = 5^2$ постаје $9^2 + 12^2 = 15^2$ множењем са 3^2, а њена вредност постаје $25 \cdot 9 = 225$. Бројеви $9, 12, 15$ чине трочлани аритметички низ са диференцијом 3 .

У другом примеру, ако леву и десну страну једнакости $10^2 + 11^2 \ + 12^2 = 13^2 + 14^2$ помножимо са $4 = 2^2$ добијамо $20^2 + 22^2 \ + 24^2 = 26^2 + 28^2$, а њена вредност износи $365 \cdot 4 = 1460$. Бројеви $20, 22, 24, 26, 28$ су чланови аритметичког низа са првим чланом 20 и диференцијом 2.

Напомена 2. Пошто се ова тема бави сабирањем квадрата, ове једнакости имају и своју геометријску интерпретацију, али то није циљ теме.