СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

такмичење ученика средњих школа из математике

Београд, 12.04.2008.

Први дан

1. Нека су α и β углови неједнакокраког троугла ABC код темена A и B, редом. Нека симетрале ових углова секу наспрамне странице троугла у D и E, редом. Доказати да оштар угао између правих DE и AB није већи од $\dfrac{|\alpha-\beta|}{3}$.

2. Одредити најмањи природан број који је дељив са 2009 и коме је збир цифара једнак 2009.

3. Одредити највећи природан број n за који постоје различити скупови $S_1, S_2, \ldots, S_n$ такви да је:

1° $|S_i \cup S_j| \leqslant 2004$ за свака два $1 \leqslant i, j \leqslant n$ и

2° $S_i \cup S_j \cup S_k = \{1, 2, \ldots, 2008\}$ за свака три цела броја $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$.

Други дан

1. Нека је $n \in \mathbb{N}$ и A_n скуп свих пермутација $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ за које важи

$$k \mid 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_k), \qquad \text{за свако } 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{$\dagger$}$$

Одредити број елемената скупа A_n.

2. Нека су x, y, z позитивни реални бројеви такви да је $xy + yz + zx = x + y + z$. Доказати неједнакост

$$\frac{1}{x^2+y+1} + \frac{1}{y^2+z+1} + \frac{1}{z^2+x+1} \leqslant 1.$$

Када се у претходној неједнакости достиже знак једнакости?

3. Нека је k уписана кружница неједнакокраког $\triangle ABC$, чији је центар S. Кружница k додирује странице BC, CA, AB у тачкама P, Q, R, редом. Права QR сече праву BC у тачки M. Нека кружница која садржи тачке B и C додирује k у тачки N. Описана кружница $\triangle MNP$ сече праву AP у тачки L, различитој од P. Доказати да су тачке S, L и M колинеарне.