СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

такмичење ученика средњих школа из математике

Београд, 02.04.2011.

Први дан

1. Нека је $n \geqslant 2$ природан број и нека позитивни реални бројеви a_0, a_1, ..., a_n задовољавају једнакост

$$(a_{k-1} + a_k)(a_k + a_{k+1}) = a_{k-1} - a_{k+1}, \quad \text{за свако } k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Доказати да је $a_n < \dfrac{1}{n-1}$.

2. Нека је n непаран природан број такав да су бројеви $\varphi(n)$ и $\varphi(n+1)$ степени броја два ($\varphi(n)$ је број природних бројева не већих од n и узајамно простих са n). Доказати да је $n+1$ степен броја два или је $n = 5$.

3. Нека је H ортоцентар, а O центар описане кружнице оштроуглог троугла ABC. Тачке D и E су подножја висина из темена A и B, редом. Обележимо са K пресечну тачку правих OD и BE, а са L пресечну тачку правих OE и AD. Нека је X друга пресечна тачка кружница описаних око троуглова HKD и HLE, а M средиште странице AB. Доказати да су тачке K, L и M колинеарне ако и само ако је X центар описане кружнице троугла EOD.

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.

СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

такмичење ученика средњих школа из математике

Београд, 03.04.2011.

Други дан

1. На страницама AB, AC и BC троугла ABC дате су, редом, тачке M, X и Y тако да је $AX = MX$ и $BY = MY$. Нека су K и L, редом, средишта дужи AY и BX, а O центар описане кружнице троугла ABC. Ако су O_1 и O_2 тачке симетричне тачки O у односу на K и L, редом, доказати да тачке X, Y, O_1 и O_2 леже на истој кружници.

2. Да ли постоје природни бројеви a, b и c, већи од 2011, такви да у децималном запису важи једнакост

$$\left(a+\sqrt{b}\right)^{c} = \ldots 2010,2011\ldots\ ?$$

3. Скуп T садржи 66 тачака, а скуп P садржи 16 правих у равни. За тачку $A \in T$ и праву $\ell \in P$ кажемо да су *инцидентни пар* ако $A \in \ell$. Доказати да број инцидентних парова не може бити већи од 159, као и да постоји таква конфигурација са 159 инцидентних парова.

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.